

Werk

Label: Article

Jahr: 1872

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0001|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

curven“ v Grunnertově „Archiv für Math. u. Phys.“ ve sv. 37., ve kterém stanoví souvislost trochoidy s průmětnicí křivky tvořící.

Hennigův „Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten“ v „Crelle's Journal“ r. 1865 obsažený podává kromě známých již pouček některé zajímavé věty o poloměru křivení, obvodu a ploše, pak o roulettách podvojných.

Strauch konečně ve svém obsáhlém díle „Integration der Differentialgleichungen“ r. 1865 řeší všeobecnou úlohu theorie trochoid, totiž stanoviti rovnici jedné ze tří křivek tvořice, řídice a trochoidy, pakli rovnice obou ostatních jsou dány. Neměť tu Strauch zajisté na mysli rozšířiti theorii trochoid, an stavěl pouze na základech dříve již položených, ale spíše užil těchto zajímavých křivek za příklad k náuce o integrování rovnic differentciálních.

Hledíce s tohoto stanovíště na práci jeho, nemůžeme než těšiti se z neobyčejné péče, kterou spisovatel trochoidám byl věnoval. Strauch tuto stránku theorie trochoid úplně zakončil. *)

Době nynější nastává hlavně úloha trojí:

a) použití zákonů geometrie novější a deskriptivné ku trochoidám,

b) rozšířiti theorii trochoid pro křivky prostorné a

c) zkoumati plochy, jež podobným způsobem povstávají, když bod tvořící přejde v křivku tvořící, prostornou.

Vidíme se tudíž na konci počátku práce téměř nepřehledné, která pro vědu geometrickou slibuje hojného ovoce.

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. Jan Krejčí.)

(Pokračování.)

Tvary soustavy krychlové.

1. Soustava krychlová obsahuje tvary, které se úměrným úseky dají z krychle vyvinouti.

*) O zvláštních případech, v nichž rovnice příslušné se velmi zjednoduší, pojednáme budoucně.

Red.

Krychle co prvotvar, s plochami v poloze h .

2. Prvotvar té soustavy jest *krychle* (tessera, Hexaëder), obr. 16., tvar obmezený 6 čtverci, které se stýkají v 8 trojplachých rozích a ve 12 pravoúhelných hranách H .

3. Tři osy, které se ukončují ve středu ploch, slovou *hlavní osy* a délka jejich od středu počítána jest $a = 1$. Šest os, které se ukončují ve středu hran, slovou *kosočtverečné osy*, a délka jejich $r = \sqrt{2}$. Čtyři osy, které se ukončují ve středu rohů, slovou *trojúhelné osy*, a délka jejich $t = \sqrt{3}$.

4. Hlavní osy a taktéž kosočtverečné jsou na sobě kolmé. Pro úklony druhých os jsou:

$$\cos(a, r) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tedy } (a, r) = 45^\circ,$$

$$\cos(a, t) = \sin(r, t) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ tedy } (a, t) = 54^\circ 44' 8''$$

$$\cos(r, t) = \sin(a, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{ tedy } (r, t) = 35^\circ 15' 52''.$$

5. Znamka krychlových ploch jest $h = 100$.

Tvary z krychle odvozené.

6. Z krychle dají se vyvinouti přikrojením hran plochami rovnoběžnými s hranami tvary *dvanačticetné*; přikrojením rohů tvary *osmičetné*.

Provede-li se přikrojení stejnou měrou na všech hranách v rozích, vyvinou se tvary *plnoměrné* (holoëdrické); provede-li se polovičnou měrou, vyvinou se tvary *poloměrné* (hemiëdrické), a provede-li se ta změna čtvrtinou, vyvinou se tvary *čtvrťměrné* (tetartoëdrické).

I. Tvary plnoměrné.

A. S plochami dvanačticetnými.

a) S plochami v poloze d .

7. Otupením hran krychle obr. 17. vyvine se *kosočtverečný dvanačtistěn* (rhombický Dodekaëder) obr. 18., kterýž jest obmezen 12 stejnými kosočtverci, stýkajícími se v 6 čtveroplochých a v 8 trojplachých rozích, a ve 24 hranách D .

