UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LVI—LVII

НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ДЗЕТА-ФУНКЦИЕЙ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

Введение

Предлагаемая работа продолжает исследования из работ [11]—[13] которые, в свою очередь, опираются на работы [8]—[10].

Метод, использованный нами для построения промежуточных уравнений состояния в работах [9], [11]—[13], (в связи с вопросом Уилера, [3], стр. 114), можно охарактеризовать как топологическую деформацию циклоиды Фридмана (Ц. Ф.):

$$R(t) = \frac{1}{2} R_0 . (1 - \cos \eta),$$

$$t = \frac{1}{2} R_0 . (\eta - \sin \eta),$$

$\eta \in (0, 2\pi)$, соответствующей уравнению состояния $p = 0$, (пыль).

Мы использовали следующую топологическую деформацию:

$$\text{Ц. Ф.} \to r(t_0) . Z(t) > 0, \qquad t \in (\gamma', \gamma''); \; \gamma' < t_0 < \gamma'', \; \gamma' > 0,$$

где

$$t(0) = 0 \to \gamma', \; t(\pi) = \frac{\pi}{2} R_0 \to t_0, \; t(2\pi) = \pi R_0 \to \gamma'',$$

и, например,

$$r(t_0) = \operatorname{sgn} \{Z(t_0)\}, \quad \frac{c}{Z(t_0)} \left\{ \beta \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0 - \gamma)^2} \right\}^{-1/2},$$

(см. [9], [11]). В работе [13] мы использовали следующую топологическую деформацию:

$$Ц.\,Ф. \to \frac{c}{\sqrt{\Lambda}}\left\{\frac{Z(t)}{Z(t_0)}\right\}^{\alpha(t_0)}, \qquad t \in (\gamma', \gamma'').$$

Итак, топологические деформации Ц. Ф., которые определяются, в основном, функцией $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|$, порождают бесконечное множество математических решений уравнений Эйнштейна—Фридмана и соответствующих уравнений состояния.

Однако, в связи с вопросом о промежуточных уравнениях состояния, необходимо еще постулировать математические ограничения на изменение давления и плотности вещества. Напомним, что:

(A) в работе [9] мы попробовали удовлетворить естественным неравенствам $\varrho > 0, p \geqq 0$, с помощью гипотезы Римана и Ω-теоремы Титчмарша,

(B) в работе [11] мы определили физическую область по отношению к неравенствам

$$0 \leqq p \leqq \frac{1}{3}c^2\varrho,$$

(C) в работе [12] мы использовали для этой цели также неравенства

$$-\frac{1}{3}c^2\varrho \leqq p \leqq \frac{1}{3}c^2\varrho.$$

В предлагаемой работе, для определения физической области, мы используем неравенства

$$-c^2\varrho \leqq p \leqq c^2\varrho, \qquad \varrho > 0.$$

Перечислим некоторые из полученных результатов.

В первой главе доказано, что, по гипотезе Римана, физическая область решения уравнений Эйнштейна—Фридмана, соответствующего радиусу Вселенной

$$R = c\,\frac{Z(t)}{Z(t_0)}\left\{\beta\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^{-1/2}, \qquad t \in (\gamma', \gamma''),\ \beta > \frac{1}{2},$$

существует для всех достаточно больших $t_0 > 0$.

Особо отметим, что теперь в физическую область входят и некоторые окрестности нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$.

Далее доказано, что, по гипотезе Римана, в окрестностях нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$, справедливо следующее асимптотическое уравнение состояния нового типа:

$$p \sim -\frac{1}{3}c^2\varrho,$$

независимо от кратностей критических нулей дзета-функции Римана.

Итак, в построенных математических Вселенных, не только начало расширения но и конец сжатия происходят при отрицательных давлениях, (ср. [6], стр. 41).

Во второй главе изучаются решения уравнений Эйнштейна-Фридмана с положительной космологической постоянной, соответствующие радиусу Вселенной

$$R = \mu\frac{c}{\sqrt{\Lambda}}\left\{\frac{Z(t)}{Z(t_0)}\right\}^{\alpha(t_0)} = \mu\frac{c}{\sqrt{\Lambda}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{t_0}\right)\right\}, \qquad t_0 > K > 0,\ \mu > 0,$$

обобщающие решения из работы [13].

