Dioptrika se stanoviska vyšší geometrie.

(Podává *Josef Hervert.*)

(Pokračování.)

Chceme-li pomocí methody nové geometrie poznati zvláštní vztahy mezi předmětem a obrazem, když nestejně hutná prostředí rozličnou polohu mají vzhledem k lámavé ploše, třeba jen následný optický zákon na mysl si uvésti. Když paprsky světelné vycházejíce z jistého bodu p jednoho ústředí a vstupujíce do druhého ústředí tak se lámou, že se opět v jednom jeho bodu o sbíhají, nazýváme bod o skutečným (fysickým) obrazem bodu p. Děje-li se však lom tím spůsobem, že paprsky vyslané od svítícího bodu p jednoho ústředí rozbíhají se zlomeny byvše v druhém ústředí tak, že sběžný bod o směrů jejich leží v témž ústředí co p, zove se bod o virtuelným (geometrickým) obrazem bodu p.

Leží-li tudíž prostředí opticky hustší na vnitřní straně kulové plochy, přísluší všem svítícím bodům co předmětům mezi ∞ a f v řidším prostředí ležícím co skutečné obrazy body mezi f' a ∞ v hustším ústředí; kdežto bodům svítícím, kteréž leží v mezeře $\overline{fa}$ přiřaděny jsou co virtuelné obrazy body v řidším prostředí mezi ∞ a a. Jestliže ale svítící bod p se nalézá v hustším ústředí na vnitřní straně kulové plochy a jestliže paprsky světelné vnikajíce na kulové mezi do řidšího ústředí lámou se od kolmice dopadu, nemění se uvedená relace mezi předmětem a obrazem, jak to již povaha prométných souosých řad sebou nese a jak se snadno dá dokázati. Geometrie polohy učí totiž o dvojpoměrech, že, vyměníme-li v symbolu $(capo)$ poslední dvě písmena na vzájem, nabývá dvojpoměr hodnoty obrácené, takže

$$(caop) = \frac{1}{n}$$

a vyjádříme-li větu tuto ve smyslu fysikálním, zní takto: Je-li o svítícím bodem v hustším ústředí, má exponent lomu pro přechod světla do řidšího ústředí hodnotu obrácenou $\frac{1}{n}$.

Je-li však $(caop) = \frac{co}{ao} : \frac{cp}{ap} = \frac{1}{n}$, vyplývá z toho ihned

$$\frac{cp}{ap} : \frac{co}{ao} = (capo) = n,$$

t. j. vztah mezi body p a o se nemění, nechť bod p je bodem svítícím v řidším ústředí a o jeho obrazem aneb o bodem svítícím v hustším ústředí a p jeho obrazem, čili jinými slovy řečeno: paprsky světelné probíhají touž dráhu, když mají směr z řidšího ústředí do hustšího od bodu p k bodu o aneb naopak z hustšího do řidšího od bodu o k bodu p.

Totéž by se i všemi uvedenými konstrukcemi dotvrditi dalo, jak z jednoho příkladu vysvitne. Je-li na př. v obr. 57. bod o obrazem bodu p v řidším ústředí ležícího sestrojen pro exponent $n = {}^3/_2$, pro přechod světla ze vzduchu do skla, shledáme, že týž bod p přináleží co obraz k bodu o, je-li tento svítícím bodem v hustším ústředí. Neboť chceme-li sestrojiti bod p, třeba hledati čtvrtý přiřaděný k bodům c, a, o dle dvojpoměru $\frac{1}{n} = {}^2/_3$. Za tou příčinou veďme bodem o libovolnou přímku P a označme na ní délky $do = 2$, $bo = 3$. Spojíme-li bod d s bodem c, a bod b s a, protnou se přímky $\overline{dc}$, $\overline{ba}$ v bodu t a jestliže bodem t proložíme přímku $P' \parallel P$, vytkne nám tato na ose O bod p přiřaděný co obraz svítícímu bodu o. Neboť považujeme-li bod t opět za persp. střed řad O, P, musí čtveřina:

$$(caop) = (dbo\,\infty) = \frac{do}{bo} : \frac{d\infty}{b\infty} = \frac{do}{bo} : 1 = \frac{do}{bo} = {}^2/_3,$$

t. j. týž bod p přísluší bodu o, nechť jeden neb druhý bod považujeme za svítící a přiřaděný bod za jeho obraz, avšak jen pod tou výminkou, že paprsky světelné přecházejí jednou z řidšího ústředí do hustšího a podruhé, že opačnou cestu vykonávají z prostředí hustšího do řidšího.

Tím ovšem není věta tato ve sporu s onou, kterouž jsme byli vytkli uvažujíce řadu předmětovou a obrazovou co dvé promětných, souosých řad a kdežto jsme pravili, že každému bodu k přiřaděny jsou vždy dva od sebe rozdílné body, jestliže k buď za předmět aneb za obraz pojímáme. Tam jsme totiž předpokládali, že dvojpoměr n je pro obě řady veskrze stálou veličinou, t. j. že paprsky světelné mají stále týž směr, na př. z ústředí řidšího do hustšího.

Na základě toho můžeme zcela snadno stanoviti obraz svítícího bodu, jestliže tento leží v hustším ústředí na vnitřní straně kulové plochy. Všem totiž svítícím bodům na poloměru $\overline{ac}$ ležícím přisluší virtuelné obrazy v též mezeře; obrazy příslušící svítícím bodům mezi c, f jsou taktéž virtuelné a sahají od c do ∞ a konečně k obrazům svítícím mezi f' a ∞ náleží skutečné obrazy v ústředí řidším v mezeře ∞f. I patrno tudíž, že při této poloze prostředí ohniska f a f' jsou body skutečné, t. j. paprsky světelné se v nich skutečně sbíhají.

Pomocí ohnisek f a f' lze ku každému světelnému bodu a paprsku, nechť se nachází v řidším aneb hustším ústředí, velmi snadno přiřaděný element sestrojiti a též o tom se přesvědčiti, že světlo v jednom i druhém směru touž dráhu vykonává. Jestliže si na př. pro $n = {}^9/_5$ pro přechod světla ze vzduchu do safíru, body f a f' určíme, můžeme k svítícímu bodu p v řidším ústředí pomocí přiřaděných bodů ∞, f' sestrojiti známým spůsobem obraz jeho o. Pojímáme-li však o co svítící bod v hustším ústředí a hledáme-li obraz k němu příslušný pro exponent lomu $\frac{1}{n} = \frac{5}{9}$, najdeme týž bod p v řidším ústředí a sice touto dvojí cestou: Buď volíme na $\overline{ma}$ jakýkoli bod t a proložíme jím a bodem o paprsek, který prostupuje $\overline{mf'}$ v bodu l a spojíme-li l s e přímkou P, vytkne nám tato na $\overline{m\infty}$ bod k a vedeme-li z tohoto přímku bodem t, seče nám tato osu O v hledaném bodu p (obr. 58.). Neboť jest:

$$(caf'\infty) = \frac{cf'}{af'} = \frac{5}{9} = \frac{1}{n} = (cgkl).$$

Avšak $(cgkl) = (caop)$ a tudíž i $(caop) = \frac{1}{n}$.

Jiný spůsob jest tento: Proloží se libovolným bodem t na přímce $\overline{ma}$ co vrcholem svazku a bodem o přímka P', která protíná paprsek $\overline{\infty m}$ v bodu k' a spojíme-li tento průsečík s bodem e přímkou $k'c$, prostupuje tato paprsek $\overline{mf}$ v témž bodě l, v kterém jej spojivá přímka $\overline{tp}$ seče, takže spojíme-li bod t s bodem l přímkou a prodloužíme-li ji až k ose, obdržíme týž bod p. Neboť kdyby $\overline{tp}$ protínala osu v jiném bodu, na př. p', muselo by

$$(caop') = \frac{1}{n}$$

jelikož $(ca\infty f) = \frac{af}{cf} = \frac{5}{9} = \frac{1}{n} = (cg'k'l')$ a

$$(cg'k'l') = (caop').$$

Avšak svrchu jsme předpokládali, že $(capo) = n$ čili $(caop) = \frac{1}{n}$ a tudíž musí $(caop') = (caop)$, t. j. bod p' je totožný s bodem p.

