

Werk

Label: Article

Jahr: 1872

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0001|log26

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Začátky matematické krystallografie.

(Píše prof. Jan Krejčí.)

(Pokračování.)

II. Tvary poloměrné.

44. Plnoměrné tvary dají se souměrným vynecháním polovice ploch rozložit ve tvary *poloměrné* (hemiedrické), kteréž mají plochy těch samých úseků, avšak jen polovičný jich počet. Tentýž výsledek dá odvození z krychle. Střídavé vynechání podvojných ploch rovnoběžných, nebo přikrojení střídavých hran krychle dá totiž tvary s plochami *rovnoběžně poloměrnými*. Vynechání ploch ve střídavých obtantech, nebo přikrojení rohů krychle na střídavých rozích dá tvary s plochami *klonoplošně poloměrnými*. Vynechání střídavých ploch střídavě buď od pravé nebo od levé strany, neb přikrojení rohů krychle od pravé neb levé strany dá tvary s plochami *pravo-levě poloměrnými*.

Poloměrnost jest tudíž trojí: *rovnoběžná*, *klonoplochá* a *pravo-levá*.

Z toho též vychází, že poloměrnosti rovnoběžné jsou schopny toliko tvary s plochami d_n a o , poloměrnosti klonoploché jen tvary s plochami osmičetnými, a poloměrnosti pravo-levé jen osmačtyřicetníky.

Rozklad tvarů plnoměrných ve tvary poloměrné lze nejnázne znázorniti přenešením všech 48 polí osmačtyřicetníka na každý z nich a vynecháním těch polí dle naznačených tří způsobů poloměrnosti, při čemž se shledá, že dva tvary, totiž h a d nižádného rozkladu nejsou schopny; rovnoběžného rozkladu jen krychlový čturmecítník d_n a osmačtyřicetník O_s ; klonoplochého rozkladu jen osmistěn O , čturmecítníky O'_m , O_m a osmačtyřicetník O_s ; a konečně pravolevého rozkladu jen osmačtyřicetník O_s .

A. Poloměrnost rovnoběžná.

a) S plochami v poloze $\pm d_n$.

45. Jednostranným přikrojením hran krychle, nebo vynecháním střídavých ploch tvaru d_n , vyvinou se dva tvary dva-

náctiploché, které se od sebe rozeznávají jen postavou o 90° kolem kolmé hlavní osy otočenou. Znamka těch ploch jest $\pm d_n$, u Millera $\pi(n10)$. Poloměrný tvar takto vyvinutý, obr. 1., jest obmezen 12 souměrnými pětiúhelníky, z nichž každý jest obmezen hranou P nad plochami vepsané krychle a čtyřmi hranami H .

Hran P jest 6, hran H jest 24; tyto vytvořují 8 pravidelně, ony s podvojnými hranami H 12 nepravidelně trojplachých rohů. Tvar ten slove *pětiúhelný dvanáctistěn* (Pentagonal-Dodekaeder).

Hlavní osy krychle ukončují se ve středu hran P , trojúhelné osy v pravidelných rozích; kosočtverečné osy nejsou vyznačeny zvláště patrným bodem.

46. Úseky ustanoví se buď z hrany P dle rovnice

$$n = \tan \frac{1}{2}P,$$

nebo z hrany H pomocí trojbokého výkroju, obr. 73., O' , $\frac{1}{2}H'$, $\frac{1}{2}H$, v němž $\frac{1}{2}H' = 90^\circ$, $(o', h') = 30^\circ$, pročež

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\cos \frac{1}{2}H}{\sin O'},$$

$$\sin O' = 2 \cos \frac{1}{2}H \sqrt{\frac{1}{3}},$$

načež ze spojkové hrany toho dvanáctistěnu s osmistěnem se nalezne v trojbokém výkroju, obr. 74., $\frac{1}{2}O$, O' , $\frac{1}{2}O''$, v němž $\frac{1}{2}O'' = 90^\circ$, $\frac{1}{2}O = 54^\circ 44' 8''$, $\sin \frac{1}{2}O = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\cos(o, o'') = \cos O' \cdot \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{1}{2}P = (o, o'') + 45^\circ$$

$$n = \tan \frac{1}{2}P.$$

47. Jelikož dle všeobecné rovnice 12. jest

$$\cos P = -\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$\cos H = -\frac{n}{n^2 + 1},$$

jest pro $H = P$, totiž pro *pravidelný pětiúhelný dvanáctistěn*.

