UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LVIII—LIX

ГИПОТЕЗА РИМАНА И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ Z — ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ*)

ЯН МОЗЕР, Братислава

Введение

В работе [18], в предположении справедливости гипотезы Римана, мы получили квадратурную формулу, из которой, в частном случае, следует асимптотическая формула для длины дуги кривой $Z = Z(t)$, $t \in \langle T, T + H\rangle$:

$$\int_T^{T+H} \sqrt{1 + \{Z'(t)\}^2}\, \mathrm{d}t \sim 2 \sum_{T \leq t_0 \leq T+H} |Z(t_0)|,\ T \to \infty, \tag{1}$$

где $Z(t_0)$ — экстремальное значение функции $Z(t)$ и $H \in \langle T^\mu, \sqrt[4]{T}\rangle$, $0 < \mu$ — сколь угодно малое число. Там же было показано, что формула (1) дает точку соприкосновения между гипотезой Римана и знаменитым мемуаром П. Л. Чебышева [1].

В предлагаемой работе изучается аналогичный вопрос для площади поверхности тела вращения, образованного вращением кривой $Z = Z(t)$, $t \in \langle T, T + U\rangle$ вокруг оси Ot (Z — тело вращения). По гипотезе Римана нами получена квадратурная формула, из которой, в частном случае, следует асимптотическая формула (при соответствующем U):

$$2\pi \int_T^{T+U} |Z(t)| \sqrt{1 + \{Z'(\mathrm{t})\}^2}\, \mathrm{d}t \sim 2 \sum_{T \leq t_0 \leq T+U} \pi Z^2(t_0),\ t \to \infty. \tag{2}$$

*) Все результаты справедливы и независимо от гипотезы Римана после преобразования

$$\sum_{t_0} |Z(t_0)|^k \to \sum_{t_0'} |Z(t_0')|^k - \sum_{t_0''} |Z(t_0'')|^k, \qquad k = 1, 2$$

где $Z(t_0')$, $Z(t_0'')$ — хорошие и плохие экстремумы.

Формула (2) (аналогично случаю (1)) допускает простое геометрическое истолкование.

Далее, для суммы абсолютных значений и суммы квадратов экстремальных значений функции $Z(t)$, по гипотезе Римана, получены следующие оценки:

$$\frac{1}{2}(1-\delta)\,U\ln T < \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} |Z(t_0)| < \frac{1}{4\sqrt{3}}(1+\delta)\,U\ln^{3/2} T,$$

$$\frac{2}{\pi}(1-\delta)\,U\ln T < \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} Z^2(t_0) < \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\delta)\,U\ln^2 T,$$

$0 < \delta$ — сколь угодно малое число, (в [18] мы дали набросок доказательства первого соотношения, здесь же мы приводим второй вариант доказательства).

Некоторые статистические соображения, основанные на случайных процессах, порожденных главными членами Формул Римана-Зигеля для $Z(t)$, $Z'(t)$ и на центральной предельной теореме А. М. Ляпунова, приводят нас к следующим формулам:

$$\sum_{T \leqq t_0 \leqq T+H} |Z(t_0)| \sim \frac{1}{2\sqrt{6\pi}}\,H\ln^{3/2} T, \qquad T \to \infty,$$

$$\sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} Z^2(t_0) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\,U\ln^2 T, \qquad T \to \infty.$$

Наконец, для сравнения с формулой (2), приведем формулу, выражающую аналог квадратичного эффекта для функции $Z(t)$, в связи с теоремой Котельникова-Уиттекера-Найквиста из теории информации:

$$\int_T^{T+U} Z^2(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{\pi}{\ln P}\cdot \sum_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu}(\tau)], \qquad T \to \infty, \tag{3}$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, (см. [17]);

$$g_{2\nu+2}(\tau) - g_{2\nu}(\tau) \sim \frac{\pi}{\ln P}, \qquad P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \qquad T \to \infty. \tag{4}$$

Напомним, что $\pi/\ln P$ — асимптотическая длина промежутка Найквиста, соответствующая главному члену формулы Римана-Зигеля для $Z(t)$.

В то время как расстояния $g_{2\nu+2}(\tau) - g_{2\nu}(\tau)$ соседних «точек отсчета» $g_{2\nu}(\tau)$ в формуле (3), асимптотически равны длине промежутка Найквиста (см. (4)), то в формуле (2), расстояния $t_0'' - t_0'$ соседних «точек отсчета» t_0

совершают сложные колебания вокруг значения $\pi/\ln P$, (ср., например, поведение стационарных точек t_0 на графике функции $Z(t)$ в окрестности первой пары нулей Лемера, [20], стр. 296).

I. Результаты и вспомагательные утверждения

1. Формулировка результатов

Пусть $\{\gamma\}$, $\gamma > 0$ — возрастающая последовательность корней уравнения $Z(t) = 0$, (кратность корня не учитывается).

Пусть $\{t_0\}$, $t_0 > 0$ — возрастающая последовательность корней нечетного порядка уравнеия $Z'(t) = 0$, удовлетворяющих условию $\gamma' < t_0 < \gamma''$, где γ', γ'' — соседние члены последовательности $\{\gamma\}$. Значит, t_0 — точка локального экстремума функции $Z(t)$, для которой $Z(t_0) \neq 0$.

Напомним, что

$$\left.\begin{aligned} Z(t) &= e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \\ \vartheta(t) &= -\frac{1}{2}t\ln\pi + \operatorname{Im}\left\{\ln\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}it\right)\right\} = \vartheta_1(t) + O\left(\frac{1}{t}\right), \\ \vartheta_1(t) &= \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(см. [19], стр. 94, 383).

Последовательность $\{t_0\}$ автор начал изучать в работе [2] и продолжал ее изучение, в связи с некоторыми математическими вопросами релятивистской космологии, в работах [3], [4], [8], [9], [12]—[14], [16].

Справедлива

Теорема 1 (основная). Пусть $g(t)$, $t \in \langle T, T+U\rangle$ — любая интегрируемая по Лебегу положительная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_T^{T+U} g(t)\,dt = O\left(\frac{U\ln T}{\psi}\right).$$

Тогда, по гипотезе Римана:

$$\int_T^{T+U} |Z(t)|\sqrt{g(t) + \{Z'(t)\}^2}\,dt \sim \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} Z^2(t_0), \qquad T \to \infty, \tag{6}$$

где $U = \sqrt{T}\,\psi(T)$ и $0 < \psi(T)$ — функция, сколь угодно медленно возрастающая к ∞ при $T \to \infty$.

