Les points, les plans, et les droites en coordonnées homogènes.

(Notes de *M. Enrico d'Ovidio*, prof. au licée Principe Umberto à Naples.)

I.
Introduction.

1. En 1870 j'ai publié dans le *Giornale di Matematiche* *) une *Note sur les points, les plans, et les droites en coordonnées homogènes*, dans le but de traiter, plus méthodiquement et complètement qu'on ne le fait en général, les formules principales qui servent de base à l'application des coordonnées *trilinéaires* et *quadriplanaires* des points, des coordonnées *triponctuelles* et *quadriponctuelles* des plans, et des coordonnées *Plückèriennes* des droites dans l'espace. — J'avais précédemment publié dans le même *Giornale* **) une *Exposition de la théorie des lignes de second ordre en coordonnées trilinéaires.* — Lorsque je compare mes résultats et le procédé uniforme qui m'y a conduit, avec les resultats et les procédés des auteurs qui jusqu'à présent ont traité le même sujet (p. ex. *Jerrers, Withworth, Frost, Grunert*, etc.), je crois de n'avoir pas failli mon but.

Plus tard, en 1871, dans une note sur les *distances mutuelles de plusieurs points* ***), j'ai donné des formules relatives à deux autres systèmes de coordonnées, que l'on pourrait appeler *tripolaires* et *quadripolaires*; c'est-à-dire celui qui consiste à déterminer un point d'un plan au moyen de ses distances à trois points fixes du même plan, et celui qui consiste à déterminer

*) Vol. VIII, 1870, p. 241, Naples.
**) Vol. VI et VII, 1868—69.
***) Même Journal, vol. IX, 1871, p. 211.

un point dans l'espace au moyen de ses distances à quatre points fixes; distances, dont l'une est fonction des autres.

Enfin, dans le volume en cours du *Giornale* *), dans un court article *Sur quelques formules en coordonnées de droites*, j'ai donné des formules relatives aux angles des droites, dont la position soit déterminée au moyen des coordonnées de *Plücker*.

Or j'ai eu lieu à remarquer, que presque tous les résultats renfermés dans les articles que je viens de citer ne perdent rien de leur simplicité, tout en acquérant une plus grande généralité, si l'on considère des points, droites, et plans qui ne soient pas référés tous au même triangle ou tétraèdre. D'ailleurs dans le développement de cette généralisation se présentent des nouvelles démonstrations de plusieurs théorèmes bien connus et importants, et même quelques théorèmes qui me semblent nouveaux. Ainsi je me flatte que l'on ne trouvera pas tout-à-fait inutile un précis des résultats de mon étude.

2. Je commence par expliquer quelques notations et rappeler quelques propositions élémentaires, dont je fairai un usage fréquent dans la suite. **)

Je désigne par $X_1, X_2, \ldots, X_i, X_k, \ldots, X_\alpha, X_\beta, \ldots$. (ou plus simplement par $1, 2, \ldots, i, k, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$) les *directions positives* de plusieurs droites; ou les *pages positives* de plusieurs plans; ou des points *positifs* d'une sphère (c'est-à-dire des points aux extrèmités des diamètres parcourus en direction positive); ou les *sens positifs* de plusieurs grands cercles d'une même sphère.

$(X_i X_k)$, ou (ik), indiquera l'angle des directions X_i, X_k; ou l'angle des pages X_i, X_k; ou l'arc de grand cercle compris entre les points X_i, X_k d'une sphère; ou l'angle sphèrique des grands cercles X_i, X_k. — Angles et arcs changent de signe lorsqu'on intervertit l'ordre des indices i, k.

$X_i X_k$, ou ik, signifie la *page positive* d'un plan parallèle

---

*) Vol. X, 1872, p. 33.

**) Pour évitér une foule de citations, je renvoye le lecteur à la *Trigonométrie* de m. *Baltzer* (*Leipzig*, 2 édition), et à la *Théorie des Déterminants* du même Auteur.

aux directions X_i, X_k; ou la *direction positive* de la droite commune aux plans X_i, X_k; ou le *sens positif* du grand cercle passant par les points X_i, X_k d'une sphère; ou le *point positif* commun aux grands cercles X_i, X_k. L'ordre des indices i, k est indifférent.

$(X_i X_k, X_m X_n)$, ou (ik, mn) désigne l'angle des pages $X_i X_k$, $X_m X_n$; ou l'angle des directions $X_i X_k$, $X_m X_n$; ou l'angle sphèrique des grands cercles $X_i X_k$, $X_m X_n$; ou l'arc de grand cercle compris entre les points $X_i X_k$, $X_m X_n$.