$$n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

což jest výraz neúměrný (irracionální), pročež se pravidelný pětiúhelný dvanáctistěn na vyhraněných hmotách objeviti nemůže.

b) S plochami v poloze $\pm O_s$.

48. Trojplochým příkrojením rohů krychle plochami podvojně rovnoběžnými, nebo rozkladem osmačtyřicetníka dle střídavých ploch podvojně rovnoběžných vyvinou se dva tvary, obmezené 24 lichoběžníky, které odtínají hrany krychle v poměru $1/m : 1/n : 1$.

Známka jejich jest tudíž $\pm o_s$ nebo u Müllera $\pi(mn\ 1)$.

Tvar ten slove *rovnoběžný čtyřmécitník* (Diploid). Tvar ten (obr. 75.) má všeobecné obrysy pětiúhelného dvanáctistěnu, jen že každá plocha toho dvanáctistěnu jest od středu hran P ve dví přelomena. Plochy ty setkávají se ve 12 hranách souhlasných s hranami O na o_s , ve 24 hranách H nad plochami vepsaného osmistěnu a ve 12 hranách P nad stejnojmenným hranami tvaru $\pm d_n$. Rohy jsou troje: 8 pravidelně trojplochých, v nichž se končí trojúhelné osy krychle, 6 souměrně čtveroplochých, v nichž se končí hlavní osy krychle a 12 nepravidelně čtveroplochých rohů. Osy kosočtverečné nejsou vyznačeny zvláště patrným bodem.

49. Hrana O jsouc prodloužena protíná hlavní osu ve vzdálenosti $= 1/n$, hrana P ve vzdálenosti $= 1$, kdežto osa, od níž ty hrany vycházejí, jest $1/m$.

50. Mezi odrůdami toho tvaru jsou též takové, v nichž jest hrana O rovnoběžná s hranou H . Nepravidelný roh jejich musí tedy od protilehlé roviny os tak vzdálen býti, jako roh trojúhelný. Pro trojúhelný roh jsou souřadnice

$$x = y = z.$$

Dosadíme-li ten výraz do rovnice plochy

$$ax + by + cz = 1, \text{ jest}$$

$$x = y = z = \frac{1}{a + b + c}.$$

Vezmeme-li nejmenší úsek za měřítko $= 1$, a tudíž na př. pro plochu o_s ,

$$\frac{1}{b} = 1, \quad \frac{1}{c} = m, \quad \frac{1}{a} = \frac{m}{n}, \text{ nebo}$$

$$b = 1, \quad c = \frac{1}{m}, \quad a = \frac{n}{m}, \text{ jest}$$

$$x = y = z = \frac{m}{m+n+1}.$$

Souřadnice nepravidelného rohu, z nichž delší $= s$, kratší s' , ustanoví se, je-li nejkratší osa $= 1$, střední $= \frac{m}{n}$, nejdelší $= m$, srovnalostmi

$$1 : m = s : m - s', \text{ pročež}$$

$$s = \frac{m - s'}{m},$$

$$1 : \frac{m}{n} = s' : \frac{m}{n} - s, \text{ pročež}$$

$$s' = \frac{m - ns}{m}.$$

Spojením obou souřadnic obdržíme délky obou souřadnic

$$s = \frac{m^2 - m}{m^2 - n}, \quad s' = \frac{m^2 - mn}{m^2 - n}.$$

Pro tvar s rovnoběžnými hranami P a H jest $x = s'$, tedy

$$\frac{m}{m+n+1} = \frac{m^2 - mn}{m^2 - n}, \text{ nebo}$$

$$m = n^2.$$

Známka stejnostranného $\pm o_s$ jest tedy o_{n^2} , u Millera $\pi(n^2 n1)$.