Замечание 1. Для площади поверхности Z — тела вращения, из (6) $g(t) = 1$, получаем следующую формулу:

$$2\pi \int_T^{T+U} |Z(t)| \sqrt{1 + \{Z'(t)\}^2}\, \mathrm{d}t \sim 2 \cdot \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} \pi Z^2(t_0), \qquad T \to \infty.$$

Напомним, что, по гипотезе Римана, члены последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$ отделяют друг друга, (см. [3], стр. 34, Следствие 3). В силу этого имеет смысл рассматривать конфигурацию $\gamma' < t_0 < \gamma''$. Этой конфигурации соответсвуют элементарные кривые

$$Z = Z(t), \qquad t \in \langle \gamma', t_0 \rangle; \qquad Z = Z(t), \qquad t \in \langle t_0, \gamma'' \rangle,$$

(монотонные, по гипотезе Римана). Тела вращения, образованные вращением элементарных кривых вокруг оси Ot, назовем элементарными телами вращения.

Площадь проекции элементарного тела вращения на плоскость ортогональную оси Ot, составляет $\pi Z^2(t_0)$ — это площадь круга радиуса $|Z(t_0)|$, где $Z(t_0)$ — экстремальное значение функции $Z(t)$.

Замечание 2. По гипотезе Римана, площадь поверхности Z-тела вращения асимптотически равна (см. Замечание 1) сумме площадей проекций (на плоскость ортогональную оси Ot) всех элементарных тел вращения, соответствующих промежутку $\langle T, T + U \rangle$.

Наконец, справедлива

Теорема 2. По гипотезе Римана:

$$\frac{1}{\pi}(1 - \delta)\, U \ln T < \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} |Z(t_0)| < \frac{1}{4\sqrt{3}}(1 + \delta)\, U \ln^{3/2} T, \tag{7}$$

$$\frac{2}{\pi}(1 - \delta)\, U \ln T < \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} Z^2(t_0) < \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 + \delta)\, U \ln^2 T, \tag{8}$$

для $T \to \infty$, где $U = \sqrt{T}\, \psi(T)$, $0 < \delta$ — сколь угодно малое число.

2. Вспомогательные утвеждения

Доказательства теорем 1, 2 опираются на следующие вспомогательные утверждения (всюду в формулировках: $U = \sqrt{T}\, \psi$).

Лемма A

$$\int_T^{T+U} |Z(t) Z'(t)|\, \mathrm{d}t > \frac{4}{\pi}(1 - \varepsilon)\, U \ln P, \qquad P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \qquad T \to \infty, \tag{9}$$

где $0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число.

Лемма B. По гипотезе Римана:

$$\int_T^{T+H} |Z(t)Z'(t)| \, dt = \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+H} Z^2(t_0) + O(T^{\frac{2A}{\ln\ln T}}), \tag{10}$$

где

$$H \in \left\langle \frac{\psi(T)}{\ln\ln T}, U \right\rangle. \tag{11}$$

Лемма C

$$\int_T^{T+U} \{Z'(t)\}^2 \, dt \sim \frac{1}{12} U \ln^3 T, \qquad T \to \infty. \tag{12}$$

Лемма D

$$\int_T^{T+U} |Z'(t)| \, dt > \frac{4}{\pi}(1-\varepsilon) U \ln P, \qquad T \to \infty. \tag{13}$$

Замечание 3. В оценке (9) и асимптотической формуле (12), $U = \sqrt{T}\psi$ можно заменить на $U = T^{5/12+\varepsilon}$ (ср. [7], [10]) или даже на степень T с еще меньшим показателем. Так как, с одной стороны, соответствующие оценки очень громоздки и, с другой стороны, они не связаны прямо с принципиальной стороной формулы (6), то мы не будем приводить их здесь.

3. Завершение доказательства теоремы 1

В этой части мы завершим

Доказательство теоремы 1 при помощи леммы A и B. Прежде всего:

$$\int_T^{T+U} |Z(t)| \sqrt{g(t) + \{Z'(t)\}^2} \, dt =$$

$$= \int_T^{T+U} |Z(t)Z'(t)| \, dt + \int_T^{T+U} |Z(t)| \frac{g(t)}{\sqrt{g(t) + \{Z'(t)\}^2} + |Z'(t)|} \, dt =$$

$$= \int_T^{T+U} |Z(t)Z'(t)| \, dt + O\left(\int_T^{T+U} |Z(t)| \sqrt{g(t)} \, dt \right) =$$

$$= \int_T^{T+U} |Z(t)Z'(t)| \, dt + O\left\{ \sqrt{\frac{U \ln T}{\psi}} \left(\int_T^{T+U} Z^2(t) \, dt \right)^{1/2} \right\} =$$

$$= \int_T^{T+U} |Z(t)Z'(t)| \, dt + O\left(\frac{U \ln T}{\sqrt{\psi}} \right); \tag{14}$$

в надлежащем месте мы используем теорему о среднем Харди-Литтлвуда с оценкой Титчмарша для остаточного члена (см. [19], стр. 142, 145)

$$\int_T^{T+V} Z^2(t)\,\mathrm{d}t = V\ln T + (2c - \ln 2\pi)\,V + O(T^{5/12+\varepsilon}), \qquad V \geqq T^{5/12+2\varepsilon}, \tag{15}$$

где c — постоянная Эйлера, в случае $V = U$.

Теперь из (14), по лемме A, получаем асимптотическое соотношение

$$\int_T^{T+U} |Z(t)|\sqrt{g(t) + \{Z'(t)\}^2}\,\mathrm{d}t \sim \int_T^{T+U} |Z(t)\,Z'(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad T \to \infty,$$

и отсюда, по лемме B при $H = U$, получаем асимптотическое соотношение (6).

4. Завершение доказательства теоремы 2

В этой части мы завершим

Доказательство теоремы 2 при помощи лемм A, B, C, D.

(a) По лемме D имеем

$$\int_T^{T+U} |Z'(t)|\,\mathrm{d}t > \frac{2}{\pi}(1-\varepsilon)\,U\ln\frac{T}{2\pi} > \frac{2}{\pi}(1-2\varepsilon)\,U\ln T. \tag{16}$$

Далее (см. [18], лемма B),

$$\int_T^{T+U} |Z'(t)|\,\mathrm{d}t = 2.\sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} |Z(t_0)| + O(T^{\frac{A}{\ln\ln T}}). \tag{17}$$

Еще, по лемме C, применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\int_T^{T+U} |Z'(t)|\,\mathrm{d}t \leqq \sqrt{U}\left(\int_T^{T+U} \{Z'(t)\}^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} < \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\varepsilon)\,U\ln^{3/2} T. \tag{18}$$

Теперь, из (17), в силу (16), (18), следует (7), $2\varepsilon = \delta$.

б) По лемме A имеем

$$\int_T^{T+U} |Z(t)\,Z'(t)|\,\mathrm{d}t > \frac{2}{\pi}(1-\varepsilon)\,U\ln\frac{T}{2\pi} > \frac{2}{\pi}(1-2\varepsilon)\,U\ln T. \tag{19}$$

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского, в силу леммы C и (15) $V = U$, получаем

$$\int_T^{T+U} |Z(t)\,Z'(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\varepsilon)\,U\ln^2 T. \tag{20}$$

Теперь, из леммы B, в силу (19), (20), получаем (8), $2\varepsilon = \delta$.