8. Z vodorovného průmětu toho tvaru vychází, že se má kratší úhlopříčka ploch k delší dle srovnalosti

$$h : o = 1 : \sqrt{2},$$

z čehož pak vychází $2 \cos(o, d) = \frac{o^2 - h^2}{o^2 + h^2} = \frac{1}{3}$,

$$2(o, d) = 70^\circ 31' 44''$$

$$(o, d) = 35^\circ 15' 52''$$

pročež

$$2(h, d) = 180^\circ - 2(o, d) = 109^\circ 28' 16''$$

$$(h, d) = 54^\circ 44' 8''$$

9. Úklon každé plochy tohoto dvanáctistěnu k hlavní ose jest $= 45^\circ$.

Prodlouží-li se tudíž od hořejšího a dolejšího konce hlavních os hrany až se setkají, promění se ten tvar v osmistěn, jehož polární hrany jsou D , a pobočné hrany $D' = 90^\circ$.

Dle rovnice 13. všeobecné krystallografie jest tudíž

$$2 \cos D + \cos D' = -1,$$

$$\cos D = -\frac{1}{2}$$

$$D = 120^\circ.$$

10. Známká ploch kosočtverečného dvanáctistěnu jest

$$d = 110.$$

b) S plochami v poloze dn .

11. Dvouplochým přikrojením hran krychle obr. 19. vyvine se *krychlový čtyřmecitník* (Tetrakisheksaëder) obr. 20., obmezený 24 stejnými stejnoramennými trojúhelníky, kteréž se stýkají v 6 čtverplochých a v 8 šestiplochých rozích; ve 12 hranách H a 24 hranách D .

12. Každá z ploch jsouc prodloužena odtíná jednu z hran krychle nebo jednu z hlavních os ve vzdálenosti $= 1$, druhou ve vzdálenosti $= n$, třetí ve vzdálenosti $= \frac{1}{n}$, totiž jest s n zárovná.

Pročež jest známka ploch toho tvaru

$$d_n = n10.$$

13. Příponu n ustanoviti lze z polovičných hran $\frac{1}{2}H$, $\frac{1}{2}D$.

Hrana $\frac{1}{2}H$ povstává setkáním se ploch

$$abc = n10$$

$$a'b'c' = 1\bar{1}0$$

hrana $\frac{1}{2}D$ povstává setkáním se ploch

$$\begin{aligned} abc &= n10 \\ a'b'c' &= 011. \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice 12. všeobecné kry-
stallografie, jest

$$\cos \frac{1}{2} H = \frac{n-1}{S}$$

$$\cos \frac{1}{2} D = \frac{1}{S}$$

kdežto

$$S = \sqrt{n^2 + 1} \sqrt{2}, \text{ pročež}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} H}{\cos \frac{1}{2} D} = n-1.$$

14. Je-li $H = D$ jest $n = 2$.

Známka $d_2 = 210$ značí tedy *stejnohranný krychlový čtyř-
mecítmík*, jemuž dáme, an jest jediný svého způsobu (isogonální)
známku = i .

15. Je-li známa jen hrana H , jest v trojúhelníku, kterýž
povstane vedením čáry o z konečného bodu hlavní osy a do
vzdálenosti n , tedy v a, o, n

$$\tan (a, o) = n.$$

V trojúhelníku a, o, r , v němž $(a, r) = 45^\circ$, $(r, o) = \frac{1}{2} H$,
jest tudíž

$$\tan (135^\circ - \frac{1}{2} H) = n.$$

16. Je-li známa jen hrana D , jest v trojbokém výkrojk
 $\frac{1}{2} D, \frac{1}{2} O, A$, v němž $\frac{1}{2} O = 90^\circ$, $A = 45^\circ$ dle rovnice 2. vše-
obecné krystallografie

$$\cos (a, o) = \cos \frac{1}{2} D \sqrt{2},$$

načež se počítá dále jako v 15.

A. S plochami osmičetnými.

a) S plochami v poloze o .