3. Cela posé, on a les propositions bien connues:

$$(1)\quad \sin(ik)\sin(mn)\cos(ik, mn) = \begin{vmatrix} \cos(im) & \cos(in) \\ \cos(km) & \cos(kn) \end{vmatrix}$$
$$= \cos(im)\cos(kn) - \cos(in)\cos(km),$$

$$(2)\quad \sin(ik)\sin(mn)\cos(ik, mn) + \sin(im)\sin(nk)\cos(im, nk)$$
$$+ \sin(in)\sin(km)\cos(in, km) = 0;$$

et en faisant, pour abréger,

$$\sin(ik)\sin(im)\sin(ik, im) = \sin(ikm),$$

on a aussi

$$(3)\quad \sin(ikm) = \sin(kmi) = \sin(mik)$$
$$= -\sin(imk) = -\sin(kim) = -\sin(mki),$$

$$(4)\quad \sin^2(ikm) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(ik) & \cos(im) \\ \cos(ki) & 1 & \cos(km) \\ \cos(mi) & \cos(mk) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \cos^2(ik) - \cos^2(km) - \cos^2(mi) + 2\cos(ik)\cos(km)\cos(mi),$$

$$(5)\quad \sin(ikm)\sin(pqr) = \begin{vmatrix} \cos(ip) & \cos(iq) & \cos(ir) \\ \cos(kp) & \cos(kq) & \cos(kr) \\ \cos(mp) & \cos(mq) & \cos(mr) \end{vmatrix}.$$

4. Supposons que les côtés d'un polygone plan ou gauche (ou les faces d'un polyèdre) soient mesurés par des nombres positifs ou négatifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et placés sur des droites (des plans) dont les directions (les pages) positives soient désignées par $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ou $1, 2, \ldots, n$. Alors si X_α, ou α, indique la direction (la page) positive d'une droite (d'un plan) quelconque, et qu'on exécute la projection du périmètre (de la surface) sur X_α, on obtient la relation fondamentale

$$(6)\quad \Sigma_r\, a_r \cos(\alpha r) = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

De celle-ci, et des autres qu'on peut en déduire en remplaçant X_α par $n-1$ autres droites (plans) $X_\beta, \ldots, X_\lambda$, on conclut

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \cos(\alpha 1) \cos(\alpha 2) \,.\, \cos(\alpha n) \\ \cos(\beta 1) \cos(\beta 2) \,.\, \cos(\beta n) \\ . \quad . \quad . \\ \cos(\lambda 1) \cos(\lambda 2) \,.\, \cos(\lambda n) \end{vmatrix} = 0.$$

En particulier

$$(8) \qquad \Sigma_r\, a_r \cos(1r) = 0,\ \Sigma_r\, a_r \cos(2r) = 0, \ldots, \Sigma_r\, a_r \cos(nr) = 0,$$

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} 1 \cos(12) \,.\, \cos(1n) \\ \cos(21)\ 1 \,.\, \cos(2n) \\ . \quad . \ . \quad . \\ \cos(n1) \cos(n2) \,.\, 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations (8), multipliées par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et ajoutées, donnent

$$(10) \qquad \Sigma_{rs}\, a_r\, a_s \cos(rs) = 0 \ (r_s = 1, 2, \ldots, n).$$

Et les mêmes équations, multipliées par $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ et ajoutées, donnent

$$(11) \qquad a_i^2 = \Sigma_{rs}\, a_r\, a_s \cos(rs) \ (r_s = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n).$$

5. Lorsque X_1, X_2, X_3 dénotent trois droites parallelès à un même plan, les nombres a_1, a_2, a_3 mesurent les côtés d'un quelconque entre les infinis triangles semblables que l'on peut construire avec des côtés parallèles a X_1, X_2, X_3. Dans ce cas les équations (6), ..., (11) deviennent

$$(6)' \qquad a_1 \cos(\alpha 1) + a_2 \cos(\alpha 2) + a_3 \cos(\alpha 3) = 0,$$

$$(7)' \qquad \begin{vmatrix} \cos(\alpha 1) \cos(\alpha 2) \cos(\alpha 3) \\ \cos(\beta 1) \cos(\beta 2) \cos(\beta 3) \\ \cos(\gamma 1) \cos(\gamma 2) \cos(\gamma 3) \end{vmatrix} = 0,$$

