Drobné zprávy.

Má-li se průměrná lhůta počítati na základě počtu lhůtového aneb úrokového?

(Podává dr. *Jos. Vaňous.*)

Stává se často, že průměrná lhůta dle počtu úrokového počítaná nesouhlasí s vypočtěnou dle lhůtového počtu.

Příčina toho je patrně v chybném užívání počtu lhůtového.

Důležitost a větší mnohdy prospěšnost tohoto počtu vyžaduje, aby se zevrubněji vyskoumala souvislost obou method.

Předpokládaje známost i významu průměrné lhůty i jejího vypočítání dle obou spůsobů chci ukázati:

1. že oba spůsoby počítání podstatou stejně jsou zabezpečeny;
2. že výsledky při správném užívání obou method vždy se musí rovnati;
3. že jedna methoda druhou v sobě chová a z ní ihned vyvoditi se dá;
4. že nahodilé neshody výsledků hledati jest mimo mathematicky zaručenou methodu a to v neopatrném a chybném užívání jejím.

Buďtež k_0, k_1, $k_2 \ldots k_n$ jistiny vztažně po uplynutí dob t_0, t_1, $t_2 \ldots t_n$ splatné a hledejme jejich průměrnou lhůtu totiž čas, za který by se všecky tyto části najednou mohly složiti, aby ani věřitel, ani dlužník ni zisku, ni ztráty neměli. Aby úloha byla všeobecnější, stanovme, že jistiny tyto jsou až do zapravení súročitelné na $p\%$; takže na místo nynějších jejich hodnot k_0, $k_1 \ldots k_n$ po uplynutí dob t_0, $t_1 \ldots t_n$ spláceti se mají jistiny s úroky K_0, $K_1 \ldots K_n$. I bude souvislost těchto s oněmi, jsou-li u_0, $u_1 \ldots u_n$ příslušné úroky, následující:

$$K_0 - k_0 = k_0 t_0 \frac{p}{100} = u_0$$

$$K_1 - k_1 = k_1 t_1 \frac{p}{100} = u_1$$

. . . .

$$K_n - k_n = k_n\, t_n \frac{p}{100} = u_n$$

Sečteme-li všechny tyto rovnice a poznamenáme zkrátka

$$K_0 + K_1 + K_2 + \ldots K_n = \Sigma K$$

a klademe-li podobně ΣK, Σkt a Σu za příslušné součty, bude

$$\Sigma K - \Sigma k = \frac{p}{100} \Sigma kt = \Sigma u \qquad (1)$$

kteroužto rovnici pro dělení veličinou Σk lze i takto psáti

$$(\Sigma K - \Sigma k)\frac{100}{p\Sigma k} = \frac{\Sigma kt}{\Sigma k} = \frac{100}{p\Sigma k} \cdot \Sigma u \qquad (2)$$

Výrazem $(\Sigma K - \Sigma k) \dfrac{100}{p\Sigma k}$ anebo $\dfrac{100}{p\Sigma K} \Sigma u$ jest ustanoven čas, za který kapitál Σk vynesl by tolikéž úroků co jednotlivé jeho části k_0, $k_1 \ldots k_n$ za doby t_0, $t_1 \ldots t_n$, aby na K_0, $K_1 \ldots K_n$ vzrostly. Znamená tedy ten výraz průměrnou lhůtu, jakby na základě úrokového počtu se vypočítala.

Výrazem pak $\Sigma kt : \Sigma k$ podává se průměrná lhůta na základě počtu lhůtového a dle rovnice (2) budou se tedy průměrné lhůty, nechť dle kteréhokoli spůsobu určené, vždy rovnati.

Zároveň podává rovnice (2) vzájemnost a souvislost obou method.

Jediný pohled na rovnici (2) poučuje nás, kterak průměrnou lhůtu máme dle lhůtového počtu ustanoviti; za základ musí se totiž vzíti *nynější* hodnoty jistin a nikoliv jistiny o příslušné úroky zvětšené, v čemž právě se chybuje. Případy mohou býti trojí:

a) Průměrnou lhůtu jistin nesúročitelných lze najíti jedině počtem lhůtovým, neboť při $p = 0$ přechází výraz

$$(\Sigma K - \Sigma k) \frac{100}{p\Sigma k}$$

v neurčitou veličinu $_0/^0$, jejíž pravou hodnotu udává podíl

$$\Sigma kt : \Sigma k$$

na př. má-li kdo 400 zl. za 3 měs., 600 zl. za 6 měs. a 300 zl. za 9 měs. spláceti, mohl by složiti najednou 1300 zl. za

$$\frac{\Sigma kt}{\Sigma k} = \frac{7500}{1300} = 5^{10}/_{13} \doteq 5\cdot\dot{7}6923\dot{0} \text{ měs.}$$

b) Průměrnou lhůtu jistin nynější hodnotou daných a do vypršení lhůt dle libovolného p súročitelných lze dle kteréhokoli způsobu podle rov. (2) udati, jen že celá jistina v průměrné lhůtě splatná, majíc přivtělené úroky, poroste s číslem p, na němž průměrná lhůta je zcela nezávislá a tedy pro kterékoli p táž, na př. má-li kdo $k_0 = 400$ zl. za 3 měs., $k_1 = 600$ zl. za 6 měs. a $k_2 = 300$ zl. za 9 měs. spláceti a do těch dob na $p = 4\%$ úročiti, tedy po uplynutí těch lhůt vlastně spláceti $K_0 = 404$ zl., $K_1 = 612$ zl, $K_2 = 309$ zl., bude opět průměrná lhůta dle rov. 2) jako dříve $5^{10}/_{13}$ měs., avšak v průměrné lhůtě zapraví se 1325 zl.; při větším p více.