51. K ustanovení úseků vůbec jest jako u tvaru o_s nutno znáti dvě hrany.

Jsou-li známy hrany O , P , doplňme osmistěn obmezený těmi hranami hranou O' (obr. 75.), načež jest dle všeobecné rovnice 13.

$$\cos P + \cos O + \cos O' = -1, \text{ a dle 9.}$$

$$m : n : 1 = \cos \frac{1}{2} O' : \cos \frac{1}{2} P : \cos \frac{1}{2} O.$$

Nebo se ustanoví z hran O , P , obr. 75.

$$\cos(p, a) = \frac{\cos \frac{1}{2} O}{\sin \frac{1}{2} P}, \quad \cos(o, a) = \frac{\cos \frac{1}{2} P}{\sin \frac{1}{2} O}, \text{ načež jest}$$

$$m = \tan(p, a), \quad \frac{m}{n} = \tan(o, a),$$

$$n = \frac{\tan(p, a)}{\tan(o, a)}.$$

52. Jsou-li známy hrany O, H , ustanoví se z trojbokého výkrojků $O', \frac{1}{2}H', \frac{1}{2}H$ (obr. 75.), v němž $\frac{1}{2}H' = 90^\circ$, $(o', k') = 30^\circ$

$$\sin O' = 2 \cos \frac{1}{2}H \sqrt{1/3}.$$

Ve spojení s osmistěnem (obr. 76.) dá plocha O_s výkrojek $\frac{1}{2}O, O', \frac{1}{2}O''$, v němž $\frac{1}{2}O'' = 54^\circ 44' 8''$,

$$\cos \frac{1}{2}O'' = \sqrt{1/3}, \quad \sin \frac{1}{2}O'' = \sqrt{2/3},$$

$$\cos(o, o'') = \frac{\cos O' \sqrt{3} - \cos \frac{1}{2}O}{\sin \frac{1}{2}O \sqrt{2}}.$$

Jelikož $(o, o'') + 45^\circ = (o, a)$, jest

$$\frac{m}{n} = \tan(o, a)$$

$$m = \tan \frac{1}{2}O \cdot \sin(o, a)$$

$$n = \frac{m}{\tan(o, a)}.$$

53. Známe-li hrany P, H , jest

$$\sin O' = 2 \cos \frac{1}{2}H \sqrt{1/3}$$

a ve spojení s osmistěnem (obr. 76.) ve výkrojků $\frac{1}{2}P, O', \frac{1}{2}O''$

$$\cos(p, o'') = \frac{\cos O' \sqrt{3} - \cos \frac{1}{2}P}{\sin \frac{1}{2}P \cdot \sqrt{2}}$$

$$m = \tan(p, a)$$

$$\frac{m}{n} = \tan \frac{1}{2}P \cdot \sin(p, a).$$

Zobrazení rovnoběžně poloměrných tvarů.

54. Zobrazení děje se pomocí krychle, do níž se vnesou hlavní a trojúhelné osy, načež se ustanoví poloha pravidelných a nepravidelných rohů.

Pro *pětúhelný dvanáctistěn* $\pm d_n$ jest trojúhelná osa, jako ve tvaru d_n

$$t = \frac{n \sqrt{3}}{a + 1}.$$

Poloha nepravidelného rohu ustanoví se ze souřadnic jeho s a s' (obr. 73.), které leží v rovině dvou hlavních os.

Vezme-li se hlavní osa $= 1$, jest dle srovnalosti

$$1 : n = s' : n - 1$$

$$s' = \frac{n - 1}{n} = \frac{1}{2}p,$$

totiž rovná se délce polovičné hrany p ., kdežto

$$s = 1.$$

Nepravidelné rohy takto nalezené spojí se přiměřeně s konečnými body trojúhelných os.