II. Доказательство леммы A

5. Преобразование формул Римана-Зигеля для $Z(t)$, $Z'(t)$

A. Исходим из формулы (см. [5], (10))

$$Z'(t) = -2\sum_{n\leq \bar{t}} \frac{1}{\sqrt{n}}(\vartheta' - \ln n)\sin(\vartheta - t\ln n) + O(t^{-1/4}\ln t), \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}.$$

Так как (см. (5) и [19], стр. 260)

$$\vartheta = \vartheta_1 + O\left(\frac{1}{t}\right), \qquad \vartheta' = \frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right) = \vartheta_1' + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

то

$$Z'(t) = -2\sum_{n\leq \bar{t}} \frac{1}{\sqrt{n}}(\vartheta_1' - \ln n)\sin(\vartheta_1 - t\ln n) + O(t^{-1/4}\ln t). \tag{21}$$

Далее, для $t\in\langle T, T+U\rangle$:

$$\sum_{P\leq n\leq \bar{t}} 1 = O\left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \sqrt{\frac{T}{2\pi}}\right) = O\left(\frac{U}{\sqrt{T}}\right) = O(\psi),$$

$$\vartheta_1'(t) = \vartheta_1'(T) + O\left(\frac{U}{T}\right) = \ln P + O\left(\frac{U}{T}\right),$$

$$\vartheta_1'(t) - \ln n = \ln\frac{P}{n} + O\left(\frac{U}{T}\right), \qquad n < \bar{t},$$

$$\left|\ln\frac{P}{n}\right| = \ln\frac{n}{P} \leq \ln\sqrt{\frac{T+U}{T}} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{U}{T}\right) = O\left(\frac{U}{T}\right), \qquad n\in\langle P, \bar{t}\rangle$$

Значит,

$$\sum_{P\leq n\leq \bar{t}} \frac{1}{\sqrt{n}}(\vartheta_1' - \ln n)\sin(\vartheta_1 - t\ln n) = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{T}}\cdot\frac{U}{T}\,\psi\right) = O(T^{-3/4}\psi^2) = O(T^{-1/4}\ln T),$$

$$\frac{U}{T}\cdot\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}=O\left(\frac{U}{T^{3/4}}\right)=O(T^{-1/4}\psi).$$

Следовательно (см. (21)),

$$Z'(t)=-2\cdot\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{P}{n}\cdot\sin(\vartheta_1-t\ln n)+O(T^{-1/4}\ln T),$$
$$t\in\langle T,\,T+U\rangle,\qquad U=\sqrt{T}\,\psi. \tag{22}$$

B. Аналогичным, но более простым образом, из формулы Римана-Зигеля

$$Z(t)=2\cdot\sum_{n\leqq\bar{t}}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)+O(t^{-1/4}),$$

для $t\in\langle T,\,T+U\rangle$, $U=\sqrt{T}\,\psi$, получаем

$$Z(t)=2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta_1-t\ln n)+O(T^{-1/4}\psi)=$$
$$=2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta_1-t\ln n)+O(T^{-1/4}\ln T). \tag{23}$$

6. Дискретные формулы

Прежде всего, из (22), (23) обычным способом (ср. [19], стр. 109) получаем оценки

$$Z(t)=O(T^{1/6}\ln T),\ Z'(t)=O(T^{1/6}\ln^2 T),\ t\in\langle T,\,T+U\rangle. \tag{24}$$

Далее, из (22), (23), в силу (24), получаем

$$Z(t)\,Z'(t)=-2\ln P\,.\,\sin 2\vartheta_1-$$
$$-2\sum_{\substack{m,\,n<P\\ mn\geqq 2}}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\ln\frac{P}{m}\sin\{2\vartheta_1-t\ln(mn)\}-$$
$$-2\sum_{\substack{m,\,n<P\\ m\neq n}}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\ln\frac{P}{m}\sin\left(t\ln\frac{n}{m}\right)+O(T^{-1/12}\ln^3 T). \tag{25}$$

Теперь определим семейство последовательностей $\{g_\nu(\tau)\}$ следующим образом (ср. [10], (6)):

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau)] = \frac{1}{2}(\pi\nu + \tau) + \frac{\pi}{4}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle. \tag{26}$$

Справедлива

Лемма 1

$$\sum_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} Z[g_{2\nu}(\tau)] \,.\, Z'[g_{2\nu}(\tau)] = -\frac{2}{\pi} U \ln^2 P \,.\, \cos\tau + O(\sqrt{T} \ln^2 T),$$

$$\sum_{T \leqq g_{2\nu+1} \leqq T+U} Z[g_{2\nu+1}(\tau)] \,.\, Z'[g_{2\nu+1}(\tau)] = \frac{2}{\pi} U \ln^2 P \,.\, \cos\tau + O(\sqrt{T} \ln^2 T),$$

где $g_\nu = g_\nu(O)$ и O — оценки справедливы равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Доказательство

А. Из (25), в силу (26), получаем:

$$Z[g_\nu(\tau)]\, Z'[g_\nu(\tau)] = 2(-1)^{\nu+1} \ln P \,.\, \cos\tau - S_1 - S_2 + O(T^{-1/12} \ln^3 T), \tag{28}$$

где

$$S_1 = 2 \sum_{mn \geqq 2}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \ln\frac{P}{m} \sin\left\{\pi\nu - g_\nu(\tau) \ln(mn) + \tau + \frac{\pi}{2}\right\},$$

$$S_2 = 2 \sum_{m \neq n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \ln\frac{P}{m} \sin\left\{g_\nu(\tau) \ln\frac{m}{n}\right\}.$$

Так как (ср. [10], (59))

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} 1 = \frac{2}{\pi} U \ln P + O\left(\frac{U^2}{T}\right) + O(1) = \frac{2}{\pi} U \ln P + O(\psi^2), \tag{29}$$

то, из (28), получаем

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} Z[g_\nu(\tau)]\, Z'[g_\nu(\tau)] = O(\ln P) - W_1 - W_2 + O(T^{-1/12} U \ln^4 T), \tag{30}$$

где

$$W_1 = 2 \sum_{mn \geqq 2}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \ln\frac{P}{n} \cdot \sum_{g_\nu} \sin\{2\pi\Phi_1(\nu)\},$$

$$W_2 = 2\sum_{m \neq n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \ln\frac{P}{m} \cdot \sum_{g_n} \sin\{2\pi\Phi_2(\nu)\},$$

$$\Phi_1(\nu) = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2\pi} g_\nu(\tau) \ln(mn) + \frac{\tau}{2\pi} + \frac{1}{4}, \tag{31}$$

$$\Phi_2(\nu) = \frac{1}{2\pi} g_\nu(\tau) \ln\frac{n}{m}.$$

Далее, из (26), (см. (5)), получаем

$$\frac{\mathrm{d}g_\nu(\tau)}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\pi}{\ln\dfrac{g_\nu(\tau)}{2\pi}},$$