où X_α, X_β, X_γ indiquent trois droites arbitraires dans l'espace

$$(8)' \qquad \begin{aligned} a_1 + a_2 \cos(12) + a_3 \cos(13) &= 0, \\ a_1 \cos(21) + a_2 + a_3 \cos(23) &= 0, \\ a_1 \cos(31) + a_2 \cos(32) + a_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$(9)' \qquad \begin{vmatrix} 1 \cos(12) \cos(13) \\ \cos(21)\ 1 \cos(23) \\ \cos(31) \cos(32)\ 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } \sin(123) = 0,$$

$$(10)' \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1\, a_2 \cos(12) + 2a_2\, a_3 \cos(23) + \\ + 2a_3\, a_1 \cos(31) = 0,$$

$$(11)' \qquad \begin{aligned} a_1^2 &= a_2^2 + a_3^2 + 2a_2\, a_3 \cos(23), \\ a_2^2 &= a_3^2 + a_1^2 + 2a_3\, a_1 \cos(31), \\ a_3^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1\, a_2 \cos(12)\,; \end{aligned}$$

et des (8)′ on tire, à l'aide de la (1),

$$(12) \qquad a_1 : a_2 : a_3 : : \sin(23) : \sin(31) : \sin(12).$$

De celle-ci résulte que les produits $a_1\, a_2 \sin(12)$, $a_2\, a_3 \sin(23)$, $a_3\, a_1 \sin(31)$ sont égaux. On sait, en effet, que si l'on représente par A_1, A_2, A_3 les sommets du triangle opposés aux côtés X_1, X_2, X_3, et par $\triangle$ la surface du triangle prise avec un tel signe que $A_1\, A_2\, A_3$ soit égal a $\triangle$, on aura

$$(13) \qquad \begin{aligned} \triangle = A_1\, A_2\, A_3 = A_2\, A_3\, A_1 = A_3\, A_1\, A_2 &= -A_1\, A_3\, A_2 \\ &= -A_2\, A_1\, A_3 = -A_3\, A_2\, A_1 \\ = a_2\, a_3 \sin(23) = a_3\, a_1 \sin(31) &= a_1\, a_2 \sin(12)\,; \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\pm \triangle = A_i\, A_k\, A_m,$$

selon que ikm désigne une permutation du groupe 123 qui ait un nombre pair ou impair d'inversions; et

$$\pm \triangle = a_i\, a_k \sin(ik),$$

selon que les indices i, k ne présentent pas d'inversions ou en présentent une.

Il est bon de remarquer que les formules précédentes demeurent vraies aussi dans les cas suivants:

1° si X_1, X_2, X_3 sont trois plans parallèles à une même droite, et $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma$ trois plans arbitraires;

2° si X_1, X_2, X_3 sont trois points d'un même grand cercle d'une sphère, et $X_\alpha, X_\beta, Y_\gamma$ trois points arbitraires de cette sphère;

3° si X_1, X_2, X_3 sont trois grands cercles passant par un même point, et X_α, X_β, X_γ trois grands cercles arbitraires de la sphère.

Seulement, dans ces cas il faut substituer à a_1, a_2, a_3 trois nombres proportionnels aux sinus [voir la (12)]

$$\sin(23), \sin(31), \sin(12),$$

ou ces sinus eux mêmes; et à $\triangle$ un nombre proportionnel à

$$\sin(12) \sin(23) \sin(31)$$

ou ce produit lui même.

6. Je suppose maintenant que X_1, X_2, X_3, X_4 désignent quatre droites, dont trois ne soient pas parallelès à un même

plan; de sorte que a_1, a_2, a_3, a_4 mesureront les côtés d'un quelconque entre les infinis quadrilatères gauches semblables que l'on peut construire avec des côtés parallèles a X_1, X_2, X_3, X_4. — On peut aussi supposer que X_1, X_2, X_3, X_4 désignent quatre plans, dont aucuns trois ne soient parallèles à une même droite; et alors a_1, a_2, a_3, a_4 mesurent les aires des faces d'un tétraèdre formé par quatre plans parallèles à X_1, X_2, X_3, X_4.