c) Průměrnou lhůtu jistin udaných hodnotou po uplynutí lhůt platebných lze opět dle kteréhokoliv způsobu podle rov. (2) počítati, když jsme dříve diskontováním dle daného p ustanovili jejich nynější hodnoty. Patrno, že v tomto nejčastěji přicházejícím případě součet jistin v průměrné lhůtě splatný bude pro kteroukoliv hodnotu p týž, avšak průměrná lhůta pokaždé jiná, při větším p menší, při menším p větší; na př. má-li kdo $K_0 = 400$ zl. za 3 měs., $K_1 = 600$ zl. za 6 měs., $K_2 = 300$ zl. za 9 měs. spláceti na místo jejich nynějších hodnot, které při 4% diskontu budou $k_0 = 396\cdot039$ zl., $k_1 = 588\cdot2353$ zl., $k_2 = 291\cdot2621$, vyhledá se průměrná lhůta dle (2) $= 5\cdot75357$ měs.

Při 5% byla by průměrná lhůta téhož součtu jistin (1300 zl.) jen $5\cdot74975$ měs.

Přiměřeným upravením rovnice (2) lze ukázati, že průměrná lhůta súročitelných jistin, jsouc vedle jiných i úkonem měnné p, velikostí této se mění a v jistých nepřekročitelných mezích se nalezá. Její největší hodnota (maximum) nastoupí při $p = 0$, kde průměrná lhůta rovná se podílu

$$\frac{\Sigma kt}{\Sigma k} \text{ aneb } \frac{\Sigma Kt}{\Sigma K}$$

Nejmenší hodnoty (minimum) dosáhla by průměrná lhůta, kdyby za p volilo se číslo nekonečně veliké a ustanovila by se pro $p = \infty$ vzorkem

$$\frac{\Sigma K}{\Sigma(K:t)}$$

V uvedených svrchu příkladech jest $5^{10}/_{13}$ měs. největší a $4^{7}/_{8}$ nejmenší průměrná lhůta.

Že oba spůsoby počítání průměrné lhůty podstatou i tenkrát se neliší, když jednotlivé jistiny dle rozličných hodnot p jsou súročitelné anebo když místo jednoduchého volí se složené úrokování, netřeba tuším připomínati, rovněž i to, že v těchto případech jinou musíme obdržeti průměrnou lhůtu, nežli v svrchu uvedených. Případy jsou tu mnohem rozmanitější a neméně zajímavé; vytknutí souvislosti výsledků nepodléhá však rovněž žádným obtížím.

Jaké jest geometrické místo průseků tečen jedné kůželosečky s polarami bodů dotyčných vzhledem ke kůželosečce druhé?

(Píše *K. Zahradník.*)

Rovnice jedné kůželosečky budiž

$$a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2+2d_1x+2e_1y+f_1=0 \tag{1}$$

kterouž i ve tvaru

$$(a_1x+b_1y+d_1)x+(b_1x+c_1y+e_1)y+d_1x+e_1y+f_1=0 \tag{2}$$

aneb krátce $K_1=0$ psáti můžeme.

Na této kůželosečce volme bod libovolný $m(\xi,\eta)$; i bude rovnice tečny v tomto bodě

$$(a_1x+b_1y+d_1)\xi+(b_1x+c_1y+e_1)\eta+(d_1x+e_1y+f_1)=0 \tag{3}$$

a rovnice polary bodu m vzhledem kuželosečce druhé, jejíž $K_2=0$, bude

$$(a_2x+b_2y+d_2)\xi+(b_2x+c_2y+e_2)\eta+d_2x+e_2y+f_2=0. \tag{4}$$

Jelikož pak bod m na kuželosečce $K_1=0$ leží, platí o něm

$$(a_1\xi+b_1\eta+d_1)\xi+(b_1\xi+c_1\eta+e_1)\eta+d_1\xi+e_1\eta+f_1=0 \tag{5}$$

Vyloučíme-li z rovnic (3), (4) a (5) veličiny ξ, η, obdržíme relaci mezi x, y, průsekem to tečny a polary, neodvislou na jednotlivé poloze bodu m, hledanou to rovnici místa geometrického.

Za tím účelem zaveďme místo

$$a_1x+b_1y+d_1=A_1\,,\; b_1x+c_1y+e_1=B_1\,,\; d_1x+e_1y+f_1=C_1$$
$$a_2x+b_2y+d_2=A_2\,,\; b_2x+c_2y+e_2=B_2\,,\; d_2x+e_2y+f_2=C_2$$

Z rovnic (2) a (3) plyne

$$\xi=(B_1C_2)=(A_1B_2)$$
$$\eta=(C_1A_2)=(A_2B_2)$$

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnice (4), obdržíme po krátké redukci

$$a_1\,(B_1C_2)^2+2b_1\,(B_1B_2)(C_1A_2)+c_1\,(C_1A_2)^2+$$
$$2d_1\,(B_1C_2)(A_1B_2)+2e_1\,(C_1A_2)(A_1B_2)+f_1\,(A_1B_2)^2=0, \quad (6)$$

čímž úloha naše řešena.