UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LVIII—LIX

ФОРМУЛА РИМАНА-ЗИГЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ КОТЕЛЬНИКОВА – УИТТЕКЕРА – НАЙКВИСТА ИЗ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

ЯН МОЗЕР, Братислава

Введение
Теорема Котельникова – Уиттекера – Найквиста и квадратичный эффект

При использовании непрерывных сигналов в теории информации основным математическим средством является теорема отсчетов во временном представлении, принадлежащая Котельникову, Уиттекеру и Найквисту — КУН, (см. [16], стр. 120, [18], [19], ср. [20], [21], стр. 53).

Вот формулировка этой теоремы: Если функция $F(t)$ не содержит составляющих с частотой выше W герц, то она полностью определяется последовательностью ее значений в точках, отстоящих на расстоянии $1/2\,W$ секунд друг от друга:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi Wt - n\pi)}{2\pi Wt - n\pi} F\left(\frac{n}{2W}\right), \qquad t \in (-\infty, \infty). \tag{1}$$

Эта теорема выражает невозможность независимых значений сигнала $F(t)$, отделенных друг от друга в среднем интервалами, меньшими чем $1/2W$. Интервал длиною $1/2W$ называется интервалом Найквиста (ср. [16], стр. 120).

Квадратичным эффектом сигнала $F(t)$ называется выражение (см. [17], стр. 96):

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(t)\,dt;$$

если $F(t)$ есть ток или напряжение, то квадратичный эффект обычно пропорционален энергии этого сигнала). В силу (1) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(t)\,dt = \frac{1}{2W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F^2\left(\frac{n}{2W}\right);$$

использованы формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin(x + n\pi)}{x + n\pi} dx = 0, n \neq 0,$$

из которых следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi Wt - n\pi)}{2\pi Wt - n\pi} \cdot \frac{\sin(2\pi Wt - m\pi)}{2\pi Wt - m\pi} \mathrm{dt} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2W}, & m = n. \end{cases}$$

Из теории преобразования Фурье следует, что не может существовать функции, равной нулю вне ограниченной области и одновременно обладающей конечным спектром. Однако, возможно существование функции, для которой почти весь квадратичный эффект сосредоточен в конечных интервалах времени и полосы частот. Действительно, сигналы связи являются в большинстве случаев функциями такого типа.

Подобные соображения приводят в теории информации к следующему эмпирическому правилу (ср. [17], стр. 86), которое мы явно сформулируем.

Эмпирическое правило. Если длительность сигнала $F(t)$ приближенно составляет T (например: $t \in \langle 0, T \rangle$), а спектр его приближенно ограничен частотой W и если $2TW \gg 1$ то функция $F(t)$ с «высокой степенью точности» определяется ее значениями в $2TW$ точках отсчета, отделенных друг от друга расстояниями $1/2W$:

$$F(t) \approx \sum_{n=0}^{2TW} \frac{\sin(2\pi Wt - n\pi)}{2\pi Wt - n\pi} F\left(\frac{n}{2W}\right), t \in \langle 0, T \rangle, \quad (2)$$

и далее,

$$\int_0^T F^2(t)\, dt \approx \frac{1}{2W} \sum_{n=0}^{2TW} F^2\left(\frac{n}{2W}\right). \quad (3)$$

О результатах

В предлагаемой работе мы попробуем получить точные аналоги эмпирических формул (2), (3) для сигналов и ансамблей сигналов, определяемых функцией (см. [15], стр. 94)

$$Z(t) = \mathrm{e}^{i\vartheta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

на конечном, но неограниченном при $T \to \infty$, промежутке.

В направлении соотношения (2) получен, например, следующий результат: для $t \in \langle T, T+U \rangle$, $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$ и соответствующих $L = L(T)$, $U = U(T)$, имеет место:

$$\overset{*}{Z}(t+2\omega b) \overset{CK}{=} \sum_{p=-L}^{L} \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \overset{*}{Z}(t+2\omega p)$$

в смысле среднего квадратического, т.е.

$$\frac{1}{U}\int_T^{T+U} \left\{\overset{*}{Z}(t+2\omega b) - \sum_{p=-L}^{L} \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \overset{*}{Z}(t+2\omega p)\right\}^2 dt = o(1) \qquad (4)$$

при $T \to \infty$, равномерно для $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$, где

$$\overset{*}{Z}(t) = \frac{Z(t)}{\sqrt{2\ln P}}, \; 2\omega = \frac{\pi}{\ln P}, \; P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}. \qquad (5)$$

В (4) предполагается, конечно, что

$$\left.\frac{\sin w}{w}\right|_{w=0} = 1.$$

Итак, соотношению (4) соответствует следующая длина промежутка Найквиста (см. (5)):

$$\frac{1}{2W} = 2\omega = \frac{\pi}{\ln P}. \qquad (6)$$

Сейчас отметим, что к тому же результату (6), относительно длины промежутка Найквиста, мы приходим и в I-ой главе, в которой нами получено спектральное представление главного члена формулы Римана-Зигеля.

Далее напомним, что в работе [4], (см. (1)), мы определили семейство последовательностей $\{t_\nu(\tau)\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, и получили следующее асимптотическое соотношение (см. [4], (40)) для расстояния ее соседних членов:

$$t_{\nu+1}(\tau) - t_\nu(\tau) \sim \frac{\pi}{\ln P}, \; t_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle, \; T \to \infty, \qquad (7)$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, при соответствующих U. Следовательно, в силу (6), (7) сделаем

Замечание 1. Полезность семейства последовательностей $\{t_\nu(\tau)\}$, по отношению к формуле Римана-Зигеля

$$Z(t) = 2\sum_{n \leqq t_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta(t) - t\ln n\} + O(t^{-1/4}), \; t_1 = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \qquad (8)$$

состоит в том, что асимптотическое расстояние соседних членов последовательности этого семейства (см. (7)), равно длине промежутка Найквиста (6).

Явно отметим, что $\{t_\nu(0)\} = \{t_\nu\}$ — классическая последовательность, теоретические свойства которой впервые начал изучать Титчмарш ([13]). По этому поводу см. также мнение А. Сельберга [12], стр. 197.

При доказательстве соотношения (4) основную роль играет квазиортонормированность системы векторов

$$\frac{1}{\sqrt{Q}}\dot{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho];\; g_\nu \in \langle T, T+U\rangle,\; Q = \sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} 1,\; g_\nu = g_\nu(0):$$

$$\frac{1}{Q}\sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} \dot{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega p]\,\dot{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega p'] = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{\ln T}\right),\; p \neq p', \\ 1 + O\left(\dfrac{1}{\ln T}\right),\; p = p', \end{cases} \tag{9}$$

при $T \to \infty$ и также сопутствующие понятия — коэффициенты Фурье, полином Фурье, среднее квадратическое отклонение двух векторов. Напомним, что частные результаты в направлении (4), (9) были получены в работе [2].

Замечание 2. Соотношение (4) удовлетворительно и с эстетической точки зрения, поскольку в специальном случае $b = 1/2$, выражения

$$\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{2} - p\right)}{\pi\left(\frac{1}{2} - p\right)} = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^p}{2p - 1},\quad \left\{\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{2} - p\right)}{\pi\left(\frac{1}{2} - p\right)}\right\}^2 = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{1}{(2p - 1)^2}$$

составляют члены знаменитых рядов Лейбница ([22], стр. 120, 145) и Эйлера ([22], стр. 142, 145):

$$\frac{2}{\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{2p - 1} = 1,\quad \frac{4}{\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2p - 1)^2} = 1.$$

Далее напомним, ([21], стр. 53), что ансамбль функций представляет собой подходящее математическое представление для сообщений, создаваемых непрерывным источником (например, речь), для сигналов от передатчика и для мешающих шумов. В силу этого, в последней — V-ой — главе, результаты, полученные в предшествующих главах, обобщаются на случай ансамбля функций $\dot{Z}_\varphi$, порожденного фазовой модуляцией главного члена формулы Римана-Зигеля (8). Кроме того, доказана асимптотическая стационарность и асимптотическая эргодичность ансамбля $\overset{*}{Z}_{\varphi}$.

Наконец заметим, что настоящая работа продолжает анализ следствий из формулы Римана-Зигеля с помощью дискретного метода, основы которого были заложены Е. К. Титчмаршем в его знаменитом мемуаре [13].

I. Спектральные свойства главного члена формулы Римана-Зигеля

В этой главе мы получим асимптотическую форму главного члена формулы Римана-Зигеля (8) и также его спектральное представление. Отсюда уже будет следовать заключение о том, что промежуток Найквиста, асимптотическая длина (при $T \to \infty$) которого равна $\pi/\ln P$, играет фундаментальную роль для формулы Римана-Зигеля (8).

1. Асимптотическая форма главного члена формулы Римана-Зигеля

1.1. Сначала преобразуем формулу Римана-Зигеля (8), $t \to v$, к следующему виду:

$$Z(v) = 2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\{\vartheta(v) - v\ln n\} + O(T^{-1/4}) + O\left(\frac{V_0}{\sqrt{T}}\right),$$

$$v\in\left(T - \frac{V_0}{2},\ T + \frac{V_0}{2}\right),\ P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}},$$

(V_0 — пока не фиксировано и T — достаточно большое число). Напомним (см. [15], стр. 383), что

$$\vartheta = \vartheta(v) = -\frac{1}{2}v\ln\pi + \operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}iv\right) = \vartheta_1(v) + O\left(\frac{1}{v}\right),$$
$$\vartheta_1(v) = \frac{1}{2}v\ln\frac{v}{2\pi} - \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}\pi. \tag{10}$$

Следовательно,

$$Z(v) = 2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\{\vartheta_1(v) - v\ln n\} + O(T^{-1/4}) + O\left(\frac{V_0}{\sqrt{T}}\right),$$
$$v\in\left(T - \frac{V_0}{2},\ T + \frac{V_0}{2}\right) \tag{11}$$

Пусть $\{h_\nu(\tau, \alpha)\}$ обозначает семейство последовательностей удовлетворяющих условиям:

$$\vartheta_1[h_\nu(\tau, \alpha)] = \alpha(\pi\nu + \tau),\ \nu = 1, 2, \ldots,$$
$$0 < \frac{1}{A} < \alpha < A,\ \tau \in \left(-\frac{H_0}{2}, \frac{H_0}{2}\right), \tag{12}$$

(A — абсолютная постоянная, H_0 — пока не фиксировано). Теперь, при достаточно большом ν и фиксированном α, положим $h_\nu(0, \alpha) = T$.

Замечание 3. Параметр τ представляет собой локальную координату точки, лежащей в окрестности значения $T = h_\nu(0, \alpha)$.