Pro rovnoběžný čtyřmécítmík $\pm O_s$ (obr. 75.) jest jako ve tvaru O_s

$$t = \frac{m \sqrt{3}}{m + n + 1}.$$

Je-li hlavní osa = 1, jest

$$s = \frac{m^2 - m}{m^2 - n}$$

$$s' = \frac{m^2 - mn}{m^2 - n}.$$

Dle těch rovnic ustanoví se v rovinách dvou hlavních os poloha nepravidelných rohů, tedy vždy nad hranami vepsaného osmistěnu, načež se ty rohy přiměřeně spojí jak s hlavními tak i s trojúhelnými osami.

Spojky rovnoběžně poloměrných tvarů.

55. Do řady těchto tvarů náleží mimo $\pm d_n$ a $\pm O_s$ též všechny plnoměrné tvary, které poloměrnosti rovnoběžné schopny nejsou, tedy h , d , $O^{1/m}$, O_m . Mezi spojkami těch tvarů jsou nejhojnější ty, na nichž převládá h , O neb $\pm d_n$.

Ustanovení ploch děje se tímž způsobem jako u plnoměrných tvarů.

Následující příklady vysvětlí, jak se to ustanovení děje. Obrazce 77., 78., 79 představují tvary *Kobaltinu*.

Na obr. 77. jest vyobrazena spojka O a $\pm d_n$. Jelikož spojková hrana stojí kolmo na hraně osmistěnu, totiž na straně pravidelného trojúhelníka, což činí též prodloužená strana pravidelného šestistěnu, náleží $\pm d_n$ k onomu d_n , jehož šestiploché rohy otupuje osmistěn v podobě pravidelného šestiúhelníka (viz 14. u plnoměrných tvarů), pročež

$$\pm d_n = \pm d_2 = \pm i.$$

Jsou-li obě plochy O a $\pm d_n$ v rovnováze, což se jeví na $\pm d_n$ otupením pravidelných rohů (obr. 78.), nabývá spojka podoby *dvacetistěnu*, obmezeného 8 stejnostrannými trojúhelníky O , a 12 stejnoramennými trojúhelníky $\pm d_n$.

V *pravidelném dvacetistěnu* (Ikosieder), kterýž jest obmezen samými stejnostrannými trojúhelníky, má se polovičná strana trojúhelníku k výšce jeho, jako $1 : \tan 60^\circ$, čili jako $1 : \sqrt{3}$.

Tvar $\pm d_n$, z něhož by se dal otupením pravidelných rohů vyvinouti pravidelný dvacetistěn, musil by býti obmezen takovými pětiúhelníky, aby se spojením nepravidelných rohů do nich daly vepsati stejnostranné trojúhelníky, a tedy aby se polovičná hrana $\frac{1}{2}p$ měla k výšce O pětiúhelníka jako $1 : \sqrt{3}$.

Vezmeme-li hlavní osu $= 1$, jest

$$\frac{1}{2}p = \frac{n-1}{n},$$

$$o^2 = a^2 + k^2,$$

kdežto $a = 1$, $k = 1 - \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n}$, pročež

$$o = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}.$$

V *pravidelném dvacetistěnu* jest tedy

$$\frac{1}{2}p : o = \frac{n-1}{n} : \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \text{ nebo je-li } \frac{1}{2}p = 1,$$

$$1 : \sqrt{3} = \frac{n-1}{n} : \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}, \text{ z čehož}$$

$$n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2},$$

což jest výrazem neuměrným, a tedy na vyhraněných tvarech nemožným.

Pravidelný dvacetistěn nemůže se tedy na vyhraněných tvarech objeviti.

Obrazec 79. představuje spojku, na níž se dle polohy ustanoví plochy h co plochy krychle,

O co plochy osmistěnu,

$+ d_n$, $+ d_{n'}$ co plochy dvanáctistěnu,

$+ O$, co plochy nějakého 24stěnu.

K ustanovení d_n a $d_{n'}$ změří se

$$d_n : h = 153^\circ 26'$$

$$d_{n'} : h = 165^\circ 58',$$

z čehož vychází