Доказано, что, по гипотезе Римана, в физическую область этих решений, определенную по отношению к неравенству $|p| \leqq c^2\varrho$, входит существенная часть $I(t_0)$ (см. [13], (2)) промежутка (γ', γ'').

Далее доказано, что бесконечному множеству построенных решений, соответствует бесконечное множество уравнений состояния:

$$\frac{p}{c^2\varrho} \sim \frac{\mu^2 - 1}{3 - \mu^2}, \qquad \mu \in (0, \sqrt{2}),\ \ t \in I(t_0).$$

Например, для значений

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1,\ \sqrt{\frac{6}{5}},\ \sqrt{\frac{3}{2}},$$

получаем:

$$p \sim -\frac{1}{5}c^2\varrho,\ 0,\ \frac{1}{9}c^2\varrho,\ \frac{1}{3}c^2\varrho$$

соответственно.

Еще упомянем следующий результат: по гипотезе Римана, при любом фиксированном $t_0 > K$, в любой ε — окрестности равновесного состояния Эйнштейна на промежутке $I(t_0)$, существует бесконечное множество асимптотически равновесных состояний.

В третьей главе, прежде всего, вводится понятие **шема***), т. е. последовательности $\{\mu(t_0)\}$, $\mu(t_0) \in (0, \sqrt{2})$, $t_0 \in (-\infty, \infty)$, (напомним, что $Z'(t_0) = 0$, $t_0 \neq \gamma$). Далее, построены следующие бесконечные системы импульсных решений уравнений Эйнштейна—Фридмана, соответствующие бесконечному множеству шемов:

(A) система несвязанных импульсных решений Н.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$,

(B) система связанных импульсных решений С.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$.

Вышеприведенные системы интерпретируем как бесконечное множество типов несвязанных (связанных) колебаний первичного атома Г. Лемэтра — всякому шему соответствует один тип колебаний.

В нашем случае сингулярными точками являются нули $t = \gamma$ функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$. Сингулярная точка представляет собой качественно новое состояние Вселенной. Относительно поведения энтропии $S(t)$ Вселенной, при прохождении через сингулярную точку $t = \gamma$, мы используем следующую гипотезу (ср. [13]):

$$S(\gamma - 0) > S(\gamma + 0) = S_0 \geqq 0,$$

где S_0 — абсолютная постоянная и $S(\gamma) = S_0$. В силу этой гипотезы, энтропия $S(t)$ является конечной для всех $t \in (-\infty, \infty)$ и система Н.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$ превращается в систему С.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$.

Далее, определены следующие понятия: асимптотически полная масса, спектр асимп. полных масс соответствующий шему и вырожденные состояния первичного атома Г. Лемэтра, соответствующие сопряженным значениям параметра μ.

С помощью этих понятий проведена **классификация** С.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$, по признаку сохранения асимп. полной массы.

Бесконечное множество типов связанных колебаний первичного атома Г. Лемэтра, соответствующих бесконечному множеству шемов $\{\mu(t_0)\}$, описывает некоторые математические модели **эволюции** первичного атома, предшествующей «Болшому взрыву».

Наконец отметим, что, с эстетической точки зрения, можно считать удовлетворительным тот факт, что математические концепции, касающиеся колебаний первичного атома Г. Лемэтра, приводят к точке соприкосновения следующих направлений: дзета-функции Римана, гипотезы Римана, общей теории относительности Эйнштейна (построенной с помощью геометрии Римана) и энтропии.

*) Воспоминание о Големе.

I. Уравнения состояния в случае $k = 1$, $\Lambda = 0$

1 Новое определение физической области

Напомним (см. [11]), что для математических решений ($t \in (\gamma', \gamma'')$, $\gamma' < t_0 < \gamma''$):

$$
\begin{aligned}
R(t;\, \beta,\, t_0) &= c\frac{Z(t)}{Z(t_0)}\left\{\beta\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^{-1/2}, \qquad \beta > 0,\\
\varkappa c^2\varrho(t;\, \beta,\, t_0) &= 3\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 + 3\beta\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2\cdot\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2},\\
\varkappa p(t;\, \beta,\, t_0) &= -3\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 - \beta\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2\cdot\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} +\\
&\quad + 2\sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \qquad t_0 > K > 0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