Предположим, что если $\tau \in (-H_0/2, H_0/2)$, то

$$v = h_\nu(\tau, \alpha) \in \left(T - \frac{V_0}{2}, T + \frac{V_0}{2}\right).$$

Теперь из (12), обычным способом получаем

$$h_\nu(\tau, \alpha) = h_\nu(0, \alpha) + \alpha\frac{\tau}{\ln P} + O\left(\frac{H_0 V_0}{T\ln^2 T}\right) = T + \alpha\frac{\tau}{\ln P} + O\left(\frac{H_0 V_0}{T\ln^2 T}\right). \tag{13}$$

Следовательно, полагая в (11) $v = h_\nu(\tau, \alpha)$, в силу (12), (13), получаем соотношение

$$Z[h_\nu(\tau, \alpha)] = Z_1[h_\nu(\tau, \alpha)] + O(T^{-1/4}) + O\left(\frac{V_0}{\sqrt{T}}\right) + O\left(\frac{H_0 V_0}{T^{3/4}\ln T}\right),$$

где

$$Z_1[h_\nu(\tau, \alpha)] = 2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\{\alpha\Omega(n)\tau + \Lambda_1(n, \nu, \alpha)\}, \tag{14}$$

$$\Omega(n) = \frac{1}{\ln P}\ln\frac{P}{n},\ \Lambda_1(n, \nu, \alpha) = \alpha\pi\nu - T\ln n.$$

1.2. Пусть (ср. (13))

$$h(\tau, \alpha) = T + \alpha\frac{\tau}{\ln P},\ \tau \in \left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right),\ H \leqq H_0. \tag{15}$$

Ясно, что $h(\tau, \alpha)$ — биекция:

$$h(\tau, \alpha)\colon \left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right) \to \left(T - \frac{V}{2}, T + \frac{V}{2}\right),$$
$$V = \alpha\frac{H}{\ln P} \leqq \alpha\frac{H_0}{\ln P} \leqq V_0. \tag{16}$$

Поскольку (см. [3], (11), ср. [15], стр. 109)

$$Z_1'(v) = O(v^{1/6}\ln^2 v), \tag{17}$$

то (см. (13), (15)),

$$\begin{aligned} Z_1[h_v(\tau, \alpha)] - Z_1[h(\tau, \alpha)] &= O(\max|Z_1'| \cdot |h_v(\tau, \alpha) - h(\tau, \alpha)|) = \\ &= O\left(T^{1/6}\ln^2 T \cdot \frac{H_0 V_0}{T\ln^2 T}\right) = O\left(\frac{H_0 V_0}{T^{5/6}}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Следовательно, из (14), в силу (18), получаем

$$Z_1[h(\tau, \alpha)] = 2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\alpha\Omega(n)\,\tau + \Lambda_1\} + O\left(\frac{H_0 V_0}{T^{5/6}}\right). \tag{19}$$

Теперь положим:

$$\begin{gathered} Z_2[h(\tau, \alpha)] = 2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\alpha\Omega(n)\,\tau + \Lambda_1\},\ \tau \in \left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right), \\ \Lambda_1 = \Lambda_1(n, \nu, \alpha) = \alpha\pi\nu - \mathrm{T}\ln n. \end{gathered} \tag{20}$$

Отсюда, преобразованием $t = h(\tau, \alpha)$, получаем (см. (14)—(16)):

$$\begin{gathered} Z_2(t) = 2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(t\ln\frac{P}{n} + \Lambda_2\right),\ t \in \left(T - \frac{V}{2}, T + \frac{V}{2}\right), \\ V = \alpha\frac{H}{\ln P},\ \Lambda_2 = \Lambda_2(\alpha, \nu) = \alpha\pi\nu - T\ln P. \end{gathered} \tag{21}$$

Замечание 4. Каждая из формул (20), (21) представляет собой асимптотическую форму главного члена формулы Римана-Зигеля (8). Преобразования $t = h(\tau, \alpha)$, $\tau = h^{-1}(t, \alpha)$ (см. (15)), переводят одну из этих формул в другую, (τ назовем вспомогательной переменной). При этом

А. $h(\tau, \alpha)$ представляет собой асимптотическую аппроксимацию «истинной» переменной $v = h_v(\tau, \alpha)$; совершаемая при этом ошибка равна (см. (13), (15)):

$$|h(\tau, \alpha) - v| = O\left(\frac{H_0 V_0}{T\ln^2 T}\right), \tag{22}$$

В. $Z_2[h(\tau, \alpha)]$ представляет собой асимптотическую аппроксимацию $Z_1(v)$; совершаемая при этом ошибка равна (ср. (19), (20)):

$$|Z_2[h(\tau, \alpha)] - Z_1(v)| = O\left(\frac{H_0 V_0}{T^{5/6}}\right). \tag{23}$$

Так как, далее (см. (16)) $H_0 = O(V_0 \ln P)$, то условию

$$\frac{H_0 V_0}{T^{5/6}} = O\left\{\frac{1}{\psi(T)}\right\},$$

где $\psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к ∞ функция, соответствует следующее условие для V_0:

$$V_0 = O\left(\frac{T^{5/12}}{\sqrt{\psi \ln T}}\right). \tag{24}$$

В силу (22)—(24) сделаем

Замечание 5. Поскольку, при условии (24), ошибки

$$|h(\tau, \alpha) - v|, \; |Z_2[h(\tau, \alpha)] - Z_1(v)| = O\left\{\frac{1}{\psi(T)}\right\} \tag{25}$$

стремятся к нулю при $T \to \infty$, то формулы (20), (21), переходящие одна в другую при преобразовании (15), можно считать хорошими аппроксимациями главного члена формулы Римана-Зигеля (8).

2. Спектральное представление главного члена формулы Римана-Зигеля

Напомним, что каждая из формул (20), (21), выражающих асимптотическую форму главного члена формулы Римана-Зигеля (8), определена для конечного промежутка изменения τ и t соответственно.

Мы теперь продолжим эти формулы на бесконечные промежутки изменения переменных τ и t. А именно, положим:

$$\begin{gathered} Z_4(\tau) = Z_3[h(\tau, \alpha)] = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\alpha\Omega(n)\tau + \Lambda_1\}, \; \tau \in (-\infty, \infty), \\ \Omega(n) = \frac{1}{\ln P} \ln\frac{P}{n}, \; \Lambda_1 = \Lambda_1(n, v, \alpha) = \alpha\pi v - T\ln n, \end{gathered} \tag{26}$$

и далее,

$$\begin{gathered} Z_3(t) = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(t \ln\frac{P}{n} + \Lambda_2\right), \; t \in (-\infty, \infty), \\ \Lambda_2 = \Lambda_2(\alpha, v) = \alpha\pi v - T\ln P. \end{gathered} \tag{27}$$

Замечание 6. Явно отметим, что $Z_4(\tau)$, $Z_3(t)$ представляют собой почти-периодические функции.

Ясно, что преобразование (ср. (15))

$$t = h(\tau, \alpha) = T + \alpha \frac{\tau}{\ln P}, \quad \tau \in (-\infty, \infty)$$

переводит одну из формул (26), (27) в другую.

Теперь мы отметим, что формулы (26), (27) проливают некоторый свет и на спектральный состав главного члена формулы Римана-Зигеля (8). А именно, сделаем

Замечание 7

А. Формулу (26) мы назовем спектральным представлением главного члена формулы Римана-Зигеля (8), в переменной τ. Спектр функции $Z_4(\tau)$ составляют частоты

$$\omega_n^{(1)} = \alpha\Omega(n) = \frac{\alpha}{\ln P} \ln \frac{P}{n}, \quad 1 \leqq n < P,$$

или

$$f_n^{(1)} = \frac{\omega_n^{(1)}}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi \ln P} \ln \frac{P}{n}$$

в герцах. Очевидно:

$$f_1^{(1)} > f_2^{(1)} > \ldots > 0, \tag{28}$$

где

$$f_1^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi} = W_1. \tag{29}$$

В. Формулу (27) мы назовем спектральным представлением главного члена формулы Римана-Зигеля (8), в переменной t. Спектр функции $Z_3(t)$ составляют частоты

$$\omega_n^{(2)} = \ln \frac{P}{n}$$

или

$$f_n^{(2)} = \frac{\omega_n^{(2)}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{P}{n}$$

в герцах. Очевидно:

$$f_1^{(2)} > f_2^{(2)} > \ldots > 0, \tag{30}$$

где

$$f_1^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \ln P = W_2. \tag{31}$$

Замечание 8. Из (28)—(31) следует, что

$$f_n^{(1)} \in (0, W_1\rangle, f_n^{(2)} \in (0, W_2\rangle, \ 1 \leqq n < P,$$

т.е. $Z_4(\tau)$, $Z_3(t)$ — функции с ограниченными (при фиксированном T) полосами частот.

Заключение. Поскольку (ср. (6), (31))

$$\frac{1}{2W} = \frac{1}{2W_2} = \frac{\pi}{\ln P}, \tag{32}$$

то, в силу (25), мы приходим к заключению, что для формулы Римана-Зигеля (8), фундаментальную роль играет промежуток Найквиста, с асимптотической длиной, равной (32).

II. Основные леммы

Пусть $\{g_\nu(\tau)\}$ — семейство последовательностей, определенных соотношением

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau)] = \frac{1}{2}(\pi\nu + \tau), \ \nu = 1, 2, \dots, \ \tau \in \langle -\pi, \pi\rangle, \tag{33}$$

(см. [7], стр. 68, ср. [8]).

Справедливы следующие леммы.

Лемма А

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} Z[g_\nu(\tau) + \varrho'']\,Z[g_\nu(\tau) + \varrho'] =$$
$$= \frac{4}{\pi}\,\frac{\sin\{(\varrho'' - \varrho')\ln P\}}{(\varrho'' - \varrho')\ln P}\,U\ln^2 P + O(U\ln P), \ \varrho' \neq \varrho'', \tag{34}$$

где O — оценка имеет место равномерно для $\varrho', \varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0\rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$ и

$$g_\nu = g_\nu(0), \ U = \sqrt{T}\ln^2 T, \ \varrho_0 = O\left(\frac{1}{\ln^{1-\varepsilon} T}\right), \ P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \tag{35}$$

($0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число).

Лемма В

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu Z[g_\nu(\tau) + \varrho'']\,Z[g_\nu(\tau) + \varrho'] = O(U\ln P), \tag{36}$$

равномерно для $\varrho', \varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0\rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

При доказательстве Леммы А и В мы используем следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 ([15]), стр. 78). Пусть $f(x)$ — действительная дифференцируемая функция на интервале (a, b), $f'(x)$ монотонна и $|f'(x)| \leqq A < 1$. Тогда

$$\sum_{a < n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx + O(1). \tag{37}$$

Лемма 2 ([15], стр. 73). Пусть $F(x)$ — действительная дифференцируемая функция, ее производная $F'(x)$ монотонна и $F'(x) \geqq m > 0$ [или $F'(x) \leqq -m < 0$] на всем интервале (a, b). Тогда

$$\left| \int_a^b e^{iF(x)} dx \right| \leqq \frac{4}{m}. \tag{38}$$

3. Доказательство Леммы А

Из формулы Римана-Зигеля (8), в силу (10), (35), получаем

$$Z(t) = 2 \sum_{n < P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta_1(t) - t \ln n\} + O(T^{-1/4} \ln^2 T), \; P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}. \tag{39}$$

Замечание 9. В случае надобности можно предположить, что P — целое число.