Konstrukce tyto jsou ještě jednoduššími, promění-li se svazek paprskový o vrcholi m v osnovu rovnou s úběžným bodem co vrcholem. Jestliže na př. paprsky ty jsou k ose kolmy, lze k paprsku M z ústředí řidšího do hustšího vstupujícímu následovně sestrojiti příslušný zlomený paprsek M'. Prodloužíme-li M, až protíná paprsek A v bodu t a vedeme-li z c rovnoběžku k M, jelikož tu průsečík k v nesmírnosti leží, seče tato F' v bodu l' a spojíme-li t s l', obdržíme zlomený paprsek M'. Je-li však M' dopadající paprsek, který se z hustšího do řidšího ústředí láme, obdržíme zlomený paprsek M, jestliže průsečík l' paprsků $M'F'$ spojíme s c a vedeme $M \parallel \overline{cl'}$ z bodu t (obr. 59.).

Týž paprsek M obdržíme však též, když z bodu c vedeme přímku $\parallel kM'$, až protne F v bodu l a spojíme bod t s l. Neboť jelikož $fa = cf' = ls$ je $\triangle lsn \backsim \triangle cf'm$ a tudíž: $sn = f'm$ a protož i $ts = l'f'$.

Z té příčiny je i $\triangle lts \backsim \triangle cl'f'$ a tedy konečně $tl \parallel cl'$ čili obrazec $cltl'$ rovnoběžník.

Z obr. 59. dá se obecná forma zákonu lomu velmi snadno takto odvoditi. Nazveme-li $ct = u$, $cl' = v$, má se v $\triangle ctl'$

$$ct : cl' = \sin vM' : \sin uM' \text{ aneb}$$

$$\frac{ct}{cl'} = \frac{\sin(Mu + uM')}{\sin uM'} = \frac{\sin Mu}{\sin uM'} \cos uM' + \cos Mu.$$

Jestliže však M s osou velmi malý úhel svírá, můžeme klásti: $ct = ca = r$ $cl' = cf' = \varphi' - r = \frac{r}{n-1}$

a jestliže úhly v témž směru určujeme, bude v tomto případě:

$$\cos uM' = 1 \quad \cos Mu = -1, \text{ a tudíž}$$

$$\frac{ct}{cl'} = n - 1 = \frac{\sin Mu}{\sin uM'} - 1 \text{ aneb}$$

$$\frac{\sin Mu}{\sin uM'} = n.$$

Rovněž tak snadno můžeme vyzkoumati zvláštní vztahy mezi předmětem a obrazem, obrácí-li kulová plocha vydutou stranu k řidšímu ústředí a k hustšímu vypuklou.

Jestliže paprsky světelné vycházejíce od svítícího bodu v hustším ústředí vstupují do řidšího, lámou se od kolmice dopadu a zákon lomu dá se opět týmž spůsobem vyjádřiti, jako v dřívějším případu. Je-li totiž bod p předmětem, o obrazem, obdržíme pro oba tuto relaci:

$$(capo) = \frac{1}{n}.$$

Považujeme-li tento dvojpoměr za stálý a hledáme-li, jak se zvláštní polohou předmětu se mění poloha obrazu, obdržíme opět na ose dvě souběžné a soumístné řady bodové co řadu předmětovou a obrazovou, pro něž platí zákon již dříve vytknutý, že každému bodu k přiřaděny jsou vždy dva od sebe rozdílné body, ač-li k jednou za předmět, podruhé za obraz pojímáme. Avšak řady ty liší se od předešlých tím, že centrálné body č. ohniska obrácenou polohu mají, tak že se nachází f' v hustším ústředí před kulovou plochou a f v řidším ústředí, jakž se o tom snadno lze přesvědčiti. Neboť máme:

$$(ca\infty f') = \frac{c\infty}{a\infty} : \frac{cf'}{af'} = \frac{1}{n}, \text{ aneb:}$$

$$\frac{cf'}{af'} = n, \text{ z čehož jde: } \varphi' = \frac{r}{n-1} \text{ a podobně}$$

$$(cfa\infty) = \frac{cf}{af} = \frac{1}{n}, \text{ z čehož vyplývá } \varphi = \frac{nr}{n-1}$$

a protož je v tomto případě $\varphi' + r = \varphi$ a $\varphi = n\varphi'$, t. j. leží-li svítící bod v nesmírné vzdálenosti v hustším ústředí, je obraz jeho f' v témž ústředí před kulovou plochou a stává-li se bod o svítícím bodem úběžným v řidším ústředí, leží opět f jemu přiřaděný v témž ústředí. Z toho jde, že body f a f' jsou v tomto případě body virtuelné. Jaké jsou a kde leží obrazy přiřaděné svítícím bodům v rozličných polohách jejich na ose, můžeme nyní snadno udati. Všem totiž svítícím bodům v hustším ústředí v mezeře od ∞ do a přísluší co obrazy body mezi f', a, tedy virtuelné.

Jestliže však svítící bod leží na vnitřní straně kulové plochy, tudíž v řidším ústředí a jestliže paprsky světelné od něho vycházejíce v hustším ústředí se lámou, má opět exponent lomu obrácenou hodnotu, takže, je-li o bod svítící a p jeho obraz, třeba opět psáti: $(caop) = n$ a z toho opět plyne:

$$(capo) = \frac{1}{n},$$

t. j. značí-li jednou p svítící bod v hustším ústředí a o jeho obraz, podruhé o svítící bod v řidším ústředí a p jeho obraz, vyjadřuje týž symbol vztah mezi svítícím bodem a přiřaděným k němu obrazem. Podle toho můžeme snadno stanoviti polohu obrazu, leží-li svítící bod v řidším ústředí. Všem totiž svítícím bodům mezi a, c přísluší virtuelné obrazy v též mezeře, kdežto svítícím bodům mezi c a ∞ přiřaděny jsou virtuelné obrazy mezi c a f. Totéž by se i svrchu uvedenými konstrukcemi dokázati dalo.

Až potud uvažovali jsme toliko body na ose kulové plochy ležící. Avšak zákon lomu nechá se pomocí methody vyšší geometrie rozšířiti i na body mimo osu ležící a tudíž i na předměty v prostoru tělesně rozsáhlé, ač-li body ty tak blízko osy leží aneb v takové vzdálenosti od kulové plochy se nacházejí, že paprsky od nich vysílané a středem kulové plochy pronikající velmi malé úhly s osou svírají.

Je-li totiž m takový bod mimo osu ležící (obr. 60.), který řečené podmínce vyhovuje, bude i pro paprsky z něho vycházející a do druhého ústředí vstupující platiti zákon lomu svrchu odvozený, jelikož se okolností touto nezmění podmínky tam uvedené. Budou se tudíž paprsky, kteréž velmi malé úhly s osou svírají, zlomeny byvše zase v jednom bodu m' sbíhati (homocentrické), jehož poloha určena jest zákonem, že m a m' co dva přiřaděné body rozdělují anharmonicky poloměr kulové plochy dle stálého dvojpoměru n, tak že $(camm') = n$ a kdybychom i tu pro všechny možné polohy na paprsku centrálném přiřaděné body co obrazy hledali, viděli bychom, že i tu lze centrálný paprsek považovati co dvé souosých a souběžných řad bodových, řady předmětové a obrazové. Totéž platí i o bodech k, l a jich příslušných paprscích centrálných, na nichžto leží přiřaděné jim body k', l' rozdělujíce s oněmi rovněž tak anharmonicky poloměr kulové plochy.

