Dioptrika se stanoviska vyšší geometrie. *)

(Podává *Josef Hervert.*)

Úzký vztah a veliká analogie, kteréž se vyskytují mezi útvary prostornými methodou nové geometrie zkoumanými a mezi paprsky světelnými v rozličných prostředích se šířícími, činí, že lze theorémy a vymoženosti geometrie polohy přenésti i do oboru fysiky, jakž toho jeden příklad z katoptriky již podán v článku: „Upotřebení nové geometrie na fysiku" (viz I. zpráva jedn. č. math., str. 79.). Zde uvádím jiný takový příklad, z něhož se stane tuším patrno, kterak se dají i zákony lomu pomocí nové geometrie nejen snadněji a názorněji vyvoditi než analytickou methodou, nýbrž i kterak ona nad tuto vyniká úrodností. Obmeziti se chci však toliko na případy obyčejnější, kde rozličná prostředí oddělena jsou jednou neb několika kulovými mezemi a to zase jen soustřednými čili takovými, jichž středy na téže přímce leží.

Budiž v obr. 33. oblouk MN průřez části kulové plochy opsané ze středu c a tvořící rozhraní mezi ústředím opticky hustším na straně vnitřní ležícím a ústředím řidším na straně vnější. Budiž dále p svítící bod, od něhož světelné paprsky vycházejíce na kulovou plochu napadají a do druhého ústředí vnikajíce známým spůsobem se lámou, vyjímaje paprsek pa, kterýž středem c nezlomen prochází, jelikož v a kolmo na MN stojí a protož se hlavním paprskem a směr jeho osou nazývá. Je-li pm jiný paprsek, který s pa velmi malý úhel φ svírá, láme se u m ke kolmici dopadu mc a vycházeje směrem mo protíná osu v bodu o. Chceme-li nalézti tento směr zlomeného paprsku, třeba znáti exponent lomu n pro přechod světla z jednoho ústředí do druhého. I jest pak dle zákona Snelliova:

*) K sestavení tohoto článku použil jsem co pramenů *a)* v popředí přednášek prof. *A. Macha,* kteréž byl o témž předmětu r. 1869 k svým posluchačům měl; *b)* spisu: „Grundlinien der neueren Geometrie mit einem Anhange über die Anwendung der neueren Geom. auf Optik" v. *Christoph Paulus.* Stuttgart 1853; *c)* pojednání: „Fundamentalpunkte eines Systems centrirter brechender Kugelflächen" v. *Ferd. Lippich.* Mittheilungen des naturw. Vereines für Steiermark 1871.

$$\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin(\psi-\chi)}=n$$

a jsou-li, jak jsme předpokládali, úhly velmi malé, lze též psáti:

$$\frac{\varphi+\psi}{\psi-\chi}=n \tag{1}$$

a za touž podmínkou mohou se i úhly φ, ψ, χ vyjádřiti týmž obloukem $am = \sigma$, jelikož ho co velmi malý ke všem vztahovati lze, takže klademe-li $pa = \alpha$, $ac = r$, $ao = \alpha'$

$arc\, am = \sigma = \alpha\varphi = r\psi = \alpha'\chi$ a tudíž: $\varphi = \frac{\sigma}{\alpha}; \psi = \frac{\sigma}{r}; \chi = \frac{\sigma}{\alpha'}$,

což když do rovnice (1) dosadíme, máme:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{r}=n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha'}\right)$$

aneb

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{n}{\alpha'}=\frac{n-1}{r} \tag{2}$$

co jiný výraz téhož zákona, z něhož na první pohled patrno, že paprsky z jednoho bodu vycházející (homocentrické) zlomeny byvše zase v jednom bodu se sbíhají, poněvadž veličina σ z výrazu toho docela vymizela.