Далее, из (39), получаем:

$$Z[g_\nu(\tau) + \varrho''] Z[g_\nu(\tau) + \varrho'] = S + R_1 + R_2 + O(T^{-1/2} \ln^4 T), \tag{40}$$

где $g_\nu \in \langle T, T + U \rangle$ и

$$S = 4 \sum_{m, n < P}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\{\vartheta_1[g_\nu(\tau) + \varrho''] - [g_\nu(\tau) + \varrho''] \ln m\} \cdot \\ \cdot \cos\{\vartheta_1[g_\nu(\tau) + \varrho'] - [g_\nu(\tau) + \varrho'] \ln n\}. \tag{41}$$

Так как, в связи с главой V, невозможно пользоваться оценкой (см. [15], стр. 94, 109)

$$Z(t) = O(t^{1/6} \ln t), \tag{42}$$

то мы действуем (забегая несколько вперед, см. (51), (52), (60), (65)) следующим образом:

$$\sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} (R_1 + R_2) = O\left\{T^{-1/4} \ln T . \sqrt{U \ln T} \cdot \left(\sum_{g_\nu} S\right)^{1/2}\right\} =$$

$$= O(T^{-1/4} \ln T . \sqrt{U \ln T} \cdot \sqrt{U \ln^2 T}) = O(T^{-1/4} U \ln^{5/2} T), \tag{43}$$

равномерно для $\varrho', \varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

3.1. Прежде всего, в силу (10), (33), (35), имеем:

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau) + \varrho] = \vartheta_1[g_\nu(\tau)] + \vartheta_1'[g_\nu(\tau)]\,\varrho + \frac{1}{2}\,\vartheta_1''(T_1)\,\varrho^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\pi\nu + \tau) + \frac{1}{2}\,\varrho \ln \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi} + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

$$g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle, \ \varrho \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle, \ T_1 \in (T - \varrho_0, T + U + \varrho_0).$$

Далее,

$$\ln \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi} = \ln \frac{T}{2\pi} + \frac{g_\nu(\tau) - T}{T} + O\left(\frac{U^2}{T^2}\right).$$

Следовательно,

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau) + \varrho] = \frac{1}{2}(\pi\nu + \tau) + \varrho \ln P + \frac{g_\nu(\tau) - T}{2T}\,\varrho + O\left(\frac{U^2}{T^2}\right), \tag{44}$$

и отсюда, для $g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle$, получаем:

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau) + \varrho''] + \vartheta_1[g_\nu(\tau) + \varrho'] = \pi\nu + \tau + (\varrho'' + \varrho')\ln P +$$

$$+ \frac{g_\nu(\tau) - T}{2T}(\varrho'' + \varrho') + O\left(\frac{U^2}{T^2}\right),$$

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau) + \varrho''] - \vartheta_1[g_\nu(\tau) + \varrho'] = \tag{45}$$

$$= (\varrho'' - \varrho')\ln P + \frac{g_\nu(\tau) - T}{2T}(\varrho'' - \varrho') + O\left(\frac{U^2}{T^2}\right),$$

где O — оценки справедливы равномерно для $\varrho', \varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Теперь, для суммы S (см. (41)), получаем:

$$S = S_1 + S_2 + O(T^{-1/2} \ln^4 T), \tag{46}$$

где

$$S_1 = 2 \sum\sum_{m,\,n<P} \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos \Big\{ \pi\nu + \tau + (\varrho'' + \varrho') \ln P + \frac{g_\nu(\tau) - T}{2T} (\varrho'' + \varrho') -$$

$$- g_\nu(\tau) \ln(mn) - \varrho'' \ln m - \varrho' \ln n \Big\},$$

(47)

$$S_2 = 2 \sum\sum_{m,\,n<P} \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos \Big\{ (\varrho'' - \varrho') \ln P + \frac{g_\nu(\tau) - T}{2T} (\varrho'' - \varrho') - g_\nu(\tau) \ln \frac{m}{n} -$$

$$- \varrho'' \ln m + \varrho' \ln n \Big\}.$$

3.2. В силу (47) имеем (см. (35)):

$$S_{22} = S_2(m = n) = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{n} \cos \Big\{ (\varrho'' - \varrho') \ln \frac{P}{n} + \frac{g_\nu(\tau) - T}{2T} (\varrho'' - \varrho') \Big\} =$$

(48)

$$= 2 \sum_{n<P} \frac{1}{n} \cos \Big\{ (\varrho'' - \varrho') \ln \frac{P}{n} \Big\} + O\left(\frac{U}{T} \ln T\right) = S_{23} + O\left(\frac{U}{T} \ln T\right).$$

Пользуясь формулой Эйлера-Маклорена ([15], стр. 19) получаем (ср. [1], (59))

$$S_{23} = 2 \frac{\sin\{(\varrho'' - \varrho') \ln P\}}{\varrho'' - \varrho'} + O(1),\ \varrho' \neq \varrho'', \tag{49}$$

и следовательно,

$$S_{22} = 2 \frac{\sin\{(\varrho'' - \varrho') \ln P\}}{\varrho'' - \varrho'} + O(1),\ g_\nu(\tau) \in \langle T, T + U \rangle,\ \varrho' \neq \varrho'' \tag{50}$$

где O — оценка справедлива равномерно для $\varrho', \varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Поскольку (ср. [9], (59))

$$Q = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} 1 = \frac{1}{\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U^2}{T}\right) + O(1) = \frac{2}{\pi} U \ln P + O(\ln^4 T), \tag{51}$$

то (см. (50)):

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} S_{22} = \frac{4}{\pi} \frac{\sin\{(\varrho'' - \varrho') \ln P\}}{(\varrho'' - \varrho') \ln P} U \ln^2 P + O(U \ln P),\ \varrho' \neq \varrho'', \tag{52}$$

где O — оценка справедлива равномерно для $\varrho', \varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

3.3. Так как (см. (47))

$$S_{11} = S_1(m = n = 1) = 2(-1)^\nu \cos\left\{\tau + (\varrho'' + \varrho')\ln P + \frac{g_\nu(\tau) - T}{2T}(\varrho'' + \varrho')\right\} =$$

$$= 2(-1)^\nu \cos\left\{\tau + (\varrho'' + \varrho')\ln P\right\} + O\left(\frac{U}{T}\right),$$

то (см. (51)):

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} S_{11} = O\left(\frac{U^2 \ln T}{T}\right) = O(\ln^5 T), \tag{53}$$

равномерно для $\varrho', \varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Пусть теперь $mn \geqq 2$. Имеем ($g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle$):

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} S_1(mn \geqq 2) = \sum_{\substack{m,\, n < P \\ mn \geqq 2}}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \cos\{2\pi\Phi_1(\nu)\},$$

$$\Phi_1(\nu) = \frac{1}{2\pi}\left\{\pi\nu - g_\nu(\tau)\ln(mn) + \frac{g_\nu(\tau) - T}{2T}(\varrho'' + \varrho') + \tau + \right. \tag{54}$$

$$\left. + (\varrho'' + \varrho')\ln P - \varrho''\ln m - \varrho'\ln n\right\}.$$

Так как (см. (10), (33))

$$\frac{dg_\nu(\tau)}{d\nu} = \frac{\pi}{\ln \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}, \tag{55}$$

(здесь, как и в других аналогичных случаях, предполагается, что ν пробегает все значения соответствующего промежутка), то

$$\Phi_1'(\nu) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\ln(mn)}{\ln \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}} + \frac{\varrho'' + \varrho'}{4T}\cdot\frac{1}{\ln \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}},$$

$$\Phi_1''(\nu) = \left\{\frac{1}{2}\ln(mn) - \frac{\varrho'' + \varrho'}{4T}\right\}\cdot\frac{\pi}{g_\nu(\tau)\ln^3 \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}. \tag{56}$$

Из (56) следует, что

$$|\Phi_1'(\nu)| \leqq \frac{1}{2} + \varepsilon < 1, \ \Phi_1''(\nu) > 0. \tag{57}$$

Далее, поскольку при $g_\nu(\tau)\in\langle T,\ T+U\rangle$, $\varrho',\ \varrho''\in\langle -\varrho_0,\ \varrho_0\rangle$ имеем

$$\frac{|\varrho''+\varrho'|}{4T}\,\frac{1}{\ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}<\frac{A}{T\ln T},$$
$$\frac{1}{\ln P^2}\ln\frac{P^2}{mn}>\frac{1}{2\ln P}\ln\frac{P}{n}>\frac{1}{2\ln P}\ln\frac{P}{P-1}>\frac{1}{\sqrt{T}\ln T}, \tag{58}$$

(см. Замечание 3), то

$$\Phi_1'(\nu)>\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{\ln(mn)}{\ln P^2}+\frac{\varrho''+\varrho'}{4T}\cdot\frac{1}{\ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}>$$
$$>\frac{1}{4\ln P}\ln\frac{P^2}{mn}-\frac{A}{T\ln T}>\frac{1}{8\ln P}\ln\frac{P^2}{mn}>\frac{1}{8\ln P}\ln\frac{P}{n}. \tag{59}$$

Теперь, из (37), (38), в силу (57), (59), получаем оценку:

$$\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U}S_1(mn\geqq 2)=O\left\{\sum_{m,\,n<P}\sum\frac{\ln P}{\sqrt{mn}\,\ln\frac{P}{n}}\right\}=O(\sqrt{T}\ln^2 T), \tag{60}$$

равномерно для $\varrho',\ \varrho''\in\langle -\varrho_0,\ \varrho_0\rangle$, $\tau\in\langle -\pi,\ \pi\rangle$.

3.4. Пусть далее (см. (47), $g_\nu(\tau)\in\langle T,\ T+U\rangle$):

$$\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U}S_2(m\neq n)=2\sum_{\substack{m,\,n<P\\ m\neq n}}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U}\cos\{2\pi\Phi_2(\nu)\},$$
$$\Phi_2(\nu)=\frac{1}{2\pi}\left\{g_\nu(\tau)\ln\frac{m}{n}-\frac{g_\nu(\tau)-T}{2T}(\varrho''-\varrho')-(\varrho''-\varrho')\ln P+\varrho''\ln m-\varrho'\ln n\right\}. \tag{61}$$

Прежде всего

$$\Phi_2'(\nu)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{m}{n}-\frac{\varrho''-\varrho'}{2T}\right)\cdot\frac{1}{\ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}},$$
$$\Phi_2''(\nu)=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{m}{n}-\frac{\varrho''-\varrho'}{2T}\right)\frac{\pi}{g_\nu(\tau)\ln^3\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}. \tag{62}$$

Пусть $m > n$. Поскольку

$$\ln\frac{m}{n} \geqq \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{A}{\sqrt{T}},\ 1 \leqq n < P,$$

то, из (62), получаем:

$$|\Phi_2'(\nu)| < \frac{1}{4} + \varepsilon < 1,\ \Phi_2''(\nu) < 0. \tag{63}$$

Далее, (ср. (58), (59)),

$$\Phi_2'(\nu) \geqq \frac{1}{2}\left(\ln\frac{m}{n} - \frac{\varrho''-\varrho'}{2T}\right)\frac{1}{\ln P^2} > \frac{1}{8\ln P}\ln\frac{m}{n}\cdot$$

Так как аналогичная оценка получается и в случае $m < n$, то

$$|\Phi_2'(\nu)| > \frac{1}{8\ln P}\left|\ln\frac{m}{n}\right|. \tag{64}$$

Теперь, из (37), (38), в силу (63), (64), получаем оценку

$$\sum_{T\leqq g_\nu \leqq T+U} S_2(m\neq n) = O\left\{\sum_{\substack{m,\,n<P\\ m\neq n}}\sum \frac{\ln P}{\sqrt{mn}\left|\ln\frac{m}{n}\right|}\right\} = O(\sqrt{T}\ln^2 T), \tag{65}$$

равномерно для $\varrho', \varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0\rangle$, $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$.