17. Otupením rohů krychle v poměru odetnutých hran
1 : 1 : 1, obr. 21. vyvine se pravidelný *osmistěn* (Oktaéder) obr. 22.,
obmezený 8 stejnostrannými trojúhelníky, kteréž se setkávají
v 6 čtveroplochých rozích a ve 12 hranách O .

18. Dle rovnice 13. jest

$$3 \cos O = -1$$

$$\cos O = -\frac{1}{3}$$

$$O = 109^\circ 28' 16''.$$

19. Každá plocha osmistěnu toho odtíná hrany krychle neb hlavní osy v stejné vzdálenosti, pročez jest známka její
 $o = 111$.

b) S plochami v poloze $o^{1/m}$.

20. Trojplochým přikrojením rohů krychle od ploch v poměru odetnutých hran $1/m : 1 : 1$ obr. 23., vyvine se *čtveroúhelný čtyřmécítník* (Ikositetraeder) obr. 24., obmezený 24 souměrnými čtveroúhelníky, kteréž se stýkají v 6 pravidelně a ve 12 souměrně čtveroplochých, pak v 8 trojplochých rozích, jakož i ve 24 hranách O a 24 hranách H .

21. Znamka toho tvaru jest

$$o^{1/m} = m11.$$

22. Přípona m ustanoví se buď z hrany O , kteráž jsouc prodloužena jednu z hlavních os odtíná ve vzdálenosti $= 1$, druhou ve vzdálenosti $= m$, pročez

$$\text{tang}(a, o) = m,$$

kdežto z trojbokého výkroju $1/2 D, 1/2 O, A$, v němž $1/2 D = 90^\circ$ $A = 45^\circ$ dle vzorce 2.

$$\cos(a, o) = \cot 1/2 O.$$

23. Nebo se přípona m ustanoví z hrany H dle vzorce 10. všeobecné krystallografie, an krychlové tvary lze též považovati co tvary stejnostranné. Pro ten případ jest $a = m, b = c = 1, \sigma = \tau$, pročez

$$\frac{1}{m} = \frac{\sin \varphi \cdot \sin(\sigma + \xi)}{\sin \sigma \cdot \sin(\varphi + \xi)} \text{ nebo } \frac{1}{m} = \frac{\cot \sigma + \cot \xi}{\cot \varphi + \cot \xi}.$$

Jelikož dle vzorce 11.

$$2 \cot \sigma = - \cot \varphi,$$

a ve výkroju krychle $1/2 H, R, T$, kdežto $R = 90^\circ, T = 60^\circ$ dle vzorce 5.

$$\cos T = \text{tang}(r, t) \cot(h, t),$$

$$\cot(r, t) = 2 \cot(h, t),$$

jest, znamená-li $\xi = (h, t), \varphi = (d, t)$

$$\cot(r, t) = 2 \cot \xi,$$

$$\frac{m+2}{m-1} = \frac{\cot(r, t)}{\cot(d, t)},$$

kdežto (r, t) znamená úklon krychlové plochy, a (d, t) úklon čtýrmečítmíkové plochy k ose t .

24. Pro onen tvar $o^{1/m}$, kterýž otupuje hrany dvanáctistěnu obr. 25., jest pro jednu plochu

dvanáctistěnu $d, abc = 011$,
pro sousední plochu $d', a'b'c' = 101$,
a pro plochu otupující $p, a''b''c'' = 11m$,
pro kteréž hodnoty dá pásmová rovnice 19.

$$m = 2.$$

Tvar ten má tedy polohu od d závislou a sice tak, že vždy 6 ploch jest s osou t rovnoběžných, kteréž až k společnému setkání zvětšeny, stýkají se pod úhlem 120° v podobě šesti-bokého hranolu (Prisma), pročež tuto *odručdu hranolovou* co jedinou svého způsobu naznačíme

$$o^{1/2} = p.$$

b) S plochami v poloze o_m .

25. Trojplochým přikrojením rohů krychle od hran v poměru odednutných hran $1 : 1/m : 1/m$ obr. 26. nebo $m : 1 : 1$ vyvine se *osmistěnný čtýrmečítmík* (Triakisoktaeder), obr. 27., obmezený 24 stejnoramennými trojúhelníky, kteréž se stýkají v 6 osmiplochých a v 8 trojplochých rozích, pak ve 12 hranách O a 24 hranách D .