Dans l'une et dans l'autre hypothèse les équations (6), ..., (11) deviennent,

(6)'' $$\Sigma_r\, a_r \cos(\alpha r) = o \ (r = 1, 2, 3, 4),$$

(7)'' $$\begin{vmatrix} \cos(\alpha 1) & \cos(\alpha 2) & \cos(\alpha 3) & \cos(\alpha 4) \\ \cos(\beta 1) & \cos(\beta 2) & \cos(\beta 3) & \cos(\beta 4) \\ \cos(\gamma 1) & \cos(\gamma 2) & \cos(\gamma 3) & \cos(\gamma 4) \\ \cos(\delta 1) & \cos(\delta 2) & \cos(\delta 3) & \cos(\delta 4) \end{vmatrix} = o,$$

où $X\alpha, X\beta, X\gamma, X\delta$ représentent des droites (plans) arbitraires;

(8)'' $$\Sigma_r\, a_r \cos(1r) = 0,$$
$$\Sigma_r\, a_r \cos(2r) = 0,$$
$$\Sigma_r\, a_r \cos(3r) = 0,$$
$$\Sigma_r\, a_r \cos(4r) = 0,$$

(9)'' $$\begin{vmatrix} 1 & \cos(12) & \cos(13) & \cos(14) \\ \cos(21) & 1 & \cos(23) & \cos(24) \\ \cos(31) & \cos(32) & 1 & \cos(34) \\ \cos(41) & \cos(42) & \cos(43) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(10)'' $$\Sigma_{rs}\, a_r\, a_s \cos(rs) = o \ (r_s = 1, 2, 3, 4),$$

(11)'' $$a_1{}^2 = \Sigma_{rs}\, a_r\, a_s \cos(rs) \ (r_s = 2, 3, 4),$$

. . . .

Des (8)'' on déduit, à l'aide de (5)

(12)' $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : : \sin(234) : \sin(341) : \sin(412) : \sin(123)$.

Remarquons que ces formules demeurent vraies: 1° lorsque X_1, X_2, X_3, X_4 représentent quatre points d'une sphère, dont trois ne tombent pas sur un même grand cercle, et $X\alpha, \ldots$ des points arbitraires de la même sphère; 2°. lorsque X_1, X_2, X_3, X_4 représentent sur une sphère quatre grands cercles dont trois ne se croisent pas au même point, et $X\alpha, \ldots$ des grands cercles arbitraires. Dans ces cas, il faut [voir la (12)'] remplacer a_1, a_2, a_3, a_4 par quatre nombres proportionnels à

$$\sin(234), \sin(341), \sin(412), \sin(123),$$

ou encore par ces sinus eux-mêmes.

7. Désignons enfin par X_1, X_2, X_3, X_4 les pages positives de quatre plans formant un tétraèdre; par a_1, a_2, a_3, a_4 les nombres positifs ou négatifs qui mesurent les faces de ce tétraèdre; par A_1, A_2, A_3, A_4 les sommets, par $\delta_{12}, \ldots, \delta_{34}$ les nombres positifs ou négatifs qui mesurent les arêtes $A_1 A_2$ ou $X_3 X_4, \ldots, A_3 A_4$ ou $X_1 X_2$; et par V le volume pris avec un tel signe que $A_1 A_2 A_3 A_4$ soit égal à V.

On aura, d'après une règle connue,

$$\pm V = A_i A_k A_m A_n$$

selon que *ikmn* est une permutation du groupe 1234, renfermant un nombre pair ou impair d'inversions.

Rappelons encore que l'on a, dans les mêmes hypothèses,

$$\pm 6V = \delta_{ik} \delta_{im} \delta_{in} \sin (A_i A_k, A_i A_m, A_i A_n) \tag{13}$$

$$\mp \frac{3V}{2} = \frac{a_i a_k \sin (ik)}{\delta_{mn}} \text{ ou } \mp \frac{2a_1 a_2 a_3 a_4}{3V} = \frac{a_m a_n \delta_{mn}}{\sin (ik)}, \tag{14}$$

$$\pm \frac{9V^2}{2a_1 a_2 a_3 a_4} = \frac{\sin (kmn)}{a_i}. \tag{15}$$

8. Voici quelques autres théorèmes connus:
Si $A_i, A_k, \ldots.$ indiquent des points arbitraires, dont deux ou plus peuvent coïncider, $\delta_{ik}, \ldots.$ les distances $A_i A_k, \ldots,$ et $(\delta_{ik}, \delta_{mn})$ l'angle des directions *positives* des droites $A_i A_k$, $A_m A_n$, de sorte que $(\delta_{ik}, \delta_{mn}) = (\delta_{ki}, \delta_{mn}) = (\delta_{ik}, \delta_{nm}) = (\delta_{ki}, \delta_{nm})$, on a.