здесь (как и в других аналогичных местах) предполагается, что $g_\nu(\tau)$ определено соотношением (26) для всех достаточно больших ν, при любом фиксированном $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$. Следовательно (для $g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U\rangle$):

$$\Phi_1'(\nu) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\ln(mn)}{\ln\dfrac{g_\nu(\tau)}{2\pi}},\ \Phi_1''(\nu) > 0,\ 0 < \Phi_1'(\nu) < \frac{1}{2},$$

$$\Phi_1'(\nu) \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\ln(mn)}{\ln\dfrac{T}{2\pi}} = \frac{1}{4\ln P}\ln\frac{P^2}{mn} > \frac{1}{4\ln P}\ln\frac{P}{n}. \tag{32}$$

Теперь, внутреннюю сумму в W_1 (см. (31)) выражаем при помощи интеграла (ср. [19], стр. 78, Лемма 2), который, в свою очередь, оценивается сверху (ср. [19], стр. 73, Лемма 1), т.е.

$$\sum_{g_\nu} \sin\{2\pi\Phi_1(\nu)\} = O\left(\frac{\ln P}{\ln\dfrac{P}{n}}\right), \tag{33}$$

и, (пусть P — целое число; это предположение не ограничивает общности изложения, так как совершаемая при этом ошибка в (22), (23) оценивается как $O(T^{-1/4})$)

$$W_1 = O\left(\ln P \cdot \sum_{m,\, n < P}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}\ln\dfrac{P}{n}}\right) =$$

$$= O\left(\sqrt[4]{T}\ln T \cdot \sum_{n < P} \frac{1}{\sqrt{n}\ln\dfrac{P}{n}}\right) = O(\sqrt{T}\ln^2 T), \tag{34}$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Так как (пусть, например, $n > m$):

$$\Phi_2'(v) = \frac{1}{2\ln\dfrac{g_v(\tau)}{2\pi}} \ln\frac{n}{m},\ \Phi_2''(v) < 0,\ 0 < \Phi_2'(v) < \frac{1}{4},$$

$$\Phi_2'(v) > \frac{A}{\ln P}\ln\frac{n}{m} > 0,$$

(для $g_v(\tau) \in \langle T, T + U \rangle$, то, как в случае (32)—(34), получаем оценку (ср. [19], стр. 138, Лемма 1, $T \to P$):

$$W_2 = O\left(\ln P \cdot \sum_{m \neq n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}\left|\ln\dfrac{n}{m}\right|}\right) = O(\sqrt{T}\ln^2 T), \tag{35}$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Наконец, из (30), (31), в силу (34), (35), получаем:

$$\sum_{T \leqq g_v \leqq T + U} Z[g_v(\tau)]\, Z'[g_v(\tau)] = O(\sqrt{T}\ln^2 T), \tag{36}$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

(B) Из (28), в силу (29), получаем

$$\sum_{T \leqq g_v \leqq T + U} (-1)^v Z[g_v(\tau)]\, Z'[g_v(\tau)] = -\frac{4}{\pi} U \ln^2 P \,.\cos\tau + \tag{37}$$
$$+ O(\psi^2 \ln T) + W_3 + W_4 + O(T^{-1/12} U \ln^4 T),$$

где

$$W_3 = 2\sum_{mn \geqq 2}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \ln\frac{P}{m} \cdot \sum_{g_v} \sin\{2\pi\Phi_3(v)\},$$

$$W_4 = 2\sum_{m\neq n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \ln\frac{P}{m} \cdot \sum_{g_\nu} \sin\{2\pi\Phi_4(\nu)\},$$

$$\Phi_3(\nu) = \frac{1}{2\pi} g_\nu(\tau)\ln(mn) - \frac{\tau}{2\pi} - \frac{1}{4},$$

$$\Phi_4(\nu) = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2\pi} g_\nu(\tau)\ln\frac{n}{m}.$$

Поскольку (для $g_\nu(\tau)\in\langle T, T+U\rangle$):

$$\Phi_3'(\nu) = \frac{1}{2}\frac{\ln(mn)}{\ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}},\ \Phi_3''(\nu) < 0,\ 0 < \varphi_3'(\nu) < \frac{1}{2},$$

$$\Phi_3'(\nu) > A\frac{\ln(mn)}{\ln P},$$

$$\Phi_4'(\nu) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}\ln\frac{n}{m},\ \Phi_4''(\nu) > 0,\ n > m,$$

$$\frac{1}{4} < \Phi_4'(\nu) < \frac{1}{2},$$

то, как в случае (34), (35), получаем оценки

$$W_3,\ W_4 = O(\sqrt{T}\ln T), \tag{38}$$

равномерно для $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$. Теперь, из (37), в силу (38), получаем:

$$\begin{aligned}\sum_{T\leq g_\nu\leq T+U} (-1)^\nu Z[g_\nu(\tau)]\, Z'[g_\nu(\tau)] = \\ = -\frac{4}{\pi} U\ln^2 P.\cos\tau + O(\sqrt{T}\ln T),\end{aligned} \tag{39}$$

где O — оценка справедлива равномерно для $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$.

Наконец, из (36), (39), следует (27).

7. Интегралы по несвязным множествам

Определим слeдующие множества (ср. [6], (3), [10], стр. 25):

$$\begin{gathered}G_{2\nu}(x)=\{t\colon g_{2\nu}(-x)<t<g_{2\nu}(x),\ t\in\langle T,\ T+U\rangle\},\ x\in(0,\ \pi/2\rangle,\\ G_{2\nu+1}(y)=\{t\colon g_{2\nu+1}(-y)<t<g_{2\nu+1}(y),\ t\in\langle T,\ T+U\rangle\},\ y\in(0,\ \pi/2\rangle,\\ G_3(x)=\bigcup_{T\leqq g_{2\nu}\leqq T+U}G_{2\nu}(x),\ G_4(y)=\bigcup_{T\leqq g_{2\nu+1}\leqq T+U}G_{2\nu+1}(y).\end{gathered}\tag{40}$$

Справедлива

Лемма 2

$$\int_{G_3(x)}Z(t)\,Z'(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{\pi}\,U\ln P\,.\sin x+O(x\sqrt{T}\ln T),\tag{41}$$

$$\int_{G_4(y)}Z(t)\,Z'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\,U\ln P\,.\sin y+O(y\sqrt{T}\ln T).$$

Доказательство. Так как (см. (5), (26), ср. [6], (51))

$$\left(\frac{\mathrm{d}g_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}=2\vartheta_1'[g_{2\nu}(\tau)]=2\ln P+O\left(\frac{U}{T}\right),$$

то (см. (24)):

$$\begin{gathered}\int_{-x}^{x}Z[g_{2\nu}(\tau)]\,Z'[g_{2\nu}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau=\int_{-x}^{x}Z[g_{2\nu}(\tau)]\,Z'[g_{2\nu}(\tau)]\left(\frac{\mathrm{d}g_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}\cdot\frac{\mathrm{d}g_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau=\\ =2\ln P\cdot\int_{g_{2\nu}(-x)}^{g_{2\nu}(x)}Z(t)\,Z'(t)\,\mathrm{d}t+O\left(xT^{1/3}\ln^3T\cdot\frac{U}{T}\cdot\frac{1}{\ln T}\right)=\\ =2\ln P\int_{G_{2\nu}(x)}Z(t)\,Z'(t)\,\mathrm{d}t+O(xT^{-2/3}\,U\ln^2T).\end{gathered}\tag{42}$$

Теперь, интегрируя по $\tau\in\langle -x,\ x\rangle$ первую формулу в (27), получаем (см. (29), (40), (42)):

$$\int_{G_3(x)}Z(t)\,Z'(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{\pi}\,U\ln P\sin x+O(x\sqrt{T}\ln T),$$

т.е. первую формулу в (41) и, аналогичным образом — вторую.