26. Známká toho tvaru jest

$$O_m = mm1.$$

27. Přípona m ustanoví se buď z hrany O , anaf kolmice v rovině plochy na střed hrany O postavena, protíná hlavní osu ve vzdálenosti $= m$, pročež

$$r \tan \frac{1}{2} O = m,$$

kdežto, an $a = 1$, $(a, r) = 45^\circ$ ($o, r) = 90^\circ$, $r = \frac{1}{2} \sqrt{2}$.

28. Nebo se ustanoví z hran D úklon plochy k ose t z trojbokého výkroju $\frac{1}{2} H$, $\frac{1}{2} D$, T , kdežto $\frac{1}{2} H = 90^\circ$, $T = 60^\circ$ dle vzorce 2.

$$\cos(h, t) = 2 \cos \frac{1}{2} D \sqrt{\frac{1}{3}},$$

načež kladouce do vzorce 10. $a = 1$, $b = c = m$, $\sigma = \tau$, jest

$$m = \frac{\cot \sigma + \cot \xi}{\cot \varphi + \cot \xi}.$$

Jelikož $2 \cot \sigma = - \cot \varphi = \cot (h, t)$

$2 \cot \xi = \cot (r, t)$, jest

$$\frac{2m+1}{m-1} = \frac{\cot (r, t)}{\cot (h, t)},$$

kdežto (r, t) znamená úklon krychlové plochy a (h, t) úklon čtyřmécítmíkové plochy k ose t .

d) S plochami v poloze o_s .

29. Šestiplochým přikrojením rohů krychlových v poměru odetnutých hran $\frac{1}{m} : \frac{1}{n} : 1$ obr. 28. vyvine se *osmačtyřicetník* (Hexakisoktaeder) obr. 29., obmezený 48 lichostrannými trojúhelníky, kteréž se stýkají v 6 osmiplochých, 8 trojplachých a 12 čtveroplochých rozích, pak ve 24 hranách H , 24 hranách D a 24 hranách O .

30. Znamka toho tvaru jest o_s ,

kdežto $o_s = a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}} c_1 = mn1$

31. Vezme-li se nejkratší úsek $= 1$, odtíná hrana D hlavní osu ve vzdálenosti $= 1$, hrana H ve vzdálenosti $= m$, hrana O ve vzdálenosti $= \frac{m}{n}$.

Pročez jest

$$\text{tang } (a, o) = \frac{m}{n}$$

$$r \text{ tang } (h, r) = m,$$

při čemž $(a, r) = 45^\circ$, a tedy

$$\text{tang } (a, o) = \frac{m}{n} = \frac{r \sin 45^\circ}{1 - r \cos 45^\circ} \text{ nebo}$$

$$r = \frac{m \sqrt{2}}{m + n}.$$

Úhel (a, o) ustanoví se z trojbokého výkrojků $\frac{1}{2}O, \frac{1}{2}D, A$, kdežto $A = 45^\circ$ dle vzorce 2.

$$\cos (a, o) = \frac{\cos \frac{1}{2}D \sqrt{2} + \cos \frac{1}{2}O}{\sin \frac{1}{2}O}.$$

Úhel (h, r) ustanoví se z trojbokého výkrojků $\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}O, R$, kdežto $R = 90^\circ$ dle téhož vzorce

$$\cos (h, r) = \frac{\cos \frac{1}{2}O}{\sin \frac{1}{2}H}.$$

32. Pro polovičné hrany jest, anať hrana

$\frac{1}{2}H$ povstává setkáním se ploch $abc = nm1, a'b'c' = 110$,
 $\frac{1}{2}O$ " " " " $abc = nm1, a'b'c' = 001$,
 $\frac{1}{2}D$ " " " " $abc = nm1, a'b'c' = 101$,
dosažením těch hodnot do rovnice 12.

$$\cos \frac{1}{2}H = \frac{n-m}{S}$$

$$\cos \frac{1}{2}O = \frac{\sqrt{2}}{S}$$

$$\cos \frac{1}{2}D = \frac{1-n}{S},$$

kdežto $S = \sqrt{n^2 + m^2} \sqrt{2}$, pročež

$$\frac{\cos \frac{1}{2}H}{\cos \frac{1}{2}D} = \frac{n-m}{1-n}.$$

K řešení té rovnice jest potřebí ještě druhé, kterouž obdržíme z polohy plochy, která otupuje hranu H neb D .