$$2\delta_{ik} \delta_{pq} \cos (\delta_{ik}, \delta_{pq}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \delta_{ip}^2 & \delta_{iq}^2 \\ 1 & \delta_{kp}^2 & \delta_{kq}^2 \end{vmatrix} = \delta_{kp}^2 + \delta_{iq}^2 - \delta_{ip}^2 - \delta_{kq}^2, \tag{16}$$

$$-16\, A_i A_k A_m . A_p A_q A_r \cos (A_i A_k A_m, A_p A_q A_r) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \delta_{ip}^2 & \delta_{iq}^2 & \delta_{ir}^2 \\ 1 & \delta_{kp}^2 & \delta_{kq}^2 & \delta_{kr}^2 \\ 1 & \delta_{mp}^2 & \delta_{mq}^2 & \delta_{mr}^2 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$288 . A_i A_k A_m A_n . A_p A_q A_r A_s = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \delta_{ip}^2 & \delta_{iq}^2 & \delta_{ir}^2 & \delta_{is}^2 \\ 1 & \delta_{kp}^2 & \delta_{kq}^2 & \delta_{kr}^2 & \delta_{ks}^2 \\ 1 & \delta_{mp}^2 & \delta_{mq}^2 & \delta_{mr}^2 & \delta_{ms}^2 \\ 1 & \delta_{np}^2 & \delta_{nq}^2 & \delta_{nr}^2 & \delta_{ns}^2 \end{vmatrix} \tag{18}$$

$(A_i A_k A_m, A_p A_q A_r)$ désigne l'angle des pages positives des plans des triangles $A_i A_k A_m$, $A_p A_q A_r$.

Relations angulaires fondamentales.

9. Deux tétraèdres étant donnés, appelons $A_1, \ldots, A_4$ les sommets du premier tétraèdre; $X_1, \ldots, X_4$ les pages positives des plans des faces; $a_1, \ldots, a_4$ les aires des mêmes faces; $V = A_1 A_2 A_3 A_4$ le volume; $\delta_{12}, \ldots, \delta_{34}$ les distances $A_1 A_2, \ldots, A_3 A_4$. Pour l'autre tétraèdre nous employerons les mêmes lettres, mais nous affecterons les indices 1, 2, 3, 4 d'un accent, et nous poserons $V' = A_1', A_2', A_3', A_4'$.

Cela posé, désignons par $X\alpha$, $X\beta$ deux plans quelconques, par $ikmn$ une permutation du groupe 1234, et par $p'q'r's'$ une permutation du groupe 1'2'3'4'. Si l'on applique aux groupes $(X\beta\, X_i\, X_k\, X_m)$, $(X\alpha\, X_{p'}\, X_{q'}\, X_{r'})$ la formule (7)'' du n° 6, on trouve

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} \cos(\alpha\beta) & \cos(\alpha i) & \cos(\alpha k) & \cos(\alpha m) \\ \cos(\beta p') & \cos(p'i) & \cos(p'k) & \cos(p'm) \\ \cos(\beta q') & \cos(q'i) & \cos(q'k) & \cos(q'm) \\ \cos(\beta r') & \cos(r'i) & \cos(r'k) & \cos(r'm) \end{vmatrix} = 0.$$

Développons, et faisons attention aux formules (1) et (5) nous aurons

$$(20)\qquad \sin(ikm)\sin(p'q'r') =$$
$$= \Sigma \cos(\alpha i)\cos(\beta p')\sin(km)\sin(q'r')\cos(km, q'r'),$$

la somme s'étendant aux trois permutations circulaires ikm, kmi, mki, ainsi qu'aux trois permutations circulaires $p'q'r'$, $q'r'p'$, $r'p'q'$; ce qui donne neuf termes différents.

Éliminons de (20) les quantités $\sin(ikm)$, $\sin(p'q'r')$, $\sin(ik), \ldots$ à l'aide des équations (14) et (15) du n° 7: nous aurons

$$(21)\qquad 9VV'\cos(\alpha\beta) = \Sigma_{ip'}\cos(\alpha i)\cos(\beta p')\, a_i\, a_{p'}\, \delta_{ni}\, \delta_{s'p'}\cos(\delta_{ni}, \delta_{s'p'}),$$

n et s' désignant deux indices arbitraires, mais constants pendant la somme, choisis, le premier parmi 1, 2, 3, 4 et le second parmi 1', 2', 3', 4'; tandis que i et p' passent par toutes les valeurs 1, 2, 3, 4 et 1', 2', 3', 4' réspectivement: cela fournit neuf termes, car $\delta_{nn} = \delta_{s's'} = 0$.