8. Завершение доказательства леммы А

Пусть

$$G_3^+(x) = \{t\colon Z(t)\, Z'(t) > 0,\ t \in G_3(x)\},$$
$$G_3^-(x) = \{t\colon Z(t)\, Z'(t) < 0,\ t \in G_3(x)\},$$
$$G_3^0(x) = \{t\colon Z(t)\, Z'(t) = 0,\ t \in G_3(x)\},$$

(аналогичный смысл имеют обозначения $G_4^+(y), \ldots$). Поскольку соотношения (41) являются асимптотическими, то, при $x = y = \pi/2$ получаем (ср. [11], (8), (10); меры множеств $G_3^0(\pi/2)$, $G_4^0(\pi/2)$ равны нулю):

$$\frac{2}{\pi}(1-\varepsilon)\, U \ln P < -\int_{G_3(\pi/2)} Z(t)\, Z'(t)\, \mathrm{d}t \leqq -\int_{G_3^-(\pi/2)} Z(t)\, Z'(t)\, \mathrm{d}t =$$
$$= \int_{G_3^-(\pi/2)} |Z(t)\, Z'(t)|\, \mathrm{d}t, \qquad \frac{2}{\pi}(1-\varepsilon)\, U \ln P < \int_{G_4(\pi/2)} Z(t)\, Z'(t)\, \mathrm{d}t \leqq \tag{43}$$
$$\leqq \int_{G_4^+(\pi/2)} Z(t)\, Z'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{G_4^+(\pi/2)} |Z(t)\, Z'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Так как

$$G_3^-(\pi/2) \cup G_4^+(\pi/2) \subset \langle T,\, T+U \rangle,\ G_3^-(\pi/2) \cap G_4^+(\pi/2) = \emptyset,$$

то, в силу (43), уже получаем нужную нам оценку снизу:

$$\int_T^{T+U} |Z(t)\, Z'(t)|\, \mathrm{d}t \geqq \int_{G_3^-(\pi/2)} |Z(t)\, Z'(t)|\, \mathrm{d}t +$$
$$+ \int_{G_4^+(\pi/2)} |Z(t)\, Z'(t)|\, \mathrm{d}t > \frac{4}{\pi}(1-\varepsilon)\, U \ln P.$$

III. Доказательства остальных лемм

9. Доказательство леммы В

А. Пусть $\{\tilde{\gamma}\}$, $\tilde{\gamma} > 0$ — возрастающая последовательность корней нечетного порядка уравнения

$$Z(t)\, Z'(t) = 0. \tag{44}$$

Имеются следующие возможности.

а) Если γ-простой корень уравнения $Z(t) = 0$, то $Z'(\gamma) \neq 0$ и γ является корнем нечетного порядка уравнения (44).

б) Если γ-корень нечетного порядка ($\geqq 3$) уравнения $Z(t) = 0$, то γ-корень четного порядка уравнения $Z'(t) = 0$ и, следовательно, γ-корень нечетного порядка уравнения (44).

в) Если γ-корень четного порядка ($\geqq 2$) уравнения $Z(t) = 0$, то γ-корень нечетного порядка уравнения $Z'(t) = 0$ и, следовательно, γ-корень нечетного порядка уравнения (44).

г) Если t_0-корень нечетного порядка уравнения $Z'(t) = 0$, (напомним, что $t_0 \neq \gamma$), то t_0-корень нечетного порядка уравнения (44).

Замечание 4. В силу а)—г), в последовательность $\{\tilde{\gamma}\}$ входят только члены последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$.

Так как, по гипотезе Римана, справедлива оценка Литтлвуда ([21], стр. 237)

$$\gamma'' - \gamma' < \frac{A}{\ln\ln\gamma'}, \qquad \gamma' \to \infty,$$

для расстояния соседних корней уравнения $Z(t) = 0$, то промежуток $\langle T, T + H\rangle$, где

$$H \in \left\langle \frac{\psi(T)}{\ln\ln T}, U \right\rangle,$$

содержит на меньше чем $A_1 H \ln\ln T$ членов последовательности $\{\tilde{\gamma}\}$.

В. В точке $t = \tilde{\gamma}$ функция $Z(t)\,Z'(t)$ изменяет знак а между двумя соседними корнями $\tilde{\gamma}'$, $\tilde{\gamma}''$ — сохраняет знак. Отсюда, в случае

$$T \leqq \tilde{\gamma}_1 < \tilde{\gamma}_2 < \ldots < \tilde{\gamma}_M \leqq T + U,$$

имеем:

$$\int_T^{T+U} |Z(t)\,Z'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_T^{\tilde{\gamma}_1} |ZZ'|\,\mathrm{d}t + \sum_{k=2}^{M} \int_{\tilde{\gamma}_{k-1}}^{\tilde{\gamma}_k} |ZZ'|\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{\tilde{\gamma}_M}^{T+U} |ZZ'|\,\mathrm{d}t = \left|\int_T^{\tilde{\gamma}_1} ZZ'\,\mathrm{d}t\right| + \sum_{k=2}^{M} \left|\int_{\tilde{\gamma}_{k-1}}^{\tilde{\gamma}_k} ZZ'\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{\tilde{\gamma}_M}^{T+U} ZZ'\,\mathrm{d}t\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{M} |Z^2(\tilde{\gamma}_k) - Z^2(\tilde{\gamma}_{k-1})| + \frac{1}{2}|Z^2(\tilde{\gamma}_1) - Z^2(T)| + \tag{45}$$

$$+ \frac{1}{2}|Z^2(T + U) - Z^2(\tilde{\gamma}_M)| = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{M} |Z^2(\tilde{\gamma}_k) - Z^2(\tilde{\gamma}_{k-1})| + O(T^{\frac{2A}{\ln\ln t}}),$$

где использована оценка Литтлвуда ([19], стр. 350)

$$Z(t) = O(T^{\frac{A}{\ln\ln T}}), \qquad t \in \langle T, T + U \rangle. \tag{46}$$

С. Так как последовательность $\{\tilde{\gamma}\}$ образована членами последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$ и, по гипотезе Римана, члены последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$ отделяют друг друга (см. [3], стр. 34, Следствие 3), то основной для нас будет следующая конфигурация

$$t_0(1) < \gamma' < t_0(2), \tag{47}$$

($t_0(1)$ — первый член последовательности $\{t_0\}$, лежащий в промежутке $\langle T, T + H \rangle$). Если

$$\tilde{\gamma}_1 = t_0(1),\ \tilde{\gamma}_2 = \gamma',\ \tilde{\gamma}_3 = t_0(2)$$