3.5. Наконец, из (40), в силу (41), (43), (46), (47), (51)–(53), (60), (65), получаем соотношение

$$\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U} Z[g_\nu(\tau)+\varrho'']Z[g_\nu(\tau)+\varrho'] =$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{\sin\{(\varrho''-\varrho')\ln P\}}{(\varrho''-\varrho')\ln P}U\ln^2 P + O(U\ln P) + O(\sqrt{T}\ln^2 T),\ \varrho'\neq\varrho'',$$

где O — оценки справедливы равномерно для $\varrho', \varrho''\in\langle -\varrho_0, \varrho_0\rangle$, $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$, т.е. мы получили (34).

4. Доказательство Леммы B

Доказательство этой леммы пробегает точно как доказательство Леммы A, только надо учесть изменения связанные с наличием множителя $(-1)^\nu$.

Прежде всего (ср. (50), (51))

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu [S_{22} + S_1(m = n = 1)] = O(U \ln T). \tag{66}$$

Далее, сумме

$$\bar{S}_1 = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu S_1(mn \geqq 2) \tag{67}$$

соответствует функция (ср. (47), (54))

$$\Phi_3(\nu) = \frac{1}{2\pi}\left\{g_\nu(\tau)\ln(mn) - \frac{g_\nu(\tau) - T}{2T}(\varrho'' + \varrho') - \tau - (\varrho'' + \varrho')\ln P + \right.$$

$$\left. + \varrho'' \ln m + \varrho' \ln n\right\}.$$

Следовательно,

$$\Phi_3'(\nu) = \frac{1}{2}\left\{\ln(mn) - \frac{\varrho'' + \varrho'}{2T}\right\}\frac{1}{\ln\dfrac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}.$$

Отсюда получаем (ср. (58))

$$|\Phi_3'(\nu)| < \frac{1}{2} + \varepsilon < 1, \ \Phi_3''(\nu) < 0,$$

$$\Phi_3'(\nu) > \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(mn)\cdot\frac{1}{\ln\dfrac{g_\nu(\tau)}{2\pi}} \geqq \frac{\ln(mn)}{8\ln P} > \frac{\ln n}{8\ln P},$$

что приводит к оценке

$$\bar{S}_1 = O(\sqrt{T}). \tag{68}$$

Сумме

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu S_2(m \neq n) = \bar{S}_2$$

соответствует функция

$$\Phi_4(\nu) = \frac{1}{2\pi}\left\{\pi\nu - g_\nu(\tau)\ln\frac{m}{n} + \frac{g_\nu(\tau) - T}{2T}(\varrho'' - \varrho') + (\varrho'' - \varrho')\ln P - \right.$$

$$\left. - \varrho''\ln m + \varrho'\ln n\right\}.$$

Следовательно,

$$\Phi_4'(\nu) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left\{\ln\frac{m}{n} - \frac{\varrho'' - \varrho'}{2T}\right\} \frac{1}{\ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}$$

Отсюда получаем (пусть, например, $m > n$)

$$0 < \Phi_4'(\nu) < \frac{1}{2},\ \Phi_4''(\nu) \neq 0,\ \Phi_4'(\nu) > \frac{1}{4} - \varepsilon > \frac{1}{5},$$

что приводит к оценке

$$\bar{S}_2 = 0(\sqrt{T}). \tag{69}$$

Из (66)—(69) следует (36).

III. Квадратичный эффект для $Z(t)$ с использованием семейства последовательностей $\{g_{2\nu}(\tau)\}$

В этой главе мы получим аналоги квадратичного эффекта, выражаемого эмпирической формулой (3), для сигнала, определенного функцией

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

на большом промежутке: $t \in \langle T,\ T + U\rangle,\ U = \sqrt{T}\ln^2 T$. В качестве точек отсчета использованы значения $g_{2\nu}(\tau) \in \langle T,\ T + U\rangle$, (при любом фиксированном $\tau \in \langle -\pi,\ \pi\rangle$), обладающие асимптотическим свойством

$$g_{2\nu+2}(\tau) - g_{2\nu}(\tau) \sim \frac{\pi}{\ln P} = \frac{1}{2W},\ T \to \infty,$$

(ср. (32)). Показано, что замена точек отсчета $g_{2\nu}(\tau)$, равноотстоящими точками отсчета, для которых расстояние соседних членов равно точно длине промежутка Найквиста $1/2W$, приводит к большой добавочной ошибке в соответствующем квадратичном эффекте.

5. Квадратичный эффект относительно двух систем несвязных множеств

Сначала мы приведем некоторые следствия из основных Лемм А, В. Переходя в (34), (36) к пределу $\varrho'' \to \varrho' = \varrho$, получаем

Следствие 1.

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} Z^2[g_\nu(\tau) + \varrho] = \frac{4}{\pi} U \ln^2 P + O(U \ln P),$$
$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu Z^2[g_\nu(\tau) + \varrho] = O(U \ln P), \tag{70}$$

где O — оценки справедливы равномерно для $\varrho \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Теперь, из (70), получаем

Следствие 2

$$\sum_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu}(\tau) + \varrho] = \frac{2}{\pi} U \ln^2 P + O(U \ln P),$$
$$\sum_{T \leqq g_{2\nu+1} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu+1}(\tau) + \varrho] = \frac{2}{\pi} U \ln^2 P + O(U \ln P), \tag{71}$$

где O — оценки справедливы равномерно для $\varrho \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Пусть (ср. [9], стр. 25)

$$G_{2\nu}(x) = \{t\colon g_{2\nu}(-x) < t < g_{2\nu}(x),\ t \in \langle T, T+U \rangle\},\ x \in (0, \pi/2\rangle,$$
$$G_{2\nu+1}(y) = \{t\colon g_{2\nu+1}(-y) < t < g_{2\nu+1}(y),\ t \in \langle T, T+U \rangle\},\ y \in (0, \pi/2\rangle, \tag{72}$$
$$G_1(x) = \bigcup_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} G_{2\nu}(x), \qquad G_2(y) = \bigcup_{T \leqq g_{2\nu+1} \leqq T+U} G_{2\nu+1}(y).$$

Интегрированием первого соотношения в (71), $\varrho = 0$, по τ в промежутке $\langle -x, x \rangle$ а второго — в промежутке $\langle -y, y \rangle$, (см. [4], (50)—(53), [9], часть 8), получаем

Следствие 3

$$\int_{G_1(x)} Z^2(t)\,dt = \frac{2x}{\pi} U \ln P + O(U),$$
$$\int_{G_2(y)} Z^2(t)\,dt = \frac{2y}{\pi} U \ln P + O(U). \tag{73}$$

Далее, из (73), в силу (71), $\varrho = 0$, получаем

$$\int_{G_1(x)} Z^2(t)\,dt = \frac{x}{\ln P} \sum_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu}(\tau)] + O(U),$$

$$\int_{G_2(y)} Z^2(t)\,dt = \frac{y}{\ln P}\,ió \sum_{T \leqq g_{2\nu+1} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu+1}(\tau)] + O(U).$$

Поскольку (см. (71), $\varrho = 0$)

$$\sum_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu}(\tau)] \sim \sum_{T \leqq g_{2\nu+1} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu+1}(\tau)],$$

то имеет место

Теорема 1. Если $x \in (0, \pi/2\rangle$, $y \in (0, \pi/2\rangle$, то:

$$\begin{aligned} &\int_{G_1(x)} Z^2(t)\,dt \sim \frac{x}{\pi} \cdot \frac{\pi}{\ln P} \cdot \sum_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu}(\tau)], \\ &\int_{G_2(y)} Z^2(t)\,dt \sim \frac{y}{\pi} \cdot \frac{\pi}{\ln P} \cdot \sum_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu}(\tau)], \end{aligned} \tag{74}$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$, при $T \to \infty$.

Так как из (33) следует

$$g_{2\nu+2}(\tau) - g_{2\nu}(\tau) = \frac{\pi}{\ln P} + O\left(\frac{U}{T \ln^2 T}\right), \tag{75}$$

для $g_{2\nu}(\tau) \in \langle T, T+U\rangle$, то сделаем

Замечание 10. Асимптотические формулы (74) выражают новый тип квадратичного эффекта — относительно двух систем несвязных множеств $G_1(x)$, $G_2(y)$ — соответствующего точкам отсчета $g_{2\nu}(\tau) \in \langle T, T+U\rangle$, т.е. асимптотической длине промежутка Найквиста, равной $\pi/\ln P$, (ср. (32)).

6. Сравнение квадратичного эффекта для промежутка $\langle T, T+U\rangle$ с эмпирической формулой (3)

Напомним ([9], (13)), что

$$m\{G_1(x)\} \sim \frac{x}{\pi}\,U,\ m\{G_2(y)\} \sim \frac{y}{\pi}\,U.$$

Поскольку (см. (72)) $G_1(x) \cap G_2(y) = \emptyset$, то

$$m\left\{G_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\cup G_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = m\left\{G_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} + m\left\{G_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} \sim U$$

Теперь, сложением формул (74), $x = \pi/2$, $y = \pi/2$, получаем

Следствие 4

$$\int_T^{T+U} Z^2(t)\,dt \sim \frac{\pi}{\ln P}\cdot \sum_{T\leqq g_{2\nu}\leqq T+U} Z^2[g_{2\nu}(\tau)], \tag{76}$$

равномерно для $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$, при $T\to\infty$.

Замечание 11. Асимптотическое соотношение (76) выражает квадратичный эффект функции $Z(t)$, соответствующий точкам отсчета $g_{2\nu}(\tau)\in$ $\in\langle T, T+U\rangle$, т.е. асимптотической длине промежутка Найквиста, равной $\pi/\ln P$, (ср. (32), (75)).

Далее, явно отметим следующую особенность квадратичного эффекта (76).