(K — достаточно большое число) уравнений Эйнштейна—Фридмана ($k = 1$, $\Lambda = 0$)

$$
\begin{aligned}
\varkappa c^2\varrho(t) &= 3\left(\frac{R'}{R}\right)^2 + 3\frac{c^2}{R^2},\\
\varkappa p(t) &= -2\frac{R''}{R} - \left(\frac{R'}{R}\right)^2 - \frac{c^2}{R^2},
\end{aligned} \tag{2}
$$

построенных с помощью дзета-функции Римана, физическая область была определена по отношению к неравенствам

$$0 \leqq p(t) \leqq \frac{1}{3}c^2\varrho(t).$$

В работе [12], для этой цели было использовано также неравенство

$$|p(t)| \leqq \frac{1}{3}c^2 p(t).$$

Теперь, для определения физической области, используем неравенства:

$$-c^2\varrho(t) \leqq p(t) \leqq c^2 p(t), \qquad \varrho(t) > 0. \tag{3}$$

Напомним, что:

(A) неравенство $p \leqq c^2\varrho$ есть условие Я. Б. Зельдовича (см. [5], стр. 74),

(B) равенство же $p = -c^2\varrho$ есть уравнение состояния физического вакуума (см. [6], стр. 28, 29, ср. [7], стр. 201, 204, 205).

Неравенства (3) равносильны следующим:

$$E_1 = \varkappa c^2 \varrho - \varkappa p \geqq 0, \quad E_2 = \varkappa c^2 \varrho + \varkappa p \geqq 0, \qquad \varrho > 0. \tag{4}$$

Отсюда, в силу (1), получаем:

$$E_1(t;\ \beta,\ t_0) = c\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 + 4\beta\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2 \cdot \sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} - 2\sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right),$$

$$E_2(t;\ \beta,\ t_0) = 2\beta\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2 \cdot \sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + 2\sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \tag{5}$$

$$\varkappa c^2 \varrho(t;\ \beta,\ t_0) = 3\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 + 3\beta\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2 \cdot \sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}.$$

Поскольку неравенства $E_2 \geqq 0$, $\varrho > 0$ удовлетворяются автоматически ($\beta > 0$, $t_0 \to \infty$), то приведем следующее

Определение 1. Множество $F_1 = F_1(\beta,\ t_0)$ значений $t \in (\gamma',\ \gamma'')$, для которых $E_1(t;\ \beta,\ t_0) \geqq 0$, назовем физической областью решения (1), принадлежащей промежутку $(\gamma',\ \gamma'')$.

Справедлива следующая

Теорема 1. По гипотезе Римана, для всех достаточно больших $t_0 > 0$, существуют некоторые окрестности точек γ', γ'', t_0; $\gamma' < t_0 < \gamma''$, входящие в физическую область $F_1(\beta,\ t_0)$ при любом фиксированном $\beta > 1/2$.

Доказательство. Напомним, что, по гипотезе Римана, в силу оценки Литтлвуда (см. [2], стр. 237)

$$\gamma'' - \gamma' < \frac{A}{\ln\ln \gamma'},$$

имеет место оценка снизу

$$\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} > A\,(\ln\ln t_0)^2, \tag{6}$$

для всех достаточно больших $t_0 > 0$.

(A) Полагая теперь в (5) $t = t_0$, получаем:

$$E_1(t_0;\ \beta,\ t_0) = 2(2\beta - 1)\cdot\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right) > A(\beta)\,.\,(\ln\ln t_0)^2 > 0,$$

для $\beta > 1/2$. Отсюда, по непрерывности $E_1(t;\ \beta,\ t_0)$, $t \in (\gamma',\ \gamma'')$, следует существование окрестности точку t_0, для которой $E_1(t;\ \beta,\ t_0) > 0$ при $\beta > 1/2$.

(B) Используем следующие асимптотические равенства ($t \to \bar{\gamma}$, $\bar{\gamma} \to \infty$):

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2} \sim \frac{n(\bar{\gamma})}{(t-\bar{\gamma})^2}, \quad \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 \sim \frac{n^2(\bar{\gamma})}{(t-\bar{\gamma})^2}, \qquad (7)$$
$$\frac{1}{Z^2(t)} \sim \frac{1}{L^2 . (t-\bar{\gamma})^{2n}},$$

где

$$Z(t) = L . (t-\bar{\gamma})^n + \ldots, \quad L = \frac{1}{n!} Z^{(n)}(\bar{\gamma}) \neq 0,$$