(в силу (45), (46) достаточно рассмотреть этот случай) то

$$|Z^2(\tilde{\gamma}_2) - Z^2(\tilde{\gamma}_1)| + |Z^2(\tilde{\gamma}_3) - Z^2(\tilde{\gamma}_2)| = Z^2(t_0(1)) + Z^2(t_0(2)). \tag{48}$$

Продолжая конфигурацию (47) через соседнюю конфигурацию $t_0(2) < \gamma'' < t_0(3)$ далее направо в промежутке $\langle T, T + U \rangle$, получаем (см. (45), (46), (48)):

$$\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{M} |Z^2(\tilde{\gamma}_k) - Z^2(\tilde{\gamma}_{k-1})| = \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+H} Z^2(t_0) + O\,(T^{\frac{2A}{\ln\ln T}}). \tag{49}$$

Наконец, из (45), в силу (49), получаем соотношение (10) при условии (11).

10. Доказательство леммы С

Из формулы (22) получаем

$$\{Z'(t)\}^2 = S^2 + R + O(T^{-1/2}\ln^2 T), \tag{50}$$

где

$$\begin{aligned} S^2 = 2\cdot \sum_{1 \leqq n < P} \frac{1}{n}\left(\ln\frac{P}{n}\right)^2 + 2\cdot\sum\sum_{m \neq n} \frac{1}{\sqrt{mn}} \ln\frac{P}{m}\ln\frac{P}{n}\cos\left(t\ln\frac{m}{n}\right) - \\ - 2\cdot\sum\sum_{m,\,n} \frac{1}{\sqrt{mn}}\ln\frac{P}{m}\ln\frac{P}{n}\cos\{2\vartheta_1 - t\ln(mn)\} = S_3 + S_4 - S_5, \end{aligned} \tag{51}$$

$$R = O(|S|\,.\,T^{-1/4}\ln T). \tag{52}$$

10.1. Прежде всего

$$\int_T^{T+U} S_3\,\mathrm{d}t = 2U \sum_{1 \leqq n < P} \frac{1}{n}\left(\ln\frac{P}{n}\right)^2.$$

К последней сумме мы применим формулу суммирования Эйлера-Маклорена ([19], стр. 12):

$$\sum_{a < n \leqq b} \varphi(n) = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \left(a - [a] - \frac{1}{2}\right)\varphi(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

в случае

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\left(\ln\frac{P}{x}\right)^2, \qquad x \in \langle 1, P\rangle.$$

Так как

$$\int_1^P \left(\ln\frac{P}{x}\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{3}\ln^3 P,$$

$$\varphi'(x) = O\left(\frac{\ln^2 P}{x^2}\right), \int_1^P \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = O(\ln^2 P),$$

$$\varphi(1) = \ln^2 P, \qquad \varphi(P) = 0,$$

то

$$\sum_{1 \leqq n < P} \frac{1}{n}\left(\ln\frac{P}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}\ln^3 P + O(\ln^2 P),$$

и, следовательно,

$$\int_T^{T+U} S_3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{12}U\ln^3 T + O(U\ln^2 T). \tag{53}$$

10.2. Далее (ср. [19], стр. 138, $T \to P$, $\sigma = 1/2$):

$$\int_T^{T+U} S_4\,\mathrm{d}t = O\left(\sum\sum_{m \neq n} \frac{1}{\sqrt{mn}\cdot\left|\ln\frac{m}{n}\right|}\ln\frac{P}{m}\cdot\ln\frac{P}{n}\right) = O(\sqrt{T}\ln^3 T). \tag{54}$$

10.3. Пусть

$$F(t) = 2\vartheta_1 - t\ln(mn), \qquad t \in \langle T,\ T+U \rangle.$$

Так как

$$F'(t) = \ln\frac{t}{2\pi} - \ln(mn) \geqq \ln\frac{P^2}{mn} \geqq \ln\frac{P}{n}, \qquad F''(t) > 0,$$

то

$$\int_T^{T+U} \cos\{2\vartheta_1 - t\ln(mn)\}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{\ln\frac{P}{n}}\right).$$

Следовательно,

$$\int_T^{T+U} S_5\,\mathrm{d}t = O\left(\sum_{m,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}\ln\frac{P}{n}} \ln\frac{P}{m}\cdot\ln\frac{P}{n}\right) = \tag{55}$$

$$= O\left(\ln T\cdot\sum_{m,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\right) = O(\sqrt{T}\ln T).$$

10.4. Прежде всего, из (51), в силу (53)—(55), получаем

$$\int_T^{T+U} S^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{12}U\ln^3 T + O(U\ln^2 T) + O(\sqrt{\mathrm{T}}\ln^3 T) =$$

$$= \frac{1}{12}U\ln^3 T + O(U\ln^3 T). \tag{56}$$

Далее, из (52), в силу (56), (применяя неравенство Коши-Буняковского), получаем

$$\int_T^{T+U} R\,\mathrm{d}t = O(T^{-1/4}\ln T.\ U\ \ln^{3/2} T) = o(U\ln^3 T). \tag{57}$$

Наконец, из (50), в силу (56), (57), следует (12).

11. Доказательство леммы D

Оценка

$$\int_T^{T+H} |Z'(t)|\,\mathrm{d}t > \frac{4}{\pi}(1-\eta)\,H\ln P, \tag{58}$$

$0 < \eta$ — сколь угодно малое число, верна для $H = \sqrt[4]{T}$, (см. [18]). Пусть

$$T' \in \langle T, T + U \rangle, \qquad H' = H(T') = \sqrt[4]{T'}.$$

Так как

$$\sqrt[4]{T'} = \sqrt[4]{T} + O(T^{-1/4}\psi), \ln P' = \ln P + O(T^{-1/2}\psi); \; P' = \sqrt{\frac{T'}{2\pi}},$$

то

$$H' \ln P' = H \ln P + O(T^{-1/4}\psi \ln T).$$

Следовательно, (см. (58)):

$$\int_{T'}^{T' + \sqrt[4]{T'}} |Z'(t)| \, \mathrm{d}t > \frac{4}{\pi}(1 - \eta) H' \ln P' > \frac{4}{\pi}(1 - 2\eta)\sqrt[4]{T} \ln P. \tag{59}$$

Однако,

$$\int_{T'}^{T' + \sqrt[4]{T'}} |Z'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{T'}^{T' + \sqrt[4]{T}} + \int_{T' + \sqrt[4]{T}}^{T' + \sqrt[4]{T'}},$$

и (см. (24))

$$\int_{T' + \sqrt[4]{T}}^{T' + \sqrt[4]{T'}} = \int_{T' + \sqrt[4]{T}}^{T' + \sqrt[4]{T} + O(T^{-1/4}\psi)} = O(T^{1/6} \ln^2 T \, . \, T^{-1/4}\psi) = O(T^{-1/12}\psi \ln^2 T).$$

Значит, из (59) получаем

$$\int_{T'}^{T' + \sqrt[4]{T}} |Z'(t)| \, \mathrm{d}t > \frac{4}{\pi}(1 - 3\eta)\sqrt[4]{T} \ln P, \tag{60}$$

для любого $T' \in \langle T, T + U \rangle$.