Transformons la dernière formule à l'aide de l'équation (16): nous aurons

$$(21)\qquad 18\, VV'\cos(\alpha\beta) = \Sigma_{ip'}\cos(\alpha i)\cos(\beta p')\, a_i\, a_{p'}\,(\delta_{np'}^2 +$$
$$+ \delta_{is'}^2 - \delta_{ns'}^2 - \delta_{ip'}^2)$$

$$= \Sigma_{p'} \cos(\beta p')\, a_{p'}\, \delta_{np'}^2 \,(\Sigma_i\, a_i \cos(\alpha i)) +$$
$$+ \Sigma_i \cos(\alpha i)\, a_i\, \delta_{is'}^2\, (\Sigma_{p'}\, a_{p'} \cos(\beta p'))$$
$$-\delta_{ns'}^2\, \Sigma_{ip'}\, a_i \cos(\alpha i)\, \Sigma_{p'}\, a_{p'} \cos(\beta p') - \Sigma_{ip'} \cos(\alpha i) \cos(\beta p')\, a_i\, a_{p'}\, \delta_{ip'}^2\,;$$

et puisque [n⁰ 6, 6'')] $\Sigma_i\, a_i \cos(\alpha i) = 0$, $\Sigma_{p'}\, a_{p'} \cos(\beta p') = 0$, par conséquent on obtient cette somme symétrique à seize termes

(22) $$-18\, VV' \cos(\alpha\beta) = \Sigma_{ip'} \cos(\alpha i) \cos(\beta p')\; a_i\, a_{p'}\, \delta_{ip'}^2,$$
$$(i = 1, 2, 3, 4 \text{ et } p' = 1', 2', 3', 4').$$

Les équations (19), . . . (22) donnent, sous quatre formes différentes le cosinus de l'angle de deux plans $X\alpha$, $X\beta$, en fonction des cosinus des angles formés par ces plans réspectivement avec les faces des deux tétraèdres.

Si l'on fait coïncider $X\beta$ avec $X\alpha$, $\cos(\alpha\beta)$ devient l'unité, et les équations précedentes donneront, sous quatre formes différentes la rélation qui a lieu entre les angles formés par un plan arbitraire $X\alpha$ avec les faces des deux tétraèdres. Ainsi l'équation (22) se change en

(23) $$-18\, VV' = \Sigma_{ip'} \cos(\alpha i) \cos(\alpha p')\, a_i\, a_{p'}\, \delta_{ip'}^2.$$

10. Supposons maintenant, pour rentrer dans le cas plus ordinaire, que les deux tĕtraèdres se confondent avec un seul tétraèdre de référence. Nous aurons le cosinus de l'angle de deux plans $X\alpha$, $X\beta$ en fonction des cosinus des angles formés par les plans avec les faces du tétraèdre, sous les quatre formes:

(19)' $$\begin{vmatrix} \cos(\alpha\beta) & \cos(\alpha i) & \cos(\alpha k) & \cos(\alpha m) \\ \cos(\beta p) & \cos(pi) & \cos(pk) & \cos(pm) \\ \cos(\beta q) & \cos(qi) & \cos(qk) & \cos(qm) \\ \cos(\beta r) & \cos(ri) & \cos(rk) & \cos(rm) \end{vmatrix} = 0,$$

(20)' $$\sin(ikm) \sin(pqr) \cos(\alpha\beta) =$$
$$\Sigma \cos(\alpha i) \cos(\beta p) \sin(km) \sin(qr) \cos(km, qr);$$

(21)' $$9\, V^2 \cos(\alpha\beta) = \Sigma_{ip} \cos(\alpha i) \cos(\beta p)\, a_i\, a_p\, \delta_{ni}\, \delta_{sp} \cos(\delta_{ni}, \delta_{sp}),$$

(22)' $$-18\, V^2 \cos(\alpha\beta) = \Sigma_{ip} \cos(\alpha i) \cos(\beta p)\, a_i\, a_p\, \delta_{ip}^2\; (i_p = 1,2,3,4).$$

Dans la première ikm, pqr sont deux arrangements ternaires (identiques ou différents) des indices 1, 2, 3, 4.

Dans la deuxième la somme s'étend aux permutations circulaires des deux arrengements ikm, pqr; ce qui donne neuf termes.

Dans la troisième n et s désignent deux indices arbitraires, mais constants pendant la somme, choisis parmi 1, 2, 3, 4, et pouvant même être identiques; tandis que $i_p = 1, 2, 3, 4$; ce qui fournit neuf termes, car $\delta_{nn} = \delta_{ss} = 0$.

La quatrième somme se compose de douze termes.