Poněvadž ale každé dvé přiřaděných bodů jednoho ústředí určuje jistý směr, patrno, že i směry dvěma páry vzájemných bodů stanovené sdruženy jsou dle stálého dvojpoměru n, na př. $\overline{kl}$, $\overline{k'l'}$ čili že tvoří dvé promětných řad a poněvadž každé dvé sdružených bodů leží na paprsku centrálném, jsou $\overline{kl}$, $\overline{k'l'}$ v poloze persp. vůči bodu c co jich persp. středu. Totéž lze říci i o řadách bodových na $\overline{lm}$, $\overline{l'm'}$ a $\overline{km}$, $\overline{k'm'}$ ležících. Avšak přímky $\overline{kl}$, $\overline{km}$ můžeme též pojímati jakožto paprsky ze svítícího bodu k jednoho ústředí vycházející a přiřaděné jim paprsky $\overline{k'l'}$, $\overline{k'm'}$ považovati za zlomené, kteréž se v jednom bodu k' druhého ústředí sbíhají. Z toho jde, že každé dvé přiřaděných paprsků týmž bodem kulové plochy procházeti musí a jestli si v bodu a sestrojíme tečnu T, bude tato pro všechny paprsky, ač-li vyhovují podmínce, kteráž všem dedukcím této úvahy za základ položena jest, že totiž velmi malé úhly s osou svírají, splývati s obloukem MN a protož můžeme říci, že každá družina paprsků se v témž bodu tečny T protíná. Tomu-li tak, lze každý pár sdružených bodů k, k'; l, l'; m, m' pojímati za vrcholy svazků paprskových, kteréž, poněvadž paprsky středem procházející čili centrálné společné mají, i v poloze persp. jsou a sice vůči tečně T co jich persp. ose. Avšak podle naučení geometrie polohy nazýváme takové souhrny bodů a paprsků, kteréžto uvedeným zákonům vyhovují a sice jest-li prozatím vše na rovinu vztahujeme, kollinearné soustavy rovné čili homologické útvary druhořadé v poloze perspektivické. Bod c co vrchol svazku paprskového oběma soustavám společného zove se středem a tečna T co řada bodová oběma soustavám společná osou homologie čili kollineace. Paprsky, kteréžto probíhají středem c, zovou se homologickými a dvojpoměr n slove tu modulem aneb činitelem kollineace. Všeobecněji lze tedy zákon lomu po spůsobu nové geometrie takto vysloviti:

„Předmět a obraz jsou dva homologické útvary dvou kollinearných soustav, kteréž mají polohu perspektivickou vzhle-

dem k středu c kulové plochy a vůči tečně T jakožto ose kollineace, jejíž modul stanoven jest exponentem lomu n.“

V obr. 60. je obrazec klm předmět v ústředí řidším a $k'l'm'$ přiřaděný mu obraz v ústředí hustším a sice jest konstrukce ta provedena pro exponent lomu $n = {}^8/_5$ pro přechod světla ze vzduchu do topasu. Jestliže si ohniskem f ležícím před kulovou plochou ze vzdálenosti $\varphi = {}^5/_3 r$ vedeme přímku $F \parallel T$, budou bodům na ní blízko osy ležícím přiřaděny úběžné body v druhém ústředí a paprskům, kteréž body těmi procházejíce velmi malé úhly s osou svírají a na kulovou plochu dopadají, přislušeti budou paprsky zlomené s osou rovnoběžné.