Chceme-li methodou vyšší geometrie k dopadajícímu paprsku pm nalézti zlomený paprsek mo, můžeme to následujícím snadným spůsobem. Rovnici (2) lze též takto psáti:

$$\frac{r+\alpha}{\alpha}:\frac{\alpha'-r}{\alpha'}=n \text{ neb } \frac{cp}{ap}:\frac{co}{ao}=n.$$

čili

$$(capo)=n \tag{3}$$

a to jest nejjednodušší výraz zákona lomu v mluvě nové geometrie, který se nechá takto slovy vyjádřiti: Jestli že vycházejí paprsky z bodu p jednoho ústředí a lámajíce se v druhém ústředí sbíhají se v bodu o a nazýváme-li p předmětem o obrazem, můžeme říci: „*Předmět a obraz jsou dvé přiřaděných bodů vůči c,a co bodům základním, jichž stálý dvojpoměr se rovná exponentu lomu n.*“

Totéž dá se jednoduchým spůsobem též takto geometricky dokázati. Sestrojíme-li v bodu m tečnu, která seče osu v bodu t a vedeme-li z p s $\overline{mt} \parallel \overline{pd}$, obdržíme svazek paprskový o vrcholi m, jejž $\overline{po}$ a $\overline{pd}$ co transversály přetínají a protož tvoří jich průseky s paprsky svazku m dvé prométných řad bodových, které, poněvadž bod p oběma řadám společný za vzájemně přidružený pokládati můžeme, i v poloze perspektivické se nacházejí, tak že bod m jich persp. středem jesti. Při tom jest bodu t na ose přiřaděn úběžný bod řady $\overline{pd}$, jelikož $\overline{pd} \parallel \overline{mt}$ a tudíž jest:

$$(d \infty p\, b) = (c\, t\, p\, o)$$

čili $\frac{dp}{\infty p} : \frac{db}{\infty b} = \frac{dp}{db} : \frac{\infty p}{\infty b} = \frac{dp}{db} : 1 = \frac{dp}{db} = \frac{cp}{tp} : \frac{co}{to}$

Jest-li že, jak jsme předpokládali, oblouk $\overline{am}$ velmi malý jest, splývá bod t téměř úplně s bodem a, pročež můžeme psáti

$$\frac{dp}{db} = \frac{cp}{ap} : \frac{co}{ao}.$$

Avšak: $\frac{dp}{db} = \frac{tg\,(\varphi + \psi)}{tg\,(\psi - \chi)} = \frac{sin\,(\varphi + \psi)}{sin\,(\psi - \chi)} = n,$

poněvadž úhly ty velmi malé jsou, a vychází tudíž i tímto spůsobem na jevo, že $(ca\, po) = n$.

Jsou-li tudíž dány 3 body: c, a, p a dvojpoměr n, jest i bod o zcela určitě stanoven a musí tudíž paprsky, které z bodu p vycházejíce velmi malé úhly s osou svírají zlomeny byvše v témž bodu o se stýkati a poněvadž ca jest poloměr oblouku MN, lze zákon lomu též takto vysloviti: *„Svítící bod a jeho obraz rozdělují anharmonicky poloměr kulové plochy, kteráž tvoří rozhraní dvou rozličně hutných ústředí a sice jest anharmonická funkce stanovena exponentem lomu n.“*

Známe-li tento základní vztah mezi předmětem a obrazem' můžeme zcela snadno z toho, co geometrie polohy o promítavých útvarech učí, *a)* poznati, kterak se s každou zvláštní polohou předmětu mění poloha obrazu a naopak; *b)* k danému bodu co předmětu sestrojiti pomocí poloměru kulové plochy a exponentu lomu příslušný bod co obraz a k dopadajícímu paprsku světelnému zlomený paprsek a naopak; *c)* můžeme na témž základě zcela snadno vyzkoumati pravidla, jakými se paprsky světelné řídí, když ústředí rozličné hutnosti zvláštní polohu mají vzhledem k hraničné ploše kulové a z toho právě poznati velikou výhodu a přednost této methody.