Lorsque on fait coïncider les deux plans $X\alpha$, $X\beta$, on obtient, sous quatre formes différentes, la relation entre les angles formés par un plan arbitraire $X\alpha$ avec les faces d'un tétraèdre de référence: p. e. la relation (22)' devient

(23)' $-18\, V^2 = \Sigma_{ip} \cos(\alpha i) \cos(\alpha p)\, a_i\, a_p\, \delta_{ip}{}^2 \; (i_p = 1, 2, 3, 4)$:

cette somme se compose de six termes redoublés, car $\delta_{ip}{}^2 = \delta_{pi}{}^2$ et $\delta_{ii}{}^2 = 0$.

Il est évident que toutes les équations précédentes ne sont pas modifiées lorsque par $X_1, \ldots, X_1', \ldots$ on désigne les directions positives de droites perpendiculaires aux faces des deux tétraèdres, et par $X\alpha$, $X\beta$ les directions positives de deux droites arbitraires. Cette remarque va nous être utile bientôt.

11. Les formules (19) et (20), (19)' et (20)' subsistent aussi dans les cas suivants:

1°. lorsque $X_1, \ldots$ sont quatre droites, dont trois quelconques ne sont pas parallèles au même plan, et $X\alpha$, $X\beta$ deux droites arbitraires;

2°. lorsque $X_1, \ldots$ sont quatre points d'une sphère, dont trois quelconques ne tombent pas sur un même grand cercle, et $X\alpha$, $X\beta$ deux points arbitraires de la sphère;

3°. lorsque $X_1, \ldots$ sont quatre grands cercles d'une sphère, dont trois quelconques ne passent pas par le même point, et $X\alpha$, $X\beta$ deux grands cercles arbitraires de la sphère.

Dans les n^{os} 9, 10, 11 j'ai employé en même temps deux tétraèdres de référence, et je ferai le même dans la suite. Je donnerai plus tard quelque exemple des avantages que l'on peut tirer de ce double emploi: ici il suffira de le considérer comme un moyen de faire mieux ressortir la loi de composition des formules.

Résultantes et moments. *)

12. Supposons que sur des droites (des plans), dont nous désignons par $X_0, X_1, \ldots, X_n$ les directions (les pages) positives, existent des longueurs (des aires) mesurées par les nombres positifs ou négatifs $a_0, a_1 \ldots, a_n$. Si la projection de la longueur (de l'aire) (X_0, a_0) sur trois droites données (trois plans donnés), qui ne sont pas parallèles à un même plan (à une même droite), est égale à la somme des projections des autres longueurs (aires) $(X_1, a_1), \ldots, (X_n, a_n)$; alors le même arrivera pour les projections sur toutes les droites (tous les plans) de l'espace, et nous appellerons *résultante* (X_0, a_0) et *composantes* $(X_1, a_1), \ldots, (X_n, a_n)$.

Lorsque les composantes sont données, la longueur de la résultante et sa direction positive (l'aire et la page positive de son plan) est déterminée et unique, mais sa position n'est pas déterminée; car si nous traçons une ligne polygonale, dont les côtés aient des longueurs exprimées par $a_1, \ldots a_n$ et dont les directions positives soient $X_1, \ldots, X_n$ (perpendiculaires aux plans $X_1, \ldots, X_n$) la droite qui va de l'origine de cette ligne à l'extrémité aura une longueur exprimée par a_0, et sa direction positive sera X_0 (la perpendiculaire au plan X_0). Elle ne varie pas lorsque on change l'ordre des côtés.

Si la somme des projections des composantes sur trois droites (trois plans) non parallèles à un plan (à une droite) résulte égale à zéro, la résultante a_0 s'évanouit, et chaque composante, avec le signe opposé, sera la résultante des autres. Alors la ligne polygonale se ferme par elle-même. Ainsi, chaque côté d'un polygone (chaque face d'un polyèdre), avec un signe convenable, est la résultante des autres.

Si l'on appelle X_α une droite (un plan) arbitraire, et si l'on applique les formules du n^0. 4, on a

$$a_0 \cos(\alpha o) = \Sigma_r a_r \cos(\alpha r),$$

$$a_0 = \Sigma_r a_r \cos(or),$$

---

*) Ici je me borne à rappeler des propriétés bien connues. Pour les démonstrations et pour des développements ultérieurs je renvoie le lecteur à la *Stéréometrie* de M. *Baltzer*.

$$a_0 \cos(io) = \Sigma_r a_r \cos(ir) \; (i = 1, \ldots, n),$$
$$a_0{}^2 = \Sigma_{rs} a_r a_s \cos(rs);$$
les sommes s'étendant à $r = 1, \ldots, n$, et la dernière aussi à $s = 1, \ldots, n$.