Далее определим целое число k_0 следующим образом:

$$k_0 \sqrt[4]{T} \leqq U < (k_0 + 1)\sqrt[4]{T};$$

очевидно

$$k_0 \sqrt[4]{T} = U + O(\sqrt[4]{T}). \tag{61}$$

Теперь, в силу (60), (61), получаем:

$$\int_{T}^{T+U} |Z'(t)| \, \mathrm{d}t \geqq \sum_{k=1}^{k_0} \int_{T + (k-1)\sqrt[4]{T}}^{T + k\sqrt[4]{T}} |Z'(t)| \, \mathrm{d}t > \frac{4}{\pi}(1 - 3\eta) \, k_0 \sqrt[4]{T} \ln P =$$

$$= \frac{4}{\pi}(1 - 3\eta)\, U \ln P + O(T^{1/4} \ln T) > \frac{4}{\pi}(1 - 4\eta)\, U \ln P,$$

т.е. (13) при $4\eta = \varepsilon$.

IV. Заключительные замечания

12. Определение статистической площади Z — тела вращения

Пусть φ_n, $n < P$ — система взаимно независимых случайных величин, равномерно распределенных в промежутке $\langle -\pi, \pi \rangle$. Внося φ_n в аргумент косинуса в главном члене формулы Римана-Зигеля (23), получаем случайный процесс

$$F_1(t) = F_1(t;\, \varphi_1, \varphi_2, \ldots) = 2 \sum_{n < P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta_1 - t \ln n + \varphi_n),\ t \in \langle T, T + U \rangle. \quad (62)$$

Пусть $\bar{\varphi}_n$, $n < P$ — система взаимно независимых случайных величин, равномерно распределенных в промежутке $\langle -\pi, \pi \rangle$, притом такая, что она взаимно независима с системой φ_n, $n < P$. Аналогично случаю (62), из (22), получаем случайный процесс

$$F_2(t) = F_2(t;\, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots) = 2 \sum_{n < P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{P}{n} \cdot \cos\left(\vartheta_1 - t \ln n + \frac{\pi}{2} + \bar{\varphi}_n\right),$$
$$t \in \langle T, T + U \rangle. \quad (63)$$

На основе центральной предельной теоремы А. М. Ляпунова, получаются следующие асимптотические плотности распределений любых сечений $F_1(\bar{t})$, $F_2(\bar{t})$, $\bar{t} \in \langle T, T + U \rangle$, (см. [15], (5), (27)):

$$w_\infty(F_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \ln P}}\, \mathrm{e}^{-\alpha F_1^2},\ \alpha = \frac{1}{4 \ln P},$$
$$w_\infty(F_2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\, \frac{1}{\ln^{3/2} P}\, \mathrm{e}^{-\beta F_2^2},\ \beta = \frac{3}{4 \ln^3 P}. \quad (64)$$

Так как для площади поверхности Z-тела вращения имеем следующее выражение

$$2\pi \int_T^{T+U} |Z(t)| \sqrt{1 + \{Z'(t)\}^2}\, \mathrm{d}t = 2\pi \int_T^{T+U} |Z(t)\, Z'(t)|\, \mathrm{d}t + O(U \sqrt{\ln T}),$$

(см. (14), $g(t) = 1$), то способ порождения случайных процессов F_1, F_2 (см. (62), (63)) главными членами формул Римана-Зигеля (23), (22) соответственно, приводит нас к следующему определению (ср. [15]) статистической площади K поверхности Z-тела вращения:

$$K = 2\pi U \,.\, M_\infty[|F_1|] \,.\, M_\infty[|F_2|], \tag{65}$$

где M обозначает математическое ожидание.

13. Статистическая площадь поверхности Z-тела вращения и порядок суммы значений $Z^2(t_0)$

Прежде всего имеем (см. [15], (19), (24)):

$$M_\infty[|F_1|] \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\ln T}, \qquad T \to \infty.$$

Так как

$$\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\beta},$$

то далее (см. (64))

$$M_\infty[|F_2|] = \int_{-\infty}^{\infty} |F_2|\, w_\infty(F_2)\,\mathrm{d}F_2 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{1}{\ln^{3/2} P} \int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \ln^{3/2} P = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \ln^{3/2} \frac{T}{2\pi} \sim \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \ln^{3/2} T, \; T \to \infty.$$

Следовательно, из (65) получаем асимптотическое соотношение для статистической площади Z-тела вращения:

$$K \sim \frac{2}{\sqrt{3}} U \ln^2 T, \; T \to \infty. \tag{66}$$

Замечание 5. Если:

(а) справедлива гипотеза Римана,

(б) $2\pi \int_T^{T+U} |Z(t)| \sqrt{1 + \{Z'(t)\}^2}\,\mathrm{d}t \sim K, \; T \to \infty,$

то (см. Замечание 1 и (66))

$$\sum_{T \leq t_0 \leq T+U} Z^2(t_0) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{3}} U \ln^2 T, \; T \to \infty.$$

Для статистической L кривой $Z = Z(t)$, $t \in \langle T, T + H \rangle$ мы получили в работе [15] следующее выражение:

$$L \sim \frac{1}{\sqrt{6\pi}} H \ln^{3/2} T, \; T \to \infty.$$

Соображения, аналогичные вышеприведенным (см. (1)) приводят нас к соотношению

$$\sum_{T \leqq t_0 \leqq T+H} |Z(t_0)| \sim \frac{1}{2\sqrt{6\pi}} H \ln^{3/2} T, \; T \to \infty.$$

14. Длина дуги кривой $x = \frac{1}{2} Z^2(t)$

Пусть $g(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Так как

$$|Z|\sqrt{g + (Z')^2} - \sqrt{g + (ZZ')^2} = |Z| \frac{g}{\sqrt{g + (Z')^2} + |Z'|} -$$

$$- \frac{g}{\sqrt{g + (ZZ')^2} + |ZZ'|} = O(|Z|\sqrt{g}) + O(\sqrt{g}), \; t \in \langle T, T + U \rangle,$$

то

$$\int_T^{T+U} |Z(t)| \sqrt{g(t) + \{Z'(t)\}^2} \, \mathrm{d}t - \int_T^{T+U} \sqrt{g(t) + \{Z(t)\, Z'(t)\}^2} \, \mathrm{d}t =$$

$$= O\left(\frac{U \ln T}{\sqrt{\psi}}\right) + O\left(U \sqrt{\frac{\ln T}{\psi}}\right) = O\left(\frac{U \ln T}{\sqrt{\psi}}\right).$$