Замечание 12. Сравнение формулы (76) с эмпирической формулой (3) приводит к следующей мысли: выразить квадратичный эффект (76) с помощью равноотстоящих точек, с расстоянием соседних точек равным точно длине промежутка Найквиста $\pi/\ln P$. Однако, в нашем случае — $U = \sqrt{T}\ln^2 T$ — соответствующее преобразование приводит к большой оценке добавочной ошибки, как мы это сейчас покажем.

Пусть

$$2\bar{\nu} = \min\{2\nu\colon g_{2\nu}\in\langle T, T+U\rangle\},$$

$$2\bar{\nu} + 2Q_1 = \max\{2\nu\colon g_{2\nu}\in\langle T, T+U\rangle\}.$$

Очевидно $2Q_1 \sim Q$, (см. (51)). Тогда (ср. [9], (45)—(49)):

$$g_{2\bar{\nu}+2l}(\tau) = g_{2\bar{\nu}}(\tau) + 2\omega l + O\left(\frac{Q_1 U}{T\ln^2 T}\right),\ 0\leqq l\leqq Q_1,\ 2\omega = \frac{\pi}{\ln P},$$

$$\sum_{T\leqq g_{2\nu}\leqq T+U} Z^2[g_{2\nu}(\tau)] = \sum_{l=0}^{Q_1} Z^2[g_{2\bar{\nu}}(\tau) + 2\omega l] + R_3,$$

где (см. также (17), (42), (51)):

$$R_3 = O\left(Q_1 . \max|ZZ'|\cdot\frac{Q_1 U}{T\ln^2 T}\right) = O(T^{5/6}\ln^9 T).$$

Это и есть оценка ошибки, упоминавшейся в Замечании 12.

Замечание 13. Относительно некоторых других аспектов квадратичного эффекта для функции $Z(t)$ см. работы [5], [6], [9]—[11].

IV. Аналоги теоремы КУН для $Z(t)$ в среднем квадратическом

7. Формулировка результатов

В направлении эмпирической формулы (2) мы докажем следующий результат.

Теорема 2 (основная). Для $g_\nu \in \langle T, T+U\rangle$, $b \in \langle -L/2, L/2\rangle$ имеет место:

$$\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau)+2\omega b] \overset{CK1}{=} \sum_{p=-L}^{L} \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau)+2\omega p], \tag{77}$$

в смысле дискретного среднего квадратического, т.е.

$$\frac{1}{Q} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \left\{ \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau)+2\omega b] - \sum_{p=-L}^{L} \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau)+2\omega p] \right\}^2 =$$

$$= O\left(\frac{1}{\ln^\varepsilon T}\right) = o(1),\ T \to \infty, \tag{78}$$

равномерно для $b \in \langle -L/2, L/2\rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$, где

$$\overset{*}{Z}(t) = \frac{Z(t)}{\sqrt{2\ln P}},\ 2\omega = \frac{\pi}{\ln P},\ U = \sqrt{T}\ln^2 T,\ L = [\ln^\varepsilon T],$$

$$Q = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} 1, \tag{79}$$

и $0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число.

Замечание 14. Соотношение (77), понимаемое в смысле (78), является аналогом эмпирической формулы (2) и соответствует длине промежутка Найквиста, равной (ср. (32)):

$$2\omega = \frac{\pi}{\ln P} = \frac{1}{2W}.$$

-Теперь мы получим некоторые следствия из Теоремы 2.

7.1. Прежде всего (см. (42), (79)):

$$F[g_\nu(\tau)] = \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau)+2\omega b] - \sum_{p=-L}^{L} \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau)+2\omega p] =$$

$$= O\{T^{1/6}(\ln T)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\},\ g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U\rangle.$$

Пусть (ср. (72))

$$G_\nu(x) = \{t\colon g_\nu(-x) < t < g_\nu(x),\ t \in \langle T,\ T+U \rangle\},\ x \in (0,\ \pi/2\rangle,$$
$$G(x) = \bigcup_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} G_\nu(x). \tag{80}$$

Так как (см. (33))

$$\left[\frac{dg_\nu(\tau)}{d\tau}\right]^{-1} = \ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi} = 2\ln P + O\left(\frac{U}{T}\right),\ g_\nu(\tau) \in \langle T,\ T+U \rangle,$$

то

$$\int_{-x}^{x} F^2[g_\nu(\tau)]\,d\tau = \int_{-x}^{x} F^2[g_\nu(\tau)] \cdot \left[\frac{dg_\nu(\tau)}{d\tau}\right]^{-1} \cdot \frac{dg_\nu(\tau)}{d\tau}\,d\tau =$$

$$= 2\ln P \,.\int_{-x}^{x} F^2[g_\nu(\tau)]\,\frac{dg_\nu(\tau)}{d\tau}\,d\tau + O\left(x\,.\max F^2 \cdot \frac{U}{T} \cdot \frac{1}{\ln T}\right) =$$

$$= 2\ln P \,.\int_{G_\nu(x)} F^2(t)\,dt + O(xT^{-2/3}U\ln^{2\varepsilon}T).$$

Далее, (см. (51), (80)),

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \int_{-x}^{x} F^2[g_\nu(\tau)]\,d\tau = 2\ln P \,.\int_{G(x)} F^2(t)\,\mathrm{d}t + O(xT^{-2/3}U^2\ln^{1+2\varepsilon}T). \tag{81}$$

Поскольку (см. (33)

$$g_\nu(x) - g_\nu(-x) = \frac{x}{\ln P} + O\left(\frac{xU}{T\ln^2 T}\right),\ g_\nu \in \langle T,\ T+U \rangle,$$

то для меры множества $G(x)$ получаем (см. также (51))

$$m\{G(x)\} = \frac{xQ}{\ln P}\left\{1 + O\left(\frac{U}{T\ln T}\right)\right\},$$

т.е.

$$Q = \frac{1}{x}\,m\{G(x)\}\,.\ln P\,.\left\{1 + O\left(\frac{U}{T\ln T}\right)\right\}. \tag{82}$$

Теперь, интегрируя соотношение (78) по τ в промежутке $\langle -x,\ x \rangle$, в силу (81), (82), получаем

$$2\ln P\,.\int_{G(x)} F^2(t)\,dt + O(xT^{-2/3}U^2\ln^{1+2\varepsilon}T) = O\{m\{G(x)\}\,.\ln^{1-\varepsilon}T\}$$

т.е.

$$\frac{1}{m\{G(x)\}}\int_{G(x)} F^2(t)\,dt + O\left(\frac{U\ln^{2\varepsilon}T}{T^{2/3}}\right) = O\left(\frac{1}{\ln^{\varepsilon}T}\right). \tag{83}$$

7.2. Из (83) получаем такое следствие из Теоремы 2.

Следствие 5. Для $t\in G(x)$, $b\in\langle -L/2,\ L/2\rangle$, $x\in(0,\ \pi/2\rangle$ имеет место:

$$\overset{*}{Z}(t+2\omega b)\overset{CK2}{=}\sum_{p=-L}^{L}\frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)}\overset{*}{Z}(t+2\omega p)$$

в смысле среднего квадратического по несвязному множеству $G(x)$, т.е.

$$\frac{1}{m\{Gx)\}}\int_{G(x)}\left\{\overset{*}{Z}(t+2\omega b)-\sum_{p=-L}^{L}\frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)}\overset{*}{Z}(t+2\omega p)\right\}^2 dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{\ln^{\varepsilon}T}\right) = o(1),\ T\to\infty,$$

равномерно для $b\in\langle -L/2,\ L/2\rangle$.

Так как, далее, (см. (80)),

$$m\left\{G\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = U,$$

то из Следствия 5 получаем

Следствие 6. Для $t\in\langle T,\ T+U\rangle$, $b\in\langle -L/2,\ L/2\rangle$ имеет место:

$$\overset{*}{Z}(t+2\omega b)\overset{CK}{=}\sum_{p=-L}^{L}\frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)}\overset{*}{Z}(t+2\omega p)$$

в смысле среднего квадратического, т.е.

$$\frac{1}{U}\int_{T}^{T+U}\left\{\overset{*}{Z}(t+2\omega b)-\sum_{p=-L}^{L}\frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)}\overset{*}{Z}(t+2\omega p)\right\}^2 dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{\ln^{\varepsilon}T}\right) = o(1),\ T\to\infty,$$

равномерно для $b\in\langle -L/2,\ L/2\rangle$.

В последующих частях этой главы помещено доказательство Теоремы 2.

8. Квазиортонормированная система векторов

Если

$$\varrho'' = 2\omega p,\ \varrho' = 2\omega p';\ p,\ p' = -L,\ -L+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, L,$$

то из (34), (70), в силу (51), (79), получаем

Следствие 7

$$\frac{1}{Q}\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega p]\,\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega p'] = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{\ln T}\right), & p \neq p', \\ 1 + O\left(\dfrac{1}{\ln T}\right), & p = p', \end{cases} \tag{84}$$

где O — оценки справедливы равномерно для $p, p' \in \langle -L, L \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Далее, совокупность значений

$$\frac{1}{\sqrt{Q}}\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho],\ g_\nu \in \langle T, T+U \rangle, \tag{85}$$

назовем вектором (конечно, это вектор функция, определенная для $\varrho \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и выражение

$$\frac{1}{Q}\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho']\,\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho'']$$

— скалярным произведением векторов

$$\frac{1}{\sqrt{Q}}\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho'],\ \frac{1}{\sqrt{Q}}\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho'']. \tag{86}$$

Замечание 15. В силу (84), систему векторов

$$\frac{1}{\sqrt{Q}}\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega p],\ p = -L,\ -L+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, L \tag{87}$$

назовем квазиортонормированной системой векторов.

Итак, нами построено линейное пространство Q — мерных векторов (85), в котором скалярное произведение векторов (86) определено по формуле

$$\left(\frac{1}{\sqrt{Q}}\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho'],\ \frac{1}{\sqrt{Q}}\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho'']\right) =$$

$$= \frac{1}{Q}\cdot\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho']\,\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho'']$$

и, следовательно, квадрат нормы вектора определен по формуле

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{Q}} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho] \right\|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{Q}} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho], \frac{1}{\sqrt{Q}} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + \varrho] \right) =$$

$$= \frac{1}{Q} \cdot \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T + U} \overset{*}{Z}{}^2[g_\nu(\tau) + \varrho].$$

В этом линейном пространстве обнаружена система $2L + 1$ квазиортонормированных векторов (87).