Hrana D otupuje se plochou $O_{\frac{1}{m}}'$, hrana H plochou O_m''

Vezmeme-li pro výpočet plochu $O_{\frac{1}{m}}'$, obr. 30. jest
pro tuto plochu $O_{\frac{1}{m}}' abc = 1m'1$
pro plochu $O_s a'b'c' = 1mn$
pro plochu $O's a''b''c'' = nm1$,
z čehož dosažením těch hodnot do vzorce 18. neb do rovnice 19. obdržíme

$$\frac{2m}{n+1} = m'.$$

Přípona m' ustanoví se pak z úhlu (d, t) , jež má plocha $O_{\frac{1}{m}}'$ společný s plochou O_s a pro nějž z trojbokého výkroju $\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}D, T$ obr. 29., kdežto $T = 60^\circ$, jest dle 2.

$$\cos (d, t) = \frac{2 \cos \frac{1}{2}H + \cos \frac{1}{2}D}{\sin \frac{1}{2}H \sqrt{3}},$$

načež dle odstavce 23. jest

$$\frac{\cot (r, t)}{\cot (d, t)} = \frac{m+2}{m'-1}.$$

33. Některé osmačtyřicetníky mají hranu D v téže poloze jako kosočtverečný dvanáctistěn do toho tvaru vepsaný, pročež takové odrůdy slovou *kosočtverečné* (rhombické) *osmačtyřicetníky*. Plochy tohoto O_s přikrojují hrany dvanáctistěnu, obr. 31.

Je-li pro jednu plochu dvanáctistěnu d , $abc = 011$,
 pro druhou plochu dvanáctistěnu d' , $a'b'c' = 110$,
 pro plochu osmačtyřicetníku O , $a''b''c'' = nm1$
 jest dle pásmové rovnice 19)

$$n = m - 1.$$

Známka těchto tvarů jest tedy

$$Os = a^{1/m} b^{\frac{1}{m-1}} c,$$

místo čehož zkráceně psáti budeme

$$r_m = m \ m - 1 \ 1.$$

34. Příponu m pro tvar r_m lze bezprostředně ustanoviti z hran H , D rovnicí

$$\frac{\cos \frac{1}{2}H}{\cos \frac{1}{2}D} = -\frac{1}{2-m}.$$

35. Taktéž lze m ustanoviti ze spojkové hrany plochy r_m s plochou d .

Znamená-li D' obr. 31. tuto spojkovou hranu, jest v trojbokém výkrojků D' , $\frac{1}{2}O$, $\frac{1}{2}O'$, v němž $\frac{1}{2}O' = 90^\circ$, pak dle odstavce 8. $(o', d') = 35^\circ 15' 52''$, a dle odstavce 4. $\cos(o' d') = \sqrt{\frac{2}{3}}$, dle vzorce 2.

$$\cos \frac{1}{2}O = \frac{\sin D' \sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Jelikož však dle odstavce 32, též

$$\cos \frac{1}{2}O = \frac{\sqrt{2}}{S}, \text{ jest}$$

$$\sin D' = \frac{\sqrt{3}}{S}.$$

Pro hranu D' dá se vyvinouti dle vzorce 12. též rovnice

$$\cos D' = \frac{n+m}{S},$$

pročež jest

$$\cot D' = \frac{n+m}{\sqrt{3}},$$

nebo herouce $n = m - 1$

$$\cot D' \sqrt{3} = 2m - 1.$$

36. K ustanovení tvaru r_m stačí známost jediné jeho hrany. Z hrany D ustanoví se totiž D' dle vzorce

$$\frac{1}{2}D - 60^\circ = D',$$

Z hrany H ustanoví se D' pomocí trojbokého výkrojků $\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}H' D'$ obr. 31. v němž $\frac{1}{2}H' = 90^\circ$, pak dle odstavce 8. $(h', d') = 54^\circ 44' 8''$ a dle odstavce 4. $\cos(h', d') = \sqrt{1/3}$, pročež dle vzorce 2.