($n = n(\bar{\gamma})$ — кратность нуля $t = \bar{\gamma}$ функции $Z(t)$). Так как (см. (5)):

$$E_1(t;\, \beta,\, t_0) \sim \frac{6n^2 - 2n}{(t-\gamma')^2} + 4\beta \frac{Z^2(t_0)}{L^2} \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} \cdot \frac{1}{(t-\gamma')^{2n}},$$

где $n = n(\gamma')$, то $E_1(t;\, \beta,\, t_0) \to \infty$ для $t \to \gamma' + 0$ и $\beta > 0$. Следовательно, при достаточно большом $t_0 > 0$, существует некоторая правая окрестность точки γ' и, аналогичным образом, некоторая левая окрестность точки γ'', для которых $E_1(t;\, \beta,\, t_0) > 0$, $\beta > 0$, (конечно, γ' и γ'' не входят в эти окрестности).

Наконец, из (A) и (B), следует утверждение Теоремы 1.

Замечание 1. Итак, по гипотезе Римана, в физическую область $F_1(\beta,\, t_0)$, определенную по отношению к (3), входят и некоторые окрестности нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)$ — обстоятельство, не имеющее места в случае рассмотренном в [11].

2 Бесконечное множество уравнений состояния, определяемых функцией $Z(t)$.

В работе [12] была доказана, кроме прочего, следующая теорема: По гипотезе Римана, функция $\varrho(t;\, \beta,\, t_0)$, $t \in (\gamma',\, \gamma'')$, $\beta > 0$, имеет в промежутке $(\gamma',\, \gamma'')$ единственную стационарную точку t_0, в которой реализуется глобальный положительный минимум этой функции, (для всех достаточно больших $\gamma' > 0$).

Значит, функция $\varrho(t;\, \beta,\, t_0)$:

(A) в промежутке $(\gamma',\, t_0\rangle$ убывает,

(B) в промежутке $(t_0,\, \gamma'')$ возрастает.

Отсюда следует существование обратных функций:

$$t = \varphi_1(\varrho;\, \beta,\, t_0), \quad \varrho \in \langle \varrho_0,\, +\infty), \quad t \in (\gamma',\, t_0\rangle,$$

где $\varrho_0 = \varrho(t_0;\, \beta,\, t_0)$, и,

$$t = \varphi_2(\varrho;\ \beta,\ t_0),\ \ \varrho \in \langle \varrho_0,\ +\infty),\ \ t \in (t_0,\ \gamma''),$$

для любых фиксированных $\beta > 0$, $t_0 > K$.

Подставляя φ_1, φ_2 в последнее соотношение в (1), получаем такой результат.

Замечание 2. По гипотезе Римана, бесконечному множеству решений (1) уравнений Эйнштейна—Фридмана (2), цоответствует следующее бесконечное множество уравнений состояния:

$$p = F(\varrho;\ \beta,\ t_0) =$$

$$\text{(A)} \qquad = -\frac{3}{\varkappa}\left\{\frac{Z'(\varphi_1)}{Z(\varphi_1)}\right\}^2 - \frac{\beta}{\varkappa}\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(\varphi_1)}\right\}^2 \cdot \sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} +$$

$$+\frac{2}{\varkappa}\sum_\gamma \frac{1}{(\varphi_1-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \quad \varphi_1 \in (\gamma',\ t_0\rangle,$$

$$\text{(B)} \qquad = -\frac{3}{\varkappa}\left\{\frac{Z'(\varphi_2)}{Z(\varphi_2)}\right\}^2 - \frac{\beta}{\varkappa}\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(\varphi_2)}\right\}^2 \cdot \sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + \tag{8}$$

$$+\frac{2}{\varkappa}\sum_\gamma \frac{1}{(\varphi_2-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \quad \varphi_2 \in (t_0,\ \gamma''),$$

для $\varrho \in \langle \varrho_0,\ +\infty)$, $\beta > 1/2$ (см. Теорему 1) и всех $t_0 > K$.

3 Асимптотические уравнения состояния

Прежде всего заметим, что уравнение состояния (8) в случае, когда $t \to \gamma$ и $\gamma \to \infty$, естественно назвать асимптотическим уравнением состояния. Справедлива

Теорема 2. По гипотезе Римана имеет место следующее асимптотическое уравнение состояния:

$$p \sim -\frac{1}{3}c^2\varrho, \qquad t \to \gamma,\ \gamma \to \infty. \tag{9}$$

Замечание 3. Особенно отметим, что главный член в асимп. уравнении состояния (9), не зависит от кратности $n(\gamma)$ нуля $t = \gamma$ функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$.

Доказательство теоремы 2. Из (1), в силу (7), в случае $t \to \gamma' + 0$, $\gamma' \to \infty$, $(\gamma' < t_0 < \gamma'')$, получаем:

$$\varkappa c^2\varrho(t;\,\beta,\,t_0) \sim \frac{3n^2(\gamma')}{(t-\gamma')^2} + 3\beta\frac{Z^2(t_0)}{L^2}\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\cdot\frac{1}{(t-\gamma')^{2n}},$$

$$\varkappa p(t;\,\beta,\,t_0) \sim \frac{2n(\gamma') - 3n^2(\gamma')}{(t-\gamma')^2} - \beta\frac{Z^2(t_0)}{L^2}\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\cdot\frac{1}{(t-\gamma')^{2n}}.$$

Теперь:

(A) для $n(\gamma') = 1$ имеем

$$\varkappa c^2\varrho \sim 3\left(1 + \beta\frac{Z^2(t_0)}{Z'^2(\gamma')}\cdot\sum_\gamma\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right)\cdot\frac{1}{(t-\gamma')^2},$$

$$\varkappa p \sim -\left(1 + \beta\frac{Z^2(t_0)}{Z'^2(\gamma')}\cdot\sum_\gamma\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right)\cdot\frac{1}{(t-\gamma')^2},$$

и отсюда,

$$p \sim -\frac{1}{3}c^2\varrho, \quad t\to\gamma'+0,\ \gamma'\to\infty, \tag{10}$$

(B) для $n(\gamma')\geqq 2$ имеем

$$\varkappa c^2\varrho \sim 3\beta\frac{Z^2(t_0)}{L^2}\cdot\sum_\gamma\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\cdot\frac{1}{(t-\gamma')^{2n}},$$

$$\varkappa p \sim -\beta\frac{Z^2(t_0)}{L^2}\cdot\sum_\gamma\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\cdot\frac{1}{(t-\gamma')^{2n}},$$

и отсюда,

$$p \sim -\frac{1}{3}c^2\varrho, \quad t\to\gamma'+0,\ \gamma'\to\infty. \tag{11}$$

(C) Результаты, аналогичные (10), (11), получаются и в случае $t\to\gamma''-0$, $\gamma''\to\infty$. Доказательство закончено.

В книге [6], Я. Б. Зельдович отметил следующее: *«... Э. Б. Глинер предположил, что при сжатии в пределе должно возникнуть состояние с отрицательным давлением. Сейчас мы знаем, что такое состояние может получиться только в ходе расширения.»*

В связи с этим делаем

Замечание 4. Для математических решений (1) уравнений Эйнштейна —Фридмана, в силу Теоремы 2, и в начале расширения и в конце сжатия возникают состояния с отрицательным давлением*).

*) Автор также построил вселенные, полная эволюция которых протекает при отрицательных давлениях, (независимо от гипотезы Римана).

4 Асимптотическое поведение последовательности максимальных значений радиусов Вселенных

Максимальное значение радиуса Вселенной при $t \in (\gamma', \gamma'')$, имеет следующее значение:

$$R(t_0;\ \beta,\ t_0) = c\left\{\beta \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0 - \gamma)^2}\right\}^{-1/2}, \qquad t_0 > K > 0,\ \beta > 0.$$

По гипотезе Римана имеет место (см. (6)) оценка

$$0 < R(t_0;\ \beta,\ t_0) < \frac{A}{\sqrt{\beta} \ln\ln t_0}, \qquad t_0 > K.$$

Следовательно, делаем

Замечание 5. Итак, по гипотезе Римана, члены последовательности $\{R(t_0;\ \beta,\ t_0)\}$, $t_0 > K$, $\beta > 0$, совершают сложные колебания, определяемые взаимным расположением корней уравнений $Z(t) = 0$, $Z'(t) = 0$, т.е. расположением членов последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$, $t_0 \neq \gamma$. При этом: $R(t_0;\ \beta,\ t_0) \to 0$, $t_0 \to \infty$.

5 Обобщение решений типа (1) в окрестностях нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$

Асимптотическое поведение последовательности $\{R(t_0;\ \beta,\ t_0)\}$: $R(t_0;\ \beta,\ t_0) \to 0$, $t_0 \to \infty$, приводит к мысли обобщить решения типа (1), скажем, следующим образом

$$R(t;\ r,\ t_0) = cr(t_0)\cdot\frac{Z(t)}{Z(t_0)}, \qquad t \in (\gamma', \gamma''),\ r(t_0) > 0,\ t_0 > K,$$

$$\varkappa c^2 \varrho(t;\ r,\ t_0) = 3\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 + \frac{3}{r^2}\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2, \tag{12}$$

$$\varkappa p(t;\ r,\ t_0) = -3\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 - \frac{1}{r^2}\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2 + 2\sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right).$$

Физическая область $F_2(r,\ t_0)$ определяется по аналогии с Определением 1. В нашем случае:

$$E_1 = \varkappa c^2 \varrho - \varkappa p = 6\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 + \frac{4}{r^2}\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2 - 2\sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right).$$

Отсюда, в силу асимптотических соотношений (7), получаем ($t_0 \to \infty$, $t \to \gamma' + 0$)

$$E_1 \sim 2\frac{3n^2-n}{(t-\gamma')^2}+4\frac{Z^2(t_0)}{r^2L^2}\cdot\frac{1}{(t-\gamma')^{2n}}>0,$$

независимо от кратности $n(\gamma')$, (аналогичное соотношение получаем и в случае $t_0\to\infty$, $t\to\gamma''-0$). Следовательно, имеет место

Теорема 1'. По гипотезе Римана, для любого $t_0>K$ существуют некоторые окрестности точек γ', γ'', $(\gamma'<t_0<\gamma'')$, входящие в физическую область $F_2(r,t_0)$.

Замечание 6. Фиксированной последовательности $\{r(t_0)\}$, $r(t_0)>0$, $t_0>K$, соответствует бесконечное множество решений типа (12). При этом, существует бесконечное множество возможностей для выбора последовательностей $\{r(t_0)\}$, $t_0>K$.

В силу соотношения

$$E_1(t_0)=\frac{4}{r^2}-2\sum_\gamma\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}+O\left(\frac{1}{t_0}\right)$$

делаем (см. (6))

Замечание 7. Существуют последовательности $\{r(t_0)\}$, $r(t_0)>0$, $t_0>K$, такого рода, что для некоторых членов $r(\bar{t}_0)=\bar{r}$, физическая область $F_2(\bar{r},\bar{t}_0)$ не содержит окрестности точки $\bar{t}_0$.

По аналогии с Теоремой 2, делаем

Замечание 8. По гипотезе Римана имеет место следующее асимптотическое уравнение состояния:

$$p\sim-\frac{1}{3}c^2\varrho,\qquad t\to\gamma,\ \gamma\to\infty.$$

II Уравнения состояния в случае $k=1$, $\Lambda>0$

6 Бесконечное множество уравнений состояния в промежутке $I(t_0)$

Внося в уравнения Эйнштейна—Фридмана ($k=1$, $\Lambda>0$)

$$\begin{aligned}\varkappa c^2\varrho(t)&=3\left(\frac{R'}{R}\right)^2+3\frac{c^2}{R^2}-\Lambda,\\ \varkappa p(t)&=-2\frac{R''}{R}-\left(\frac{R'}{R}\right)^2-\frac{c^2}{R^2}+\Lambda,\end{aligned}\tag{13}$$

вместо R следующее выражение (ср. [13], (40)—(42), обозначения см. там же)

$$R=R(t;\Lambda,\mu,t_0)=\mu\frac{c}{\sqrt{\Lambda}}\left\{\frac{Z(t)}{Z(t_0)}\right\}^{\alpha(t_0)},\qquad t\in(\gamma',\gamma''),\ \mu>0\tag{14}$$

то, по гипотезе Римана, для $t \in I(t_0) \subset (\gamma', \gamma'')$, (цм. [13], (2)), получаем следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
R(t;\, \Lambda,\, t_0,\, \mu) = \mu \frac{c}{\sqrt{\Lambda}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{t_0}\right)\right\} = \mu \frac{c}{\sqrt{\Lambda}} + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \\
\varkappa c^2 \varrho(t;\, \Lambda,\, t_0,\, \mu) = \left(\frac{3}{\mu^2} - 1\