Poněvadž ale nová geometrie předpokládá, že všechny úběžné body jisté roviny v téže přímce leží, kteroužto úběžnou zove, patrno, že útvar F co měřické místo příslušných úběžníků homologickým je oné úběžné přímce, pročež se zove centrálnou osou aneb úběžnicí soustavy obrazové a z téže příčiny přímka F' proložená ohniskem $f' \parallel$ s T centrálnou osou řady předmětové, ač-li stále týž exponent lomu n co modul kollineace na zřeteli máme a sice leží F před kulovou plochou, jestliže řidší prostředí vně kulové plochy se nachází; jestliže však obě ústředí obrácenou polohu mají, jest F' před kulovou plochou. Jiné druhy kollineace, totiž ty, kde úběžnice mezi středem a osou homologie leží, u lomu možny nejsou, poněvadž modul kollineace n vždy jest veličina kladná.

Z toho jde, že vše, co geometrie polohy o takových kollinearných soustavách v poloze persp. učí, i zde platnost má, ač-li jen body a paprsky blízko osy na zřeteli máme. Sem hledí zejmena tyto věty: Mimo střed homologie a jednotlivé body osy, kteréž co body oběma soustavám společné samy sobě přisluší, přináleží ku každému bodu k co svítícímu zcela určitý bod k' co jeho obraz; jestliže však k za obraz pojímáme, přiřaděn jest mu co předmět bod od k' docela rozdílný; což podobně i o paprscích platí, jestliže tyto stále týž směr mají na př. z řidšího prostředí do hustšího pro exponent lomu n. Jestliže však uvažujeme jednou přechod světla z řidšího ústředí do hustšího pro exponent n a po druhé obrácený postup z hustšího do řidšího pro exponent $\frac{1}{n}$, je vždy bodu p týž bod o

přiřaděn, nechť bod p považujeme za svítící v řidším ústředí a o za obraz, aneb o za svítící bod v hustším ústředí a p za jeho obraz, což podobně platí i o sdružených paprscích M a N, jelikož světlo touž dráhu vykonává, když z jednoho prostředí do druhého aneb naopak přechází. Probíhá-li v jednom ústředí paprsek určitým bodem, jde přiřaděný paprsek v druhém ústředí sdruženým bodem. Leží-li více bodů v jednom prostředí na přímce, nalezají se příslušné body v druhém ústředí taktéž na přímce a sice jsou obě řady persp. vůči středu c. Stýká-li se více paprsků v jednom prostředí v jednom bodu co vrcholi svazku, sbíhají se přidružené paprsky také v jednom bodu a sice jsou oba svazky persp. vůči tečně T. Jsou-li K, K', L, L' dva páry vzájemně přiřaděných paprsků, jsou průseky $\overline{KL}$, $\overline{K'L'}$ sdružené body. Jsou-li k, k'; l, l' dvě družiny vzájemných bodů, jsou přímky spojivé $\overline{kl}$, $\overline{k'l'}$ dva sdružené paprsky. Paprskům, které se v jednom bodu centrálné osy sbíhají, přiřaděny jsou paprsky s osou rovnoběžné.

Kollinearný vztah dvou persp. soustav je zúplna určen a tudíž i úkon lámavé plochy na rozhraní dvou rozličně hutných prostředí stanoven, udáme-li dva páry sdružených prvořadých útvarů: totiž buď v jedné soustavě dva svazky P, Q a v druhé přiřaděné svazky P', Q' aneb, což jedno jest, body p, q; p'; q' co vrcholy svazků 2. jsou-li dány 2 páry sdružených řad bodových aneb paprsky A; B, $A'B'$. Jedna toliko družina vzájemných elementů nestačí, aby se pomocí jich k daným elementům sestrojily přiřaděné, jakž se snadno dá dokázati.

Jsou-li dány sdružené paprsky M, M' (obr. 61.), aniž by však známy byly body c, a a exponent lomu n, lze nalézti všechny přiřaděné paprsky, kteréžto procházejí průseky paprsků M, M' s osou totiž body p a o.