Supposons que $(X_1, a_1), \ldots$ soient des droites placées dans un même plan (ou des plans quelconques): cherchons la résultante de (X_1, a_1), (X_2, a_2), et faisons passer cette résultante (X_{12}, a_{12}) par le point (la droite) d'intersection de X_1, X_2. Après cela, composons (X_{12}, a_{12}) avec (X_3, a_3), et faisons passer la résultante (X_{123}, a_{123}) par le point (la droite) d'intersection de X_{12}, X_3. Si l'on poursuit de la même manière, on obtiendra la résultante de $(X_1, a_1), \ldots, (X_n, a_n)$ dans une position particulière, indépendente de l'ordre des composantes, mais dépendant bien de la manière dont on a exécuté la composition. Nous distinguerons cette résultante par l'epithète de *ordinaire.*

Alors, si l'on appelle *moment* d'une droite (d'un plan) (X_r, a_r) par rapport à un point, le produit de a_r par la distance entre le point et la droite (le plan) X_r *), on a ce théorème important: *des droites dans un plan (des aires planes dans l'espace) et leur résultante ordinaire étant données, le moment de la résultante ordinaire par rapport à un point arbitraire du plan (de l'espace) est égal à la somme des moments des composantes.*

La résultante d'un système de droites dans un plan (d'un système d'aires planes dans l'espace) est nulle, si la somme des moments des composantes, par rapport à trois points du plan n'étant pas en ligne droite (à quatre points de l'espace ne tombant pas dans un plan), est nulle.

13. Supposons qu'on donne des points $A_1, \ldots, A_n$, affectés réspectivement par des coefficients numériques positifs ou négatifs $a_1, \ldots, a_n$; et supposons que la somme $a_0 = a_1 + \ldots + a_n$

*) Dans le cas d'une droite il faut donner à la distance le signe positif ou négatif (ou *viceversa*) selon que le point est placé à droite ou à gauche d'un spectateur qui marche sur la page positive du plan suivant la direction positive de la droite. Dans le cas d'un plan il faut donner à la distance le signe positif ou négatif, selon que du point on voit la page positive ou négative du plan.

soit différente de zéro. Il y a un point unique A_0, tel que, O étant un point arbitraire dans l'espace, un système de longueurs portées sur les droites $OA_1, \ldots, OA_n$ et proportionnelles aux produits $a_1 OA_1, \ldots, a_n OA_n$ ait une résultante proportionnelle à $a_0 OA_0$ et dirigée suivant OA_0. Ce point (A_0, a_0) sera appelé le point ***résultant*** ou le ***barycentre*** des points $(A_1, a_1), \ldots, (A_n, a_n)$.

Le barycentre (A_0, a_0) de deux points (A_1, a_1), (A_2, a_2) existe sur la droite qui passe par les deux points, et les distances $A_1 A_2$, $A_2 A_0$, $A_0 A_1$ sont proportionnelles aux nombres $-a_0, a_1, a_2$.

On peut obtenir le barycentre de trois points (A_1, a_1), (A_2, a_2), (A_3, a_3) en trouvant d'abord le barycentre des deux premiers, et après celui de ce nouveau point et du troisième. L'ordre de la composition est indifférent. Le barycentre (A_0, a_0) des trois points existe dans le même plan des trois points, et les surfaces des triangles $A_1 A_2 A_3$, $A_0 A_2 A_3$, $A_0 A_3 A_1$, $A_0 A_1 A_2$ sont proportionnelles à a_0, a_1, a_2, a_3.

Le barycentre de quatre points se trouve en cherchant d'abord le barycentre des trois premiers points, et après celui de ce nouveau point et du quatrième. L'ordre est indifférent. Le barycentre (A_0, a_0) des quatre points (A_1, a_1). (A_2, a_2), (A_3, a_3), (A_4, a_4) possède la propriété, que les volumes des tétraèdres $A_1 A_2 A_3 A_4$, $A_0 A_2 A_3 A_4$, $A_0 A_3 A_4 A_1$, $A_0 A_4 A_1 A_2$ $A_0 A_1 A_2 A_3$ sont proportionnels à a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.

Si l'on appelle *moment* d'un point (A_r, a_r) par rapport à un plan (ou à une droite) le produit du coefficient a_r par la distance entre le point et le plan (ou la droite)*), on a ce théorème important: *le moment du point résultant par rapport à un plan arbitraire est égal à la somme des moments des points composants.*

Lorsque les points sont placés dans un plan, le barycentre tombe aussi dans ce plan, et le moment du barycentre par rapport à chaque droite du plan est égal à la somme des moments des points donnés.

*) Le signe de cette distance sera réglé par la convention expliquée dans la note précédente.