9. Коэффициенты Фурье вектора

Возьмем следующий вектор

$$\frac{1}{\sqrt{Q}} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega b], \; b \in \left\langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right\rangle. \tag{88}$$

Коэффициенты Фурье вектора (88) относительно квазиортонормированной системы векторов (87), мы определим так:

$$F_p = F_p(b) = \left(\frac{1}{\sqrt{Q}} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega b], \frac{1}{\sqrt{Q}} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega p] \right). \tag{89}$$

Полагая в (34) и(70), $\varrho'' = 2\omega b$, $\varrho' = 2\omega p$, (см. также (51), (79)), получаем следующие выражения для коэффициентов Фурье:

$$F_p = \frac{1}{Q} \cdot \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T + U} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega b] \, \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega p] =$$

$$= \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} + O\left(\frac{1}{\ln T}\right), \; p = -L, -L+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, L, \tag{90}$$

при этом предполагаем, что

$$\left. \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \right|_{b=p} = 1.$$

Главные члены в (90):

$$\bar{F}_p = \bar{F}_p(b) = \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)},$$

назовем асимптотическими коэффициентами Фурье вектора (88). Очевидно:

$$\bar{F}_p(b) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{p+1}}{p-b} \sin \pi,b, \; b \neq p, \\ 1, \; b = p, \\ 0, \; b = q, \; q \neq p. \end{cases} \tag{91}$$

10. Лемма об асимптотических коэффициентах Фурье $\bar{F}_p(b)$

Сначала мы приведем следующую лемму.

Лемма 3. Для $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$, $b \neq p$ имеет место:

$$\sum_{p=-L}^{L} \frac{1}{(p-b)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi b} + O\left(\frac{1}{L}\right), \tag{92}$$

где O — оценка справедлива равномерно для $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$.

Доказательство. Методом контурного интегрирования по образцу [14], стр. 135, 136, получается формула

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p-b)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi b}, \; b \neq p. \tag{93}$$

Так как $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$, то

$$\sum_{p=-\infty}^{-L-1} \frac{1}{(p-b)^2}, \; \sum_{p=L+1}^{\infty} \frac{1}{(p-b)^2} = O\left(\frac{1}{L}\right),$$

равномерно для $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$ и (92) следует из (93).

Далее, справедлива

Лемма 4. Для $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$ имеет место:

$$\sum_{p=-L}^{L} \bar{F}_p^2(b) = 1 + O\left(\frac{1}{L}\right), \tag{94}$$

где O — оценка справедлива равномерно для $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$.

Доказательство.

А. Если $b = p_0 \in \langle -L/2, L/2 \rangle$, где p_0 — целое число, то очевидно (см. (91)):

$$\sum_{p=-L}^{L} \bar{F}_p^2(p_0) = \bar{F}_{p_0}(p_0) = 1. \tag{95}$$

В. Теперь предположим, что $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$, $b \neq p$. Тогда

$$b = [b] + \alpha = q + \alpha; \; 0 < \alpha < 1, \; -\frac{L}{2} - 1 < q < \frac{L}{2}. \tag{96}$$

Имеем (см. (91)):

$$\sum_{p=-L}^{L} \bar{F}_p^2(b) = \frac{1}{\pi^2}\sin^2\pi b \cdot \sum_{p=-L}^{L} \frac{1}{(p-b)^2} = \frac{1}{\pi^2}\sin^2\pi\alpha \cdot \sum_{r=-L-q}^{L-q} \frac{1}{(r-\alpha)^2}.$$

Если $q \geqq 0$, то

$$\sum_{r=-L-q}^{L-q} = \sum_{r=-L-q}^{-L+q-1} + \sum_{r=-L+q}^{L-q}.$$

Так как (см. (96)):

$$\frac{1}{\pi^2}\sin^2\pi\alpha \cdot \sum_{r=-L-q}^{-L+q-1} \frac{1}{(r-\alpha)^2} = O\left(\frac{1}{L-q-1+\alpha}\right) = O\left(\frac{1}{L}\right),$$

равномерно для $q \in \langle 0, L/2 \rangle$, $\alpha \in (0, 1)$ и (см. (92))

$$\frac{1}{\pi^2}\sin^2\pi\alpha \cdot \sum_{r=-L+q}^{L-q} \frac{1}{(r-\alpha)^2} = 1 + O\left(\frac{1}{L-q}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{L}\right),$$

где O — оценка справедлива равномерно для $q \in \langle 0, L/2 \rangle$, $\alpha \in (0, 1)$, то:

$$\sum_{p=-L}^{L} \bar{F}_p^2(b) = 1 + O\left(\frac{1}{L}\right),\ b \in \left(0, \frac{L}{2}\right\rangle,\ b \neq p, \tag{97}$$

где O — оценка справедлива равномерно для $b \in \langle 0, L/2 \rangle$.

Если $q < 0$, то

$$\sum_{r=-L-q}^{L-q} = \sum_{r=-L-q}^{L+q} + \sum_{r=L+q-1}^{L-q}$$

и, аналогично случаю $q \geqq 0$, получаем соотношение:

$$\sum_{p=-L}^{L} \bar{F}_p^2(b) = 1 + O\left(\frac{1}{L}\right),\ b \in \left\langle -\frac{L}{2}, 0\right),\ b \neq p, \tag{98}$$

где O — оценка справедлива равномерно для $b \in \langle -L/2, 0 \rangle$.

Следовательно, соотношения (95), (97), (98) доказывают Лемму 4.

Наконец, из Леммы 4, с помощью неравенства Коши-Буняковского, получаем

Следствие 8

$$\sum_{p=-L}^{L} |\bar{F}_p(b)| = O(\sqrt{L}), \tag{99}$$

равномерно для $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$.

11. Квадрат нормы полинома Фурье

Полином Фурье, соответствующий вектору (88), определим следующим образом:

$$P_{2L+1} = P_{2L+1}(\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega b]) = \sum_{p=-L}^{L} \bar{F}_p(b) \,.\, \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega p]. \tag{100}$$

Теперь покажем, что вектор

$$\frac{1}{\sqrt{Q}} P_{2L+1}$$

принадлежит квазиединичной сфере. А именно, справедлива

Лемма 5. Для $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$ имеет место:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{Q}} P_{2L+1} \right\|^2 = 1 + O\left(\frac{1}{L}\right), \tag{101}$$

где O — оценка справедлива равномерно для $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Доказательство. В силу (79), (84), (94), (99), (100) имеем:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{Q}} P_{2L+1} \right\|^2 = \frac{1}{Q} (P_{2L+1}, P_{2L+1}) = \frac{1}{Q} \sum_{g_\nu} P_{L+1}^2 =$$

$$= \frac{1}{Q} \sum_{g_\nu} \sum_p \sum_q \bar{F}_p \bar{F}_q \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega p] \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega q] =$$

$$= \sum_p \sum_q \bar{F}_p \bar{F}_q \cdot \frac{1}{Q} \sum_{g_\nu} \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega p] \overset{*}{Z}[g_\nu(\tau) + 2\omega q] =$$

$$= \sum_p \sum_q \bar{F}_p \bar{F}_q \cdot \left\{ \delta_{pq} + O\left(\frac{1}{\ln T}\right) \right\} =$$

$$= \sum_p \bar{F}_p^2 + O\left(\frac{1}{\ln T} \cdot \sum_{p \neq q} \sum |\bar{F}_p|\,|\bar{F}_q| \right) =$$

$$= \sum_p \bar{F}_p^2 + O\left\{ \frac{1}{\ln T} \left(\sum_p |\bar{F}_p| \right)^2 \right\} = 1 + O\left(\frac{1}{L}\right) + O\left(\frac{L}{\ln T}\right) =$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{L}\right).$$

12. Завершение доказательства Теоремы 2

Рассмотрим среднее квадратическое отклонение Δ следующих двух векторов

$$\frac{1}{\sqrt{Q}}\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau)+2\omega b],\ \frac{1}{\sqrt{Q}}P_{2L+1},$$

где $b\in\langle -L/2,\ L/2\rangle$. Имеем:

$$\Delta^2=\frac{1}{Q}\sum_{g_\nu}\{\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau)+2\omega b]-P_{2L+1}\}^2=\frac{1}{Q}\sum_{g_\nu}\overset{*}{Z}{}^2[g_\nu(\tau)+2\omega b]+\frac{1}{Q}\sum_{g_\nu}P^2_{2L+1}-$$

$$-\frac{2}{Q}\sum_{g_\nu}\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau)+2\omega b]\,P_{2L+1}=R_4+R_5-R_6.$$

Далее:
в силу (51), (70), (79),

$$R_4=1+O\left(\frac{1}{\ln T}\right),$$

в силу (101),

$$R_5=1+O\left(\frac{1}{L}\right),$$

в силу (79), (90), (94), (99), (100),

$$R_6=2\sum_p\bar{F}_p\cdot\frac{1}{Q}\sum_{g_\nu}\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau)+2\omega b]\,\overset{*}{Z}[g_\nu(\tau)+2\omega p]=$$

$$=2\sum_p\bar{F}_pF_p=2\sum_p\bar{F}_p^2+O\left(\frac{1}{\ln T}\sum_p|\bar{F}_p|\right)=$$

$$=2+O\left(\frac{1}{L}\right)+O\left(\frac{\sqrt{L}}{\ln T}\right)=2+O\left(\frac{1}{L}\right).$$

Следовательно,

$$\Delta^2=O\left(\frac{1}{L}\right),$$

равномерно для $b\in\langle -L/2,\ L/2\rangle$, $\tau\in\langle -\pi,\ \pi\rangle$, т.е. (78).

V. Ансамбль функций, получающихся фазовой модуляцией главного члена формулы Римана-Зигеля

13. Обобщение результатов на ансамбль $Z_{\varphi}(t)$

Пусть

$$\varphi_n \in \langle -\pi, \pi \rangle, \ n = 1, \dots, P-1. \tag{102}$$

Совершая в формуле (39) преобразование

$$\cos\{\vartheta_1(t) - t\ln n\} \to \cos\{\vartheta_1(t) - t\ln n + \varphi_n\}, \ n = 1, \dots, P-1,$$

мы получаем следующий ансамбль функций:

$$Z_{\varphi}(t) = 2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta_1(t) - t\ln n + \varphi_n\} + O(T^{-1/4}\ln^2 T), \tag{103}$$

$$t \in \langle T, T+U \rangle, \ U = \sqrt{T}\ln^2 T.$$

Значит, индивидуальная функция $Z_{\bar{\varphi}}(t)$ ансамбля (103), получается фазовой модуляцией главного члена в формуле (39) с помощью вектора $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_{P-1})$, компоненты которого удовлетворяют условию (102).

13.1. Поскольку произведению

$$Z_{\bar{\varphi}}[g_{\nu}(\tau) + \varrho''] \, Z_{\bar{\varphi}}[g_{\nu}(\tau) + \varrho']$$

соответствуют суммы (ср. (47))

$$\bar{S}_1 = 2\sum\sum_{m,n<P} \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\{\pi\nu + \tau + (\varrho'' + \varrho')\ln P + \frac{g_{\nu}(\tau) - T}{2T}(\varrho'' + \varrho') -$$

$$- g_{\nu}(\tau)\ln(mn) - \varrho''\ln m - \varrho'\ln n + \bar{\varphi}_m + \bar{\varphi}_n\},$$

$$\bar{S}_2 = 2\sum\sum_{m,n<P} \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\left\{(\varrho'' - \varrho')\, ln\mathrm{P} + \frac{g_{\nu}(\tau) - T}{2T}(\varrho'' - \varrho') - g_{\nu}(\tau)\ln\frac{m}{n} - \right.$$

$$\left. - \varrho''\ln m - \varrho'\ln n + \bar{\varphi}_m - \bar{\varphi}_n \right\},$$

и следовательно $\bar{S}_{22} = S_{22} = S_2(m=n)$, то справедливы соответсвующие обобщения основных Лемм A, B.