Значит, из теоремы 1 получается

Следствие. В предположениях теоремы 1:

$$\int_T^{T+U} \sqrt{g(t) + \{Z(t)\, Z'(t)\}^2} \, \mathrm{d}t \sim \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} Z^2(t_0), \; T \to \infty. \tag{67}$$

Замечание 6. Для длины дуги кривой

$$x = \frac{1}{2} Z^2(t), \; t \in \langle T, T + U \rangle,$$

из (67) $g(t) = 1$, получаем следующую формулу:

$$\int_T^{T+U} \sqrt{1 + \{Z(t)\, Z'(t)\}^2} \, \mathrm{d}t \sim \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} Z^2(t_0), \; T \to \infty.$$

15. Ректификационная формула для некоторого класса кривых в n-мерном пространстве

Напомним, что в [18] мы доказали следующую теорему. Пусть $F(t)$ любая интегрируемая по Лебегу положительная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_T^{T+H} F(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{H\ln^2 T}{\psi^2}\right).$$

Тогда, по гипотезе Римана:

$$\int_T^{T+H} \sqrt{F(t) + \{Z'(t)\}^2}\,\mathrm{d}t \sim 2\cdot \sum_{T\leqq t_0\leqq T+H} |Z(t_0)|,\ T\to\infty, \tag{68}$$

для $H\in\langle T^{\mu}, \sqrt[4]{T}\rangle$, где $0<\mu$-сколь угодно малое число.

Пусть L-любая кусочно гладкая кривая определенная уравнениями

$$x_{\mathrm{i}} = F_i(t),\ i = 1, \dots, n-1,$$

$$x_{\mathrm{n}} = Z(t),$$

где $t\in\langle T, T+H\rangle$, удовлетворяющая условию

$$\int_T^{T+H} \sum_{i=1}^{n-1} \{F_i'(t)\}^2\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{H\ln^2 T}{\psi^2}\right). \tag{69}$$

Поскольку

$$0 < \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \{F_i'(t)\}^2 + \{Z'(t)\}^2\right)^{1/2} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \{F_i'(t)\}^2 + \{Z'(t)\}^2\right)^{1/2} < 1 \tag{70}$$

и асимптотическая формула (68) применима к функции

$$F(t) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \{F_i'(t)\}^2$$

при условии (69), то, из (68), в силу (70), получаем для длины $|L|$ дуги кривой L следующую формулу:

$$|L| = \int_T^{T+H} \sqrt{\{F_1'(t)\}^2 + \dots + \{F_{n-1}'(t)\}^2 + \{Z'(t)\}^2}\,\mathrm{d}t \sim$$

$$\sim 2\cdot \sum_{T\leqq t_0\leqq T+H} |Z(t_0)|,\ T\to\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чебышев, П. Л.: О приближенных выражениях квадратного корня переменной через простые дроби, Приложение к 61 тому Записок Императорской Академии наук, № 1

(1889); см. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, т. 3, Издательство АН СССР, Москва—Ленинград 1948, стр. 240—255.
2. Мозер, Ян: Об одном новом следствии из гипотезы Римана, Acta Arith., 25 (1974), 240—255.
3. Мозер, Ян: Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой, Acta Arith., 26 (1974), 33—39.
4. Мозер, Ян: О точках перегиба функции $Z(t)$, Acta Arith., 28 (1975), 89—99.
5. Мозер, Ян: О корнях уравнения $Z'(t) = 0$, Acta Arith., 40 (1981), 79—89.
6. Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана-Зигеля, Acta Arith., 42 (1982), 1—10.
7. Мозер, Ян: Об одной лемме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 42—43 (1983), 7—26.
8. Мозер, Ян: О некоторых оценках снизу для расстояний соседних нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 44—45 (1984), 75—80.
9. Мозер, Ян: Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна-Фридмана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 44—45 (1984), 115—125.
10. Мозер, Ян: Новые теоремы о среднем для функции $\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2$, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 46—47 (1985), 21—40.
11. Мозер, Ян: О поведении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 46—47 (1985), 41—48.
12. Мозер, Ян: О распределении корней уравнений $Z(t) = 0$, $Z'(t) = 0$, в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 52—53 (1988), 7—19.
13. Мозер, Ян: Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна-Фридмана II, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 52—53 (1988), 49—73.
14. Мозер, Ян: Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна-Фридмана III, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 54—55, (1988), 53—71.
15. Мозер, Ян: Теорема Ляпунова и статистическая длина дуги одной кривой в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 54—55, (1988), 147—163.
16. Мозер, Ян: Некоторые уравнения состояния, определяемые дзета-функцией Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 56—57,(1989), 23—45.
17. Мозер, Ян: Формула Римана-Зигеля и аналоги теоремы Котельникова — Уиттекера — Найквиста в теории информации, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 58—59 (1990), 37—36.
18. Мозер, Ян: Гипотеза Римана и экстремальные значения функции $Z(t)$, Acta Arith., Vol. 56, No 3, 56 (1990), 225—236.
19. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.
20. Lehmer, D. H.: On the roots of the Riemann zeta-function, Acta Math., 95 (1956), 291—298.
21. Littlewood, J. E.: Two notes on the Riemann zeta-function, Proc. Cambr. Phil. Soc., 22 (1924), 234—242.

Адрес автора:

Ján Moser
Katedra matematickej
analýzy MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 15. 9. 1989

SUMMARY

RIEMANN HYPOTHESIS AND THE AREA OF THE Z-SURFACE OF REVOLUTION

Ján Moser, Bratislava

In the paper the following asymptotic formula is proved:

$$2\pi \int_T^{T+U} |Z(t)| \sqrt{1 + \{Z'(t)\}^2}\, dt \sim 2 \cdot \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} \pi Z^2(t_0),\ T \to \infty, \tag{1}$$

where $Z(t_0)$ denotes the local extrem of $Z(t)$. As to the order of the sum in (1) the following estimates are proved:

$$\frac{2}{\pi}(1 - \varepsilon)\, U \ln T < \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} Z^2(t_0) < \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 + \varepsilon)\, U \ln^2 T,$$

($0 < \varepsilon$ is arbitrary small number).

SÚHRN

RIEMANNOVA HYPOTÉZA A PLOCHA ROTAČNÉHO Z-TELESA

Ján Moser, Bratislava

V práci je dokázaný nasledujúci asymptotický vzorec:

$$2\pi \int_T^{T+U} |Z(t)| \sqrt{1 + \{Z'(t)\}^2}\, dt \sim 2 \cdot \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} \pi Z^2(t_0),\ T \to \infty, \tag{1}$$

kde $Z(t_0)$ označuje lokálny extrém funkcie $Z(t)$. O ráde sumy v (1) sú dokázané tieto nerovnosti:

$$\frac{2}{\pi}(1 - \varepsilon)\, U \ln T < \sum_{T \leqq t_0 \leqq T+U} Z^2(t_0) < \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 + \varepsilon)\, U \ln^2 T,$$

($0 < \varepsilon$ je ľubovoľne malé číslo).