Třeba pouze průsečíkem μ paprsků M, M' sestrojiti kolmou na osu O. Tato jest osou homologie A. I musí tudíž paprsek N' přiřaděný k N procházeti bodem ν, průsekem paprsku N s osou homologie A a bodem o, což tolikéž o všech paprscích platí, které náleží k vrcholům p a o. Dvěma přiřaděnými paprsky jest tudíž toliko dvé přiřadených bodů stanoveno, jich průseky totiž s osou, avšak nesčíslné množství paprsků, totiž persp. svazky v oněch průsečících.

Známe-li v rovině osou procházející dva přiřaděné body a, a' (obr. 62), můžeme pomocí jich nalézti všechny přiřaděné body, kteréžto leží na přímkách B, B' body danými a, a' kolmo k ose proložených. Třeba pouze a, a' spojiti přímkou, kterážto seče osu v bodu c, středu kollineace a protož musí bod b' přiřaděný k bodu b ležeti v průseku homologického paprsku $\overline{bc}$ a paprsku B'. Z toho vysvítá, že družinou bodů a, a' pouze dva paprsky stanoveny jsou, totiž ty, ježto danými body procházejíce na ose kolmo stojí, jelikož se v úběžném bodu osy homologie stýkají, avšak nesčíslné množství bodů, kteréžto leží na oněch paprscích co persp. řadách bodových.

Ovšem ale lze ustanoviti všechny přiřaděné elementy obou ústředí ležící v určité rovině osou procházející, dány-li jsou dva páry vzájemných paprsků M, M'; N, N' v též rovině protínajících osu v sdružených bodech p, o; p' o'. Máme-li na př. (ob. 63.) k danému bodu m sestrojiti přiřaděný element m', považujme body p, p' za vrcholy svazků a proložme jimi a bodem m paprsky K, L. Tyto protínají osu homologie A stanovenou průseky paprsků M, M'; N, N' v bodech k a λ a jestliže tyto spojíme s body o, o' co vrcholy svazků paprskových v druhém ústředí přímkami K', L', stanoví nám, jak patrno, jich průsečík hledaný bod m' a takovým spůsobem se ku každému bodu přiřaděný element sestrojiti nechá.

Rovněž tak snadno dá se k libovolnému paprsku R přiřaděný R' nalézti. Třeba tu toliko vytknouti na R dva libovolné body r, s a hledati k nim přidružené body r', s', jimiž R' procházeti musí a sice pomocí bodů p, p'; o, o' co vrcholů persp. svazků paprskových; což podobně o každém dvé přiřaděných paprsků platí. Toto sestrojování přiřaděných elementů lze i tehdáž provésti, když jedna družina paprsků původně daných na př. N, N' kolmo k ose stojí, jelikož druhé dva k stanovení osy homologie dostačují; z čehož na jevo jde, že dvěma páry sdružených paprsků všechny elementy obou ústředí stanoviti se dají.

Taktéž můžeme sestrojovati přiřaděné body a paprsky pomocí dvou párů sdružených bodů a, a'; b, b' (obr. 64.). Spojíme-li totiž body, musí přímky spojující přiřaděné body procházeti týmž bodem osy, t. j. středem homologie e a sestrojíme-li danými body k ose kolmice A, A'; B, B', jsou tyto vzájemné paprsky prostupující osu homologie v úběžném bodu. K danému paprsku M sestrojí se přiřaděný paprsek M' takto: Spojíme-li body α, β, v nichž paprsek M kolmice A, B seče, se středem c, určují nám tyto přímky spojivé na paprscích A', B' dva body α', β', jimiž hledaný paprsek M' procházeti musí. Je-li dána úloha, aby se na základě toho k určitému bodu r sestrojil přiřaděný bod r', třeba pouze proložiti bodem r dva libovolné paprsky R, S a hledati k nim řečeným právě způsobem sdružené elementy R', S', jichžto průsek jest hledaný bod r'. Tato konstrukce jest i tu možná, kdy dva z bodů původně daných na př. a, a' leží na ose, jelikož druhé dva k stanovení středu c dostačují.