Лемма $\bar{\mathrm{A}}$. Для любой функции $Z_{\bar{\varphi}}(t)$, входящей в ансамбль $Z_{\varphi}(t)$, имеет место:

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} Z_{\bar{\varphi}}[g_\nu(\tau) + \varrho''] Z_{\bar{\varphi}}[g_\nu(\tau) + \varrho'] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{\sin\{(\varrho'' - \varrho')\ln P\}}{(\varrho'' - \varrho')\ln P} U \ln^2 P + O(U \ln P),\ \varrho' \neq \varrho'', \tag{104}$$

где

$$U = \sqrt{T}\ln^2 T,\ \varrho',\ \varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle,\ \varrho_0 = O\left(\frac{1}{\ln^{1-\varepsilon} T}\right)$$

и O — оценка справедлива равномерно для $\varrho', \varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $\bar{\varphi}_n \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $n = 1, \dots, P-1$.

Лемма $\bar{\mathrm{B}}$. Для любой функции $Z_{\bar{\varphi}}(t)$, входящей в ансамбль $Z_\varphi(t)$, имеет место:

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu Z_{\bar{\varphi}}[g_\nu(\tau) + \varrho''] Z_{\bar{\varphi}}[g_\nu(\tau) + \varrho'] = O(U \ln P),$$

равномерно для $\varrho', \varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $\bar{\varphi}_n \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $n = 1, \dots, P-1$.

Значит, справедливы и соответствующие обобщения результатов, основанных на Леммах А, В. Справедливы, например, следующие результаты.

Следствие $\bar{4}$. Для любой функции $Z_{\bar{\varphi}}(t)$, входящей в ансамбль $Z_\varphi(t)$, имеет место:

$$\int_T^{T+U} \{Z_{\bar{\varphi}}(t)\}^2\, dt \sim \frac{\pi}{\ln P} \cdot \sum_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} \{Z_{\bar{\varphi}}[g_{2\nu}(\tau)]\}^2,$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $\bar{\varphi}_n \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $n = 1, \dots, P-1$, при $T \to \infty$.

Следствие $\bar{6}$. Для любой функции $Z_{\bar{\varphi}}(t)$, входящей в ансамбль $Z_\varphi(t)$, при $t \in \langle T, T+U \rangle$, $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$, имеет место:

$$\overset{*}{Z}_{\bar{\varphi}}(t + 2\omega b) \overset{CK}{=} \sum_{p=-L}^{L} \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \overset{*}{Z}_{\bar{\varphi}}(t + 2\omega p)$$

в смысле среднего квадратического, т.е.

$$\frac{1}{U}\int_T^{T+U} \left\{ \overset{*}{Z}_{\bar{\varphi}}(t + 2\omega b) - \sum_{p=-L}^{L} \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \overset{*}{Z}_{\bar{\varphi}}(t + 2\omega p) \right\}^2 dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{\ln^\varepsilon T}\right) = o(1),\ T \to \infty,$$

равномерно для $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$, $\bar{\varphi}_n \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $n = 1, \dots, P-1$.

13.2. Явно отметим, что получение соотношений типа (104) уже для $U = T^{5/12 + \varepsilon}$, $0 < \varepsilon$, связано с нетривиальной оценкой тригонометрической суммы, например, следующего типа:

$$\sum_{n=1}^{P-1} e^{i\{(g_\nu(\tau) + \varrho)\ln n + \bar{\varphi}_n\}}. \tag{105}$$

Замечание 16. Вопрос о подходящей оценке тригонометрической суммы (105) нужно считать исключительно трудным вопросом, поскольку поведение последовательности $\{\bar{\varphi}_n\}_{n=1}^{P-1}$ может оказаться очень сложным. Например

$$\bar{\varphi}_n = \bar{\varphi}_n(a) = \frac{\pi}{a}\mu(n), \qquad |a| \geqq 1,$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, a — любое фуксированное значение из указанного промежутка.

14. Асимптотическая стационарность ансамбля $\overset{*}{Z}_\varphi(t)$

14.1. Полагая в формуле (39) $t = g_\nu(\tau) + \varrho$, в силу (44) получаем

$$\begin{aligned} Z[g_\nu(\tau) + \varrho] = 2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\Big\{\varrho\ln\frac{P}{n} + \frac{1}{2}(\pi\nu + \tau) - g_\nu(\tau)\ln n + \\ + \frac{g_\nu(\tau) - T}{2T}\varrho\Big\} + O(T^{-1/4}\ln^2 T). \end{aligned} \tag{106}$$

Пусть φ_n, $n = 1, \dots, P-1$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные в промежутке $\langle -\pi, \pi\rangle$, т.е. плотность вероятности $w(\varphi_n)$ случайной величины φ_n равна

$$w(\varphi_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & \varphi_n \in \langle -\pi, \pi\rangle, \\ 0, & \varphi_n \notin \langle -\pi, \pi\rangle. \end{cases} \tag{107}$$

и плотность вероятности совместного распределения случайных величин $\varphi_1, \dots, \varphi_{P-1}$ равна

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_{P-1}) = \prod_{n=1}^{P-1} w(\varphi_n). \tag{108}$$

Теперь мы определим, с помощью формулы (106), (см. (79)), случайный процесс, следующим образом:

$$\overset{*}{Z}_\varphi[g_\nu(\tau)+\varrho]=\frac{2}{\sqrt{2\ln P}}\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(\varrho\ln\frac{P}{n}+\Lambda_3+\varphi_n\right)+O(T^{-1/4}\ln^{3/2}T), \tag{109}$$

где

$$\Lambda_3=\frac{1}{2}(\pi\nu+\tau)-g_\nu(\tau)\ln n+\frac{g_\nu(\tau)-T}{2T}\varrho,$$
$$g_\nu(\tau)\in\langle T,\ T+U\rangle,\ \varrho\in\langle-\varrho_0,\ \varrho_0\rangle,\ \tau\in\langle-\pi,\ \pi\rangle. \tag{110}$$

Замечание 17. Любому вектору $\bar{\varphi}=(\bar{\varphi}_1,\ldots,\bar{\varphi}_{P-1})$, удовлетворяющему условию (102), соответствует реализация случайного процесса (109). Значит, совокупность всех реализаций $\overset{*}{Z}_{\bar{\varphi}}[g_\nu(\tau)+\varrho]$ случайного процесса (109), совпадет с ансамблем $Z_\varphi[g_\nu(\tau)+\varrho]$, (см. (103), $t=g_\nu(\tau)+\varrho$, помноженным на $1/\sqrt{2\ln P}$.

14.2. В этой части мы получим математическое ожидание и автокорреляционную функцию случайного процесса (109).

Так как (см. (107))

$$M\left[\cos\left(\varrho\ln\frac{P}{n}+\Lambda_3+\varphi_n\right)\right]=0,\qquad n=1,\ldots,P-1,$$

(M — математическое ожидание), то

$$M[\overset{*}{Z}_\varphi[g_\nu(\tau)+\varrho]]=O(T^{-1/4}\ln^{3/2}T)=M_0, \tag{111}$$

для любого сечения случайного процесса (109), (сечение — это случайная величина, соответствующая допустимым фиксированным значениям ν, τ, ϱ).

Поскольку (ср. (40), (47), (48)),

$$\overset{*}{Z}_\varphi[g_\nu(\tau)+\varrho'']\overset{*}{Z}_\varphi[g_\nu(\tau)+\varrho']=\frac{1}{\ln P}\sum_m\sum_n\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left(\varrho''\ln\frac{P}{m}+\varrho'\ln\frac{P}{n}+\right.$$
$$\left.+\Lambda_3(m,\varrho'')+\Lambda_3(n,\varrho')+\varphi_m+\varphi_n\right)+$$
$$+\frac{1}{\ln P}\sum_{m\neq n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left(\varrho''\ln\frac{P}{m}-r'\ln\frac{P}{n}+\Lambda_3(m,\varrho'')-\Lambda_3(n,\varrho')+\varphi_m-\varphi_n\right)+$$
$$+\frac{1}{\ln P}\sum_n\frac{1}{n}\cos\left\{(\varrho''-\varrho')\ln\frac{P}{n}\right\}+O\left(\frac{U}{T}\right)+O(T^{-1/12}\ln^{5/12}T)$$

и, далее, (см. (107), (108)),

$$M\left[\cos\left(\varrho''\ln\frac{P}{m}+\varrho'\ln\frac{P}{n}+\Lambda_3(m,\varrho'')+\Lambda_3(n,\varrho')+\varphi_m+\varphi_n\right)\right]=0,$$

$$M\left[\cos\left(\varrho''\ln\frac{P}{m}-\varrho'\ln\frac{P}{n}+\Lambda_3(m,\varrho'')-\Lambda_3(n,\varrho')+\varphi_m-\varphi_n\right)\right]=0,\ m\neq n$$

то, для автокорреляционной функции K получим следующее выражение (ср. (41), (43), (48), (50)):

$$\begin{aligned} &K[g_\nu(\tau)+\varrho'', g_\nu(\tau)+\varrho']=\\ &=M[(\overset{*}{Z}_\varphi[g_\nu(\tau)+\varrho'']-M_0)\,.\,(\overset{*}{Z}_\varphi[g_\nu(\tau)+\varrho']-M_0)]=\\ &=\frac{1}{\ln P}\sum_{n<P}\frac{1}{n}\cos\left\{(\varrho''-\varrho')\ln\frac{P}{n}\right\}+O(T^{-1/2}\ln^{5/2}T)=\\ &=\frac{\sin\{(\varrho''-\varrho')\ln P\}}{(\varrho''-\varrho')\ln P}+O\left(\frac{1}{\ln P}\right)=K_1(\varrho''-\varrho')+O\left(\frac{1}{\ln T}\right). \end{aligned} \tag{112}$$

Итак, мы получили следующие характеристики случайного процесса $\overset{*}{Z}_\varphi[g_\nu(\tau)+\varrho]$, (см. (111), (112)):

A. математическое ожидание любого его сечения стремится к нулю при $T\to\infty$,

B. автокорреляционная функция K допускает представление

$$K=K_1(\varrho''-\varrho')+o(1),\ T\to\infty.$$

Следовательно, в силу определения асимптотической стационарности (см. [11]) мы сделаем

Замечание 18. $\overset{*}{Z}_\varphi[g_\nu(\tau)+\varrho]$ является асимптотически стационарным процессом.

15. Асимптотическая эргодичность ансамбля $\overset{*}{Z}_\varphi(t)$

Напомним, что свойства (111), (112) были получены усреднением по ансамблю реализаций случайного процесса $\overset{*}{Z}_\varphi[g_\nu(\tau)+\varrho]$, т.е. мы воспользовались вероятностной структурой этого процесса. Теперь мы попробуем получить асимптотические соотношения (111), (112) усреднением по любой, но достаточно длинной реализации случайного процесса $\overset{*}{Z}_{\varphi}[g_\nu(\tau) + \varrho]$.