Co se především zvláštních poloh předmětu a obrazu týká, můžeme si chtějíce poznati tuto vzájemnou souvislost mysleti, že bod p vyšed z nekonečna na ose ku předu se pohybuje, až zase na druhé straně do nesmírnosti dospěje. I bude mu v každé zvláštní poloze: $p, p', p'' \ldots$ přislušeti zcela určitý bod $o, o', o'' \ldots$ co obraz, daný dvojpoměrem

$$(ca\,po) = (ca\,p'o') = (ca\,p''o'') = \ldots = n.$$

Tím spůsobem obdržíme dvé promětných řad v téže přímce čili tak zvané souosé, soumístné řady a možno tudíž osu pojímati za řadu dvojatou, poněvadž kterýkoli bod její buď jedné, buď druhé řadě přičísti lze, tak sice, že považujeme-li jistý bod k za předmět, přiřaděn jest mu zcela určitý bod k' co obraz; pojímáme-li však k co obraz, načež jej l' značíme, přísluší mu jiný bod l co předmět, který od bodu k' zcela rozdílnou polohu má.

Toto dvojité pojímání bodův osy stane se ještě patrnějším, jestliže si vyznačíme charakteristické body obou řad t. j. body centrálné a dvojné. Nalézá-li se totiž bod p v nesmírnosti, přiřaděn jest mu co obraz určitý bod f', kterýž dán jest dvojpoměrem

$$(ca \infty f') = \frac{c\infty}{a\infty} : \frac{cf'}{af'} = 1 : \frac{cf'}{af'} = n \text{ aneb } \frac{cf'}{af'} = \frac{1}{n},$$

kterýž tudíž pro tento případ přechází v poměr jednoduchý. Stává-li se o bodem úběžným, přidružen mu jest určitý bod f co předmět stanovený dvojpoměrem

$$(ca\,f\,\infty) = \frac{cf}{af} : \frac{c\infty}{a\infty} = \frac{cf}{af} : 1 = n \text{ čili } \frac{cf}{af} = n$$

opět poměr jednoduchý. Body f, f', kteréžto přináležejí úběžným bodům obou řad, zovou se ve vyšší geometrii body centrálné, úběžníky, také body protější a hledíme-li k jich optickému významu, vidíme, že jsou totožny s ohnisky kulové plochy. Důležitosť jejich pro vzájemný vztah obou řad bodových ihned vysvitne, jakmile blíže popatříme k základním bodům a, c a jich významu. Jest-liže dospěje p do bodu a, je příslušný bod co obraz vytknut dvojpoměrem $(c\,a\,a\,o) = n$ čili

$$\frac{ca}{aa} = n\frac{co}{ao} \text{ a poněvadž } aa = o \text{ je } n\frac{co}{ao} = \infty \text{ tudíž } ao = o$$

t. j. v bodu a splývají dva přiřaděné body v jeden.

Bod a jest sám sobě přiřaděn, jest tudíž bod dvojný čili samodružný. Je-li tudíž svítící bod v a, nelámou se paprsky od něho vycházející, jelikož náleží bod a oběma ústředım.

Podobně jest i bod c element samodružný. Doběhne-li totiž bod p do c, je poloha obrazu jeho určena dvojpoměrem:

$$(ca\,co) = n \text{ čili } \frac{cc}{ac} = n\frac{co}{ao}$$

a jelikož $cc = o$ je i $co = o$ t. j. v c splývají opět dva družné body čili bod c přísluší sám sobě, což vyjádřeno jakožto fysikální vlastnost bodu c zní takto: Jest-liže vycházejí ze středu c co svítícího bodu paprsky světelné, nelámou se, poněvadž stojí kolmo na kulové ploše, nýbrž sbíhají se zase ve středu c.

Jsou-li však a, c dvojné elementy obou řad, víme z geometrie polohy, že úběžníky souměrnou polohu mají vůči těmto bodům samodružným, tak že střed vzdálenosti bodů dvojných rozpoluje i vzdálenost bodů centralných a můžeme tuto polohu jejich ještě blíže stanoviti pomocí anharmonické funkce n vzájemnost dvou přiřaděných bodů určující. Poněvadž totiž n v našem případě je veličina positivná, má každé dvé sdružených bodů stejnou polohu vzhledem k základním bodům a, c, tak sice, že leží současně vždy oba buď mimo ac (vnější body) aneb mezi $a\,c$ (vnitřní body). Tomu-li tak, jsou obě řady bodové souběžné a v takových leží dvojné body a, c vždy mezi centralnými f, f', tak že $cf = af'$ aneb píšeme-li:

$$af = \varphi;\ af' = \varphi' \text{ jest: } \varphi' - r = \varphi.$$

Totéž vyvoditi lze i z poměrů určujících polohu ohnisek' neboť zavedeme-li φ a φ' do výrazů:

$$\frac{cf'}{af'} = \frac{1}{n} \text{ a } \frac{cf}{af} = n,$$

obdržíme z prvního:

$$\varphi' = \frac{nr}{n-1}$$

a z druhého $$\varphi = \frac{r}{n-1},$$

z čehož dále vyplývá, že $\varphi' = n\varphi$ a zároveň $\varphi' - r = \varphi$, kteroužto relaci bychom ovšem taktéž z rovnice (2) nalézti mohli, kdybychom položili jednou $\alpha = \infty$ po druhé $\alpha' = \infty$.

Pomocí úběžníků čili ohnisek f, f' můžeme vzájemnou polohu dvou přiřaděných bodů co předmětu a obrazu rovněž tak jednoduše stanoviti, jako pomocí dvojných bodů a, c, poněvadž víme, že součin vzdáleností dvou přiřaděných bodů prométných řad od dotýčných bodův centrálných jest hodnota stálá. Jaká tato hodnota jest, můžeme zcela snadno vyzkoumati, jest-liže do dvojpoměru:

$$(ca\,po) = \frac{cp}{ap} : \frac{co}{ao}$$

zavedeme vzdálenosti přiřaděných bodův od ohnisek f a f' kladouce totiž:

$$cp = r + \varphi + fp;\ ap = \varphi + fp;\ co = \varphi' - r + f'o;$$

$$ao = \varphi' + f'o \text{ a } n = \frac{\varphi'}{\varphi}.$$

Toto učiníce nalezneme, že:

$$\overline{fp} \cdot \overline{f'o} = \varphi\varphi' \text{ t. j.} \tag{4}$$

„Součin vzdáleností dvou přidružených bodů (co obrazu a předmětu) od dotýčných ohnisek rovná se součinu vzdáleností ohnisek samých“ — jiný to výraz zákona lomu. Výraz ten můžeme ještě jinak přetvořiti, počítáme-li vzdálenosti obrazu a předmětu od bodu a kladouce $fp = ap - af = \alpha - \varphi$; a $f'o = ao - af' = \alpha' - \varphi'$. Tu obdržíme: $(\alpha - \varphi)(\alpha' - \varphi') = \varphi\varphi'$, z čehož jde že

$$\frac{\varphi}{\alpha} + \frac{\varphi'}{\alpha'} = 1 \tag{5}$$

jakožto relace mezi vzdálenostmi $\alpha, \alpha', \varphi, \varphi'$.

Chceme-li stopovati konečně celý průběh předmětu a obrazu v oněch souběžných a soumístných řadách, jest to dle uvedených vztahů věcí velmi snadnou. Je-li bod p v nesmírnosti, je přiřaděný obraz v f'; pohybuje-li se p z nekonečna a blíží-li se směrem šípu (obr. 34.) od levé strany ku pravé bodu f, vzdaluje se bod o týmž směrem od f'; neboť ubývá-li délky $\overline{fp}$, musí $\overline{f'o}$ růsti, poněvadž součin obou délek stálý jest, takže dospěje o do ∞ touž dobou, když p do bodu f doběhl. Postupuje-li předmět p přes bod f dále k bodu a, přeskočí obraz o takřka na levou stranu a blíží se z nekonečna stále týmž směrem od levé k pravé k bodu a, tak že leží oba přiřaděné body po levé straně délky $\overline{ca}$ a an bod p proběhne dráhu $\overline{fa}$, dorazí bod o z ∞ do bodu a, v kterém současně s bodem p v dvojbod splývá. Až potud pohybovaly se oba sdružené body mimo délku $\overline{ca}$.

Při dalším pohybu bodu p na dráze $\overline{ac}$, vyskytují se oba body: p i o co body vnitřní mezi $\overline{ac}$ blížíce se současně bodu c, avšak s rychlostí nestejnou, jelikož jeví se opět vzdálenosti jich od bodův f a f' co součinitelé o stálém součinu, tak že teprvé v bodu c v element samodružný se sbíhají. Jde-li konečně p dále přes bod c, vzdaluje se i o od bodu c týmž směrem, tak že leží oba co vnější body po pravé straně základních bodů c, a.