Avšak i když známe dva nestejnorodé prvořadé útvary na př. dva paprsky M, M' přiřaděné jakožto dopadající a zlomený, a dva body b, b' sdružené jakožto svítící bod a jeho obraz v téže rovině osou procházející, můžeme pomocí jich všechny přiřaděné elementy obou ústředí sestrojiti, ač-li jen dané paprsky a body vyhovují podmínce homologicko-perspektivickým vztahem obou ústředí stanovené. Neboť průseky paprsků M, M' s osou (obr. 65.), totiž body p, o jsou vrcholy svazků perspektivických vůči ose homologie A a kolmice B, B' body b, b' na osu spuštěné jsou dvě řady bodové persp. vůči středu homologie c. Za tou příčinou musí se paprsky $\overline{pb}$, $\overline{ob'}$ protínati v určitém bodu osy A a přímka spojující průseky (MB), $(M'B')$ procházeti bodem c. Jestliže však ony čtyry elementy vyhovují řečené podmínce, můžeme pomocí jich všechny přiřaděné body a paprsky určiti, ač-li daná družina bodů b, b' neleží na ose lámavé plochy O, jelikož by se pak nedal určiti bod c a ač-li paprsky M, M' nestojí kolmo na O, poněvadž bychom nemohli určiti osu homologie A.

Má-li se k bodu m sestrojiti sdružený bod m', třeba proložiti body m, p paprsek P, jenž prostupuje osu A v určitém bodu π. Spojíme-li tento bod s o paprskem P' a vedeme-li bodem m paprsek homologický, jest průsek obou těch paprsků: P' a $\overline{mc}$ hledaný bod m'. Rovněž tak snadné jest sestrojování přiřaděných paprsků. Budiž na př. dán paprsek N, jenž seče osu A v bodu ν a k němuž se hledá sdružený paprsek N'.

Proložíme-li průsečíkem (NB) paprsek homologický, vytkne nám tento na B' bod n' a spojíme-li průsečíky v, n', obdržíme hledaný paprsek N'.

Ještě snadnějším jest sestrojování přiřaděných elementů, známe-li střed c a osu homologie A, jakož i centrálné osy F, F'. K danému bodu m (obr. 66.) najde se totiž přiřaděný bod m' takto: Paprsku bodem m procházejícímu a s osou O rovnoběžnému přiřaděn jest paprsek jdoucí bodem f' a paprsku, jenž z bodu m vycházeje prostupuje ohniskem f, přísluší co přiřaděný element paprsek s osou O rovnoběžný, jich průsek jest hledaný bod m'. Týž bod obdržíme však též pomocí homologického paprsku bodem m proloženého a pomocí jednoho z obou paprsků strojných, právě uvedených, totiž buď toho, který jest s osou rovnoběžný aneb onoho, jenž prochází ohniskem f, tak že se trojí cestou k danému bodu přiřaděný element sestrojiti dá. Jelikož paprsky, kteréž body m, m' procházejíce kolmo na ose stojí, družinu tvoří, lze pomocí jich sestrojiti přiřaděné elementy i k bodům, které nekonečně blízko osy O leží. Je-li n takový bod, najde se k němu příslušný bod n' takto: Sestrojíme-li v n kolmici na osu, volíme-li na ní jakýkoli bod m a najdeme-li příslušný mu bod m', třeba pouze v m' sestrojiti přímku kolmou k ose O. I bude hledaný bod n' míti na ní takovou polohu, že:

$$\frac{k'n'}{kn} = \frac{k'm'}{km}.$$

K danému paprsku P sestrojí se přiřaděný P' buď tak, že ze středu c vedeme rovnoběžku k M, a spojíme-li bod α', v němž tato prostupuje centrálnou osu F', s bodem π, v němž seče P osu homologie A, aneb tím spůsobem, že bod α, v němž P centrálnou osu F protíná, spojíme s c přímkou, s kteroužto jest hledaný paprsek P' rovnoběžný.

(Pokračování.)