Пусть $\overset{*}{Z}_{\bar{\varphi}}$ — любая, но фиксированная, реализация случайного процесса $\overset{*}{Z}_{\varphi}$.

15.1. Оценим среднее значение (см. (109), (110)):

$$\bar{M} = \frac{1}{Q} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \overset{*}{Z}_{\bar{\varphi}}[g_\nu(\tau) + \varrho] =$$

$$= \frac{2}{Q\sqrt{2\ln P}} \sum_{2 \leqq n < P} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \cos\{2\pi\Phi_5(\mu)\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln T}}\right),$$

где

$$\Phi_5(\nu) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\pi\nu - g_\nu(\tau)\ln n + \frac{\varrho}{2T} g_\nu(\tau) + \varrho\ln\frac{P}{n} + \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{2}\varrho + \bar{\varphi}_n\right\}.$$

Так как

$$\Phi_5'(\nu) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln n - \frac{\varrho}{2T}\right)\frac{1}{\ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}},$$

$$\Phi_5''(\nu) = \frac{1}{2}\left(\ln n - \frac{\varrho}{2T}\right)\frac{\pi}{g_\nu(\tau)\ln^3\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}},$$

то (ср. (56)—(59), $g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle$)

$$|\Phi_5'(\nu)| < \frac{1}{4}, \quad \Phi_5''(\nu) > 0,$$

$$\Phi_5'(\nu) \geqq \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{\ln n}{\ln P} + O\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{4\ln P}\ln\frac{P}{n} + O\left(\frac{1}{T}\right) > \frac{1}{8\ln P}\ln\frac{P}{n}.$$

Теперь, по Леммам 1, 2, получаем оценку

$$\bar{M} = O\left(\frac{1}{Q\sqrt{\ln T}}\sum_{n<P}\frac{\ln P}{\sqrt{n}\ln\frac{P}{n}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln T}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{\ln T}}{Q} \cdot T^{1/4} \ln T\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln T}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln T}}\right),$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $\varrho \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\bar{\varphi}_n \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $n = 1, \ldots, P-1$. Значит,

$$\bar{M} = o(1),\ T \to \infty. \tag{113}$$

Итак (ср. (111), (113)), справедлива

Лемма 6

$$M_0 \sim \bar{M} = o(1),\ T \to \infty, \tag{114}$$

равномерно для $\varrho \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $\bar{\varphi}_n \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $n = 1, \ldots, P-1$.

В силу (114) и соответствующего определения из работы [11], делаем следующее

Замечание 19. $\overset{*}{Z}_{\varphi}[g_\nu(\tau) + \varrho]$ является асимптотически эргодическим процессом по отношению к математическому ожиданию.

15.2. Для среднего значения

$$\bar{K} = \frac{1}{Q} \cdot \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \overset{*}{Z}_{\bar{\varphi}}[g_\nu(\tau) + \varrho''] \overset{*}{Z}_{\bar{\varphi}}[g_\nu(\tau) + \varrho'],$$

в силу (104), (см. (51), (79)), получаем

$$\bar{K} = \frac{\sin\{(\varrho'' - \varrho') \ln P\}}{(\varrho'' - \varrho') \ln P} + O\left(\frac{1}{\ln T}\right), \tag{115}$$

где O — оценка справедлива равномерно для ϱ', $\varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $\bar{\varphi}_n \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $n = 1, \ldots, P-1$. Итак, (ср. (112), (115)), имеет место

Лемма 7

$$K \sim \bar{K} = \frac{\sin\{(\varrho'' - \varrho') \ln P\}}{(\varrho'' - \varrho') \ln P} + o(1), \quad T \to \infty, \tag{116}$$

равномерно для ϱ', $\varrho'' \in \langle -\varrho_0, \varrho_0 \rangle$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $\bar{\varphi}_n \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $n = 1, \ldots, P-1$.

В силу (116) и соответствующего определения из [11], сделаем

Замечание 20. $\overset{*}{Z}_{\varphi}[g_\nu(\tau) + \varrho]$ является асимптотически эргодическим процессом по отношению к автокорреляционной функции.

Наконец, в силу Замечаний 19, 20 и соответствующего определения из [11], справедлива

Теорема 3. Случайный процесс $\overset{*}{Z}_{\varphi}[g_\nu(\tau) + \varrho]$, (см. (109)), является асимптотически эргодическим процессом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мозер, Ян: Об одной автокорреляционной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 37 (1980), 121—134.
2. Мозер, Ян: Об одной квазиортогональной системе векторов в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 38 (1981), 87—98.
3. Мозер, Ян: О корнях уравнения $Z'(t) = 0$, Acta Arith., Vol. 40 (1981), 79—89.
4. Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана-Зигеля, Acta Arith., Vol. 42 (1982), 1—10.
5. Мозер, Ян: Об одной лемме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 42—43 (1983), 7—26.
6. Мозер, Ян: Улучшение теоремы Харди-Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 42—43 (1983), 41—50.
7. Мозер, Ян: Об одной теореме А. Сельберга в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 42—43 (1983), 65—72.
8. Мозер, Ян: Некоторые следствия из формулы Римана-Зигеля, Труды мат. института АН СССР, т. 163 (1984), 183—186.
9. Мозер, Ян: Новые теоремы о среднем для функции $\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2$, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 46—47 (1985), 21—40.
10. Мозер, Ян: Задача Харди-Литтлвуда и гипотеза Линделёфа, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 46—47 (1985), 49—62.
11. Мозер, Ян: Курьезная формула Харди-Литтлвуда и некоторые случайные процессы, порожденные формулой Римана-Зигеля, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 54—55, (1988), 21—52.
12. Селберг, А.: Тхе зета-фунцтион анд тхе Риеманн хыпотхесис, 10. Сканд. Матх. Конгрес (1946), 187—200.
13. Титцхмарсх, Е. Ц.: Он ван дер Цорпут'с метход анд тхе зета-фунцтион оф Риеманн, ИВ, Ъуарт. Й. Матх., 5 (1934), 98—105.
14. Титчмарш, Е. К.: Теория функций, ГИТТЛ, Москва—Ленинград 1951.
15. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, ИЛ, Москва 1953.
16. Бендат, Дж.—Пирсол, А.: Измерение и анализ случайных процессов, «Мир» Москва 1974.
17. Голдман, С.: Теория информации, ИЛ, Москва 1957.
18. Котельников, В. А.: О пропускной способности «эфира» и «проволоки». Материалы к Первому всесоюзному съезду по вопросам реконструкции дела связи, Москва 1933.
19. Whittaker, J. M.: Interpolary Function Theory, Cambridge 1935.
20. Shannon, C. E.—Weaver, W.: The mathematical Theory of Communication, The University of Illinois Press, 3—89, 1949.
21. Сборник: «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», ИЛ, Москва 1953.
22. Эйлер, Л.: Введение в анализ бесконечных, т. I, ГИФМЛ, Москва 1961.

Адрес автора:

Ján Moser
Kat. mat. analýzy MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 20. 5. 1988

SUMMARY

RIEMANN–SIEGEL FORMULA AND CERTAIN ANALOGIES OF KOTELNIKOFF–WHITTAKER–NYQIST THEOREM FROM THE INFORMATION THEORY

Ján Moser, Bratislava

In the paper among others the following result is proved: if $t \in \langle T, T+U \rangle$, $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$ then

$$\overset{*}{Z}(t+2\omega b) \overset{CK}{=} \sum_{p=-L}^{L} \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \overset{*}{Z}(t+2\omega p) \tag{1}$$

in the sense of the mean square, i.e.

$$\frac{1}{U}\int_T^{T+U} \{\overset{*}{Z}(t+2\omega b) - \sum_{p=-L}^{L} \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \overset{*}{Z}(t+2\omega p)\}^2 \, dt = o(1),$$

for $T \to \infty$, uniformly with respect to $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$ where

$$\overset{*}{Z}(t) = \frac{Z(t)}{\sqrt{2\ln P}}, \; 2\omega = \frac{\pi}{\ln P}, \; P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \; U = \sqrt{T}\ln^2 T, \; L = [\ln^\varepsilon T],$$

($0 < \varepsilon$ is arbitrary small number). To the formula (1) the Nyqist interval of the length

$$2\omega = \frac{\pi}{\ln P} \tag{2}$$

corresponds. Further in the paper the spectral expression of the main term in the Riemann–Siegel formula is given. It follows from the last that the Nyqist interval of the lenght (2) has a fundamental meaning for the Riemann–Siegel formula. At the end by the phase modulation of the main term in the Riemann–Siegel formula an assemble of the functions $\overset{*}{Z}_\varphi$ is constructed. Moreover its asymptotic stationarity and asymptotic ergodicity is proved.

SÚHRN

RIEMANNOV–SIEGELOV VZOREC A ISTÉ ANALÓGY KOTELNIKOVOVEJ–WHITTAKEROVEJ–NYQISTOVEJ VETY Z TEÓRIE INFORMÁCIE

Ján Moser, Bratislava

V práci je dokázaný napr. taký výsledok: pre $t \in \langle T, T+U \rangle$, $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$ platí

$$\overset{*}{Z}(t+2\omega b) \overset{CK}{=} \sum_{p=-L}^{L} \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \overset{*}{Z}(t+2\omega p) \tag{1}$$

v zmysle strednej kvadratickej odchýlky, t.j.

$$\frac{1}{U}\int_T^{T+U} \left\{\overset{*}{Z}(t+2\omega b) - \sum_{p=-L}^{L} \frac{\sin\{\pi(b-p)\}}{\pi(b-p)} \overset{*}{Z}(t+2\omega p)\right\}^2 dt = o(1),$$

pri $T \to \infty$, rovnomerne pre $b \in \langle -L/2, L/2 \rangle$, kde

$$\overset{*}{Z}(t) = \frac{Z(t)}{\sqrt{2 \ln P}}, \; 2\omega = \frac{\pi}{\ln P}, \; P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \; U = \sqrt{T} \ln^2 T, \; L = [\ln^\varepsilon T],$$

($0 < \varepsilon$ je ľubovoľne malé číslo). Vzorcu (1) odpovedá Nyqistov interval s dĺžkou

$$2\omega = \frac{\pi}{\ln P} \cdot \qquad (2)$$

Ďalej je v práci odvodené spektrálne vyjadrenie hlavného člena v Riemannovom-Siegelovom vzorci, z ktorého vyplýva, že Nyqistov interval s dĺžkou (2), má pre Riemannov-Siegelov vzorec základný význam. Nakoniec, fázovou moduláciou hlavného člena v Riemannovom-Siegelovom vzorci, je zostrojený ansambel funkcií $\overset{*}{Z}_\varphi$; dokázaná je jeho asymptotická stacionárnosť a asymptotická ergodičnosť.