$$\sin D' = \cos \frac{1}{2}H \sqrt{3}.$$

Z hrany O ustanoví se D' pomocí trojbokého výkrojků $\frac{1}{2}O, \frac{1}{2}O', D'$, v němž $\cos(o' d') = \sqrt{2/3}$, pročež dle téhož vzorce

$$\sin D' = \cos \frac{1}{2}O \sqrt{3/2}.$$

37. Některé osmačtyřicetníky mají stejnohanné šestiboké rohy, tedy $H = D$.

Pro tyto tvary jest dle odstavce 32.

$$n - m = 1 - n$$

a tudíž

$$n = \frac{m + 1}{2}$$

Známka těchto stejnohanných (isogonálních) osmačtyřicetníků jest tedy

$$Os = a^{1/m} b^{\frac{2}{m+1}} c,$$

místo čehož zkráceně psáti budeme

$$i_m = m \frac{m + 1}{2} 1.$$

38. Příponu m lze ustanoviti z hran $H = D$. Ustanovíme totiž pomocí vzorce

$$\frac{\cot(r, t)}{\cot(d, t)} = \frac{m' + 2}{m' - 1}$$

plochu $O^{1/m'}$, kteráž otupuje hrany D , načež jest dle rovnice

$$\frac{2m}{n + 1} = m'$$

kladouce $n = \frac{m + 1}{2}$

$$m = \frac{3m'}{4 - m'}.$$

39. Též z hrany O dá se přípona m ustanoviti. V trojbokém výkrojků $\frac{1}{2}O, \frac{1}{2}O', O^{1/2''}$ (obr. 32.), kdežto $\frac{1}{2}O' = 54^\circ 44' 8''$, $(o' o'') = 30^\circ$ (jelikož na stejnohanném Os otupuje osmistěnná plocha šestiplochý roh pravidelným šestiúhelníkem), jest dle vzorce 4.

$$\cot 30^\circ = \frac{-\cot \frac{1}{2}O \sin 54^\circ 44' 8'' + \cos 54^\circ 44' 8'' \cos(o, o')}{\sin(o, o')} \text{ nebo}$$

$$\cos o, o' - 3 \sin(o, o') = \cot \frac{1}{2}O \sqrt{2}.$$

Vezmeme-li $3 = \cot \varphi$, tedy $\varphi = 18^\circ 26'$, jest

$$\sin \varphi \cos(o, o') - \cos \varphi \sin(o, o') = \cot \frac{1}{2}O \sqrt{2} \sin \varphi$$

nebo, an

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{1}{10}},$$

$$\sin[\varphi - (o, o')] = \sin \sigma = \cot \frac{1}{2}O \sqrt{\frac{1}{5}}$$

Jelikož však $(o, o') + 45^\circ = (a, o) = 63^\circ 26' - \sigma$, a hrana O jednu z hlavních os protíná ve vzdálenosti $= \frac{1}{m}$, druhou ve vzdálenosti $= \frac{1}{n}$, jest

$$\frac{m}{n} = \frac{2m}{m+1} = \tan(a, o) = \tan(63^\circ 26' - \sigma), \text{ kdežto}$$

$$\sin \sigma = \cot \frac{1}{2}O \sqrt{\frac{1}{5}}.$$

40. Konečně vyskytuje se také odrůda osmačtyřicítніка, kteráž jest stejnohramná a zároveň kosočtverečná, tak že pro ní dle odstavců 33. a 37. jest

$$m-1 = \frac{m+1}{2},$$

nebo

$$m = 3, n = 2.$$

Známka tohoto stejnohramně kosočtverečného osmačtyřicítніка jest tedy

$$Os = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}} c_1,$$

místo čehož zkráceně psáti budeme

$$r_i = 321.$$

(Pokračování.)