Při tom jest zase rychlost pohybu jejich nestejná, tak že bod o proběhne touž dobou dráhu cf', když bod p z c do ∞ postoupí a padá do f', když p stává se bodem úběžným.

Tento vzájemný pohyb obou sdružených bodů p a o co předmětu a obrazu lze si též pro určitý exponent lomu velmi dobře mechanicky znázorniti pomocí drátěného svazku, který se nejvýhodněji sestrojí, když se ze společného vrchole m (obr. 35.) vede jeden drát bodem a druhý bodem c, třetí rovnoběžně s osou a čtvrtý konečně ohniskem f'. Jest-liže si dále zarazíme v bodech a, c dva hřeby, aby k nim při otáčení svazku dráty $\overline{ma}$ a $\overline{mc}$ stále přiléhaly a jest-liže si body p, o na koncích drátů zvláštním spůsobem vyznačíme, můžeme si onu drátěnou hvězdu ve směru šípu a pak obrácenou ve směru opáčném kolem bodu m otáčejíce vzájemný pohyb předmětu a obrazu velmi jasně znázorniti.

Obzvláštní výhodu poskytuje methoda vyšší geometrie, jedná-li se o to, aby se k danému bodu aneb paprsku sestrojil přidružený element, což tuto několika spůsoby provésti chci. Jsou-li dány základní body a, c a exponent lomu n, lze ku každému bodu co předmětu sestrojiti obraz jeho a naopak pomocí pravidla platícího pro konstrukci čtvrtého přiřaděného bodu ku 3 daným bodům, znám-li jest dvojpoměr jejich, a při tom zároveň přesvědčiti se o dvojitém přiřadění bodů sdružených k určitému danému bodu, čili o tom, že kterémukoli bodu k, vyjímaje body a, c, přísluší vždy dva od sebe rozdílné body, jest-li že k jednou za předmět, po druhé za obraz pokládáme a sdružený k němu element hledáme.

Buďtež v obr. 36. dány body a, c a exponent lomu n ku př. $n = {}^3/_2$ pro přechod světla ze vzduchu do skla. V tom případu je $\varphi = 2r$ $\varphi' = 3r$ a je-li dán jakýsi bod p co předmět ku př. mezi af, víme, že příslušný obraz v tom zvláštním příkladě leží taktéž po levé straně délky $\overline{ca}$. Místo jeho nalezneme snadno tímto spůsobem: Proložme bodem p libovolnou přímku P a vytkněme na ní dle libovolného měřitka týmž směrem od bodu p, tedy buď nahoru neb dolů dvojpoměr n, tak že dp se rovná čitateli $= 3$, a bp jmenovateli $= 2$ exponentu $n = {}^3/_2$. Spojíme-li b s bodem a a bod d s bodem c, budou se přímky: $\overline{ba}, \overline{dc}$ protínati v určitém bodu t, kterýžto pojímáme za vrchol svazku, jehož paprsek P' rovnoběžný s přímkou P protíná osu v hledaném bodu o. Že tomu vskutku tak, dokázati se dá následujícím jednoduchým spůsobem: Spojíme-li bod t s bodem p, máme svazek paprskový o vrcholi t, kterýžto přetínají transversály P,O, mající v bodu p oběma řadám společném dvé na vzájem sdružených bodů. Jsou tudíž P a O dvě promítavé řady bodové v poloze perspektivické a bod t jich persp. střed. Za touž příčinou jsou body ležící na témž paprsku svazku t sobě přidruženy a jich dvojpoměry sobě rovny, takže:

$$(capo) = (d\,b\,p\,\infty),$$

jelikož bod o jest úběžníkem řady P, ana přímka $P' \parallel P$.

Tudíž jest:

$$(capo) = \frac{dp}{bp} : \frac{d\infty}{b\infty} = \frac{dp}{bp} : 1 = \frac{dp}{bp} = {}^3/_2 = n$$

t. j. bod o jest obraz přiřaděný bodu p co předmětu.

Jest-liže však bod p pojímáme co obraz, načež jej o' značíme, shledáme, že bod p' jemu co předmět přiřaděný od bodu o docela rozdílný jest. Chceme-li nalézti tento bod p', proložme opět bodem o' libovolnou přímku a naměřme na ní v témž směru délky $d'p = 3$; $b'p = 2$; spojme však nyní bod b' s c a d' s a a veďme průsekem t' přímek spojných $\overline{b'c}, \overline{d'a}$ přímku $P'' \parallel P$. Tato nám protne osu v hledaném bodu p', kterýž jest co předmět přiřaděn bodu o' co obrazu. Neboť máme tu opět dvě persp. řady o středu t', jichžto dvojpoměry sobě rovny jsou, takže:

$$(cap'o') = (b'd'\,\infty\,o')$$

jelikož bod p' jest úběžníkem řady P a o' bod oběma řadám společný. Jest tudíž:

$$cap'o') = \frac{b'\infty}{d'\infty} : \frac{b'o'}{d'o'} = 1 : \frac{b'o'}{d'o'} = \frac{d'o'}{b'o'} = {}^3/_2 = n$$

čili bod p' přiřaděn bodu o' co obrazu.

Tímto uvedeným spůsobem můžeme pro každý exponent lomu ku kterémukoli bodu sestrojiti přidružený element. Zároveň jest z té konstrukce patrno, že ohnisko f jest centrálným bodem řady obrazové a ohnisko f' úběžníkem řady předmětové. Neboť považujeme-li bod f co předmět a hledáme-li příslušný k němu obraz, stane se to opět tím spůsobem, že proložíme bodem f libovolnou přímku P a na ní v témž směru délky $\overline{df}$, a $\overline{bf}$ určíme dvojpoměrem n, tak že $\frac{df}{bf} = n$. Spojíme-li pak bod d s bodem a, b s c, budou v tomto případě přímky $\overline{ba}$, $\overline{dc}$ rovnoběžky, jelikož:

$$\Delta f ab \sim \Delta f c d. \text{ Neboť:}$$

$$\frac{cf}{af} = \frac{ca + af}{af} = \frac{\varphi'}{\varphi} = n$$

a tudíž:

$$\frac{cf}{af} = \frac{df}{bf}.$$

Tím spůsobem padne persp. střed t do ∞ a přímka kterou tímto bodem proložíme // s P, protíná osu O taktéž v ∞ t. j. bodu f přísluší co obraz úběžný bod osy O co řady obrazové. Podobně můžeme dovoditi, že bodu f' co obrazu přísluší bod úběžný osy O co řady předmětové.

Týmž spůsobem i ku každému danému paprsku co dopadajícímu aneb zlomenému příslušný paprsek sestrojiti lze. Třeba pouze prodloužiti daný paprsek, až protne osu v bodu p resp. o' a kulovou plochu v bodu m (bodu dopadu). Známe pak na ose 3 body a dán-li exponent n, sestrojíme řečenou methodou přidružený bod o resp. p' a pak třeba pouze spojiti bod m s bodem sestrojeným, abychom obdrželi hledaný paprsek $\overline{mo}$ resp. $\overline{mp'}$.

Chci však tuto uvésti ještě jiný spůsob, jakým téhož ještě snadněji dosíci lze; jest-liže se pomocná přímka určitým směrem vede. Budiž (v obr. 37.) dán $\overline{mp}$ paprsek dopadající na kulovou plochu, k němuž nám hledati jest zlomený paprsek $\overline{mo}$. Za tou příčinou proložme m co vrcholem svazku paprsky $\overline{ma}$ a $\overline{mc}$, a veďme bodem p, v němž paprsek dopadající osu protíná, přímku P // $\overline{mc}$, až protne přímku $\overline{ma}$ v bodu a'. Od bodu tohoto naznačme týmž směrem buď nahoru neb dolů dle libovolného měřitka exponent lomu n. Je-li ku př. pro přechod světla ze vzduchu do vody $n = {}^4/_3$ učiníme $\overline{a'd} = 4$, $\overline{a'b} = 3$. Pak spojíme bod b s bodem p a sestrojíme bodem d rovnoběžku s přímkou $\overline{bp}$, až protne P v bodu d'. Spojíme-li m s d', jest $\overline{md'}$ hledaný paprsek přiřaděný co zlomený paprsek dopadajícímu paprsku $\overline{mp}$, což se snadno takto dá dokázati:

Přímka P a osa O tvoří dvě promětné řady v poloze perspektivické. Bod m jest jich persp. střed a protož body na témž paprsku svazku m ležící na vzájem přidruženy jsou. V bodu p oběma řadám společném nalézá se dvé přiřaděných bodů a bod c jest co protější bod přiřaděn úběžnému bodu řady P, jelikož $mc \parallel P$. Z té příčiny jsou dvojpoměry obou řad sobě rovny t. j.

$$(capo) = (\infty\, a'pd') =$$

$$\frac{\infty p}{a'p} : \frac{\infty d'}{a'd'} = \frac{a'd'}{a'p} : \frac{\infty d'}{\infty p} = \frac{a'd'}{a'p} : 1 = \frac{a'd'}{a'p}$$

Avšak jelikož $\overline{dd'} \parallel \overline{bp}$, je $\Delta\, a'pb \sim \Delta\, a'd'd$ a protož:

$$\frac{a'd'}{a'p} = \frac{a'd}{a'b} = {}^4/_3 = n \text{ a tudíž } (capo) = n.$$

Jest-liže však paprsek $\overline{mp}$ považujeme za zlomený, načež jej $\overline{mo'}$ značíme hledajíce příslušný mu dopadající paprsek, můžeme ho ihned nalézti, spojíme-li bod p nyní s bodem d a proložíme-li bodem b rovnoběžku s $\overline{dp}$ až protne přímku P v bodě d''. Spojíme-li tento bod s m, jest $\overline{md''}$ hledaný paprsek, který protíná osu v bodu p'. Neboť máme opět:

$$(cap'o') = (\infty\, a'd''o') = \frac{a'o'}{a'd''}.$$

Avšak jelikož $\Delta\, a'bd'' \sim \Delta\, a'do'$, je:

$$\frac{a'o'}{a'd''} = \frac{a'd}{a'b} = {}^4/_3 = n$$

a tudíž $(cap'o') = n$ t. j. mp' jest hledaný dopadající paprsek.

Touto konstrukcí možná se též přesvědčiti, že paprsku, který dopadaje na kulovou plochu prochází bodem f přidružen jest paprsek s osou rovnoběžný. Neboť značíme-li obraz přiřaděný bodu f co předmětu písmenem ω jest:

$$(caf\omega) = n.$$

a poněvadž v tomto případě $\frac{cf}{af} = n$ musí $\frac{c\omega}{a\omega} = +1$ t. j. bod ω leží v nemírnosti; avšak vedeme-li z bodu m přímku k úběžnému bodu osy, převrhne se tato na rovnoběžku. Podobně do-padá paprsek rovnoběžně s osou na kulovou plochu, jde-li zlomený paprsek ohniskem f'.

Tyto konstrukce přiřaděných bodů a paprsků valně se zjednoduší, jsou-li známy již buď dva přiřaděné body aneb ohniska, jak několika příklady blíže objasním. Buďtež v obr. 38. dány dva sdružené body bb' co předmět a obraz sestrojené na př. pro exponent lomu $n = 2$ (pro přechod světla ze vzduchu do síry) a mějž se k bodu p co předmětu sestrojiti příslušný obraz o aneb jinými slovy řečeno: jelikož dány jsou body b, b' vyhovující podmínce $(cabb') = n = 2$, má se k bodu p sestrojiti bod o tak, aby $(cabb') = (capo)$. To stane se takto. Považujme libovolný bod t mimo osu za vrchol svazku paprskového a veďme z něho paprsky body c, a, b, b'. Volme dále na paprsku $\overline{ta}$ jakýsi bod t co vrchol nového svazku a proložme jím a bodem p paprsek $\overline{tp}$, který nám přetíná přímku tb v bodu k. Spojme dále bod k s bodem c a prodlužme obdrženou přímku tu P, až nám protne paprsek $\overline{tb'}$ v bodu l. Proložíme-li konečně vrcholem t' a bodem l paprsek $\overline{t'l}$, seče tento osu v hledaném bodu o. Důvod toho jest následující: Osa O a přímka P jsou dvě promětné řady v poloze persp. vzhledem k persp. středu t a společnému vzájemnému bodu c. Protož jsou body na týchž paprscích svazku t na vzájem sdruženy a jich dvojpoměry sobě rovny, totiž:

$$(cabb') = (cgkl).$$

Avšak táž přímka P a osa O jsou taktéž dvě promítavé řady v poloze persp. o společně družném elementu c vzhledem k bodu t' co jich persp. středu a tudíž jsou i body na paprscích svazku t' ležící na vzájem sdruženy a jich dvojpoměry stejny, takže:

$$(cgkl) = (capo),$$

a z těchto dvou srovnalostí vyplývá snadno třetí:

$$(cabb') = (capo) = n,$$

kteráž praví, že bod o přísluší bodu p co obraz.

Máme-li však bod p za obraz označujíce ho co takový o', nalezneme ihned bod příslušný mu co předmět, jest-liže prodloužíme paprsek $\overline{t'o'}$, až protkne $\overline{tb'}$ v bodu l'. Odtud veďme přímku P' bodem c, kterážto nám seče $\overline{ta}$ v bodu g' a $\overline{tb}$ v bodu k' a jest-liže konečně body k' a t' proložíme paprsek, určuje nám tento na ose hledaný bod p'.

Neboť jest opět přímka P' s osou O v poloze-persp. vzhledem k společnému členu c a sice mají obě jednou persp. střed t a protož jest: $(cabb') = (cg'k'l')$
a po druhé bod t', pročež $(cg'k'l') = (cap'o')$
a z obou vysvítá konečně, že $(cabb') = (cap'o') = n$.

Konstrukce ta nepozbývá platnosti a spolehlivosti, jest-liže vrchol t stává se bodem úběžným, v kterémžto případě mají všechny paprsky týž směr, takže svazek paprskový přechází v tak zvanou osnovu rovnou, an při tom dvojpoměr neproměněn zůstává. Jsou-li na př. paprsky ty kolmy k ose O, udává obr. 39., kterak se k dopadajícímu paprsku M sestrojí zlomený paprsek M' (pro týž exponent lomu $n = 2$). Třeba pouze prodloužiti M, až protíná A v bodu l', co vrcholi nového svazku a B v bodu k, z něhož veďme přímku bodem c, až dostihne B' v l. Jest pak $\overline{t'l}$ směr zlomeného paprsku M'. Důvod toho je týž, jako v předešlé konstrukci. Pojímáme-li však M co zlomený paprsek N', najdeme přiřaděný k němu dopadající paprsek, když z průsečíku l' přímek $N'B'$ vedeme bodem c přímku, až prosekne B v bodu k'. Přímka spojivá $\overline{t'k'}$ určuje směr hledaného paprsku N.

Sestrojování přiřaděných elementů může se díti též pomocí buď bodu f', buď bodu f, buď konečně obou.

Jsou-li v obr. 40. dány body c, a, f' na př. pro exponent lomu $n = {}^9/_4$ u diamantu, kdežto $\varphi' = {}^9/_5\, r$, víme, že bodu f' přiřaděn jest úběžný bod co předmět, takže:

$$(ca \infty f') = n = {}^9/_4$$

a má-li se k bodu p co předmětu konstruovati příslušný obraz o, musí míti takovou polohu, že

$$(ca \infty f') = (capo) = n.$$

Následující operace vede k tomu cíli. Bod m považuje se za vrchol svazku a vedou se z něho paprsky bodu c, a, ∞, f'. Na paprsku ma zvolí se bod t za vrchol nového svazku, načež se průsečíkem k přímek $\overline{tp}$ a $m\infty$ a bodem c proloží přímka P, kteráž stihne $\overline{mf'}$ v bodu l a spojí-li se tento s bodem t, stanoví přímka spojivá na ose hledaný bod o. Neboť vztahujeme li přímku P protínající osu O v soudružném bodu c k jich perspektivickému středu m, vidíme, že:

$$(ca \infty f') = (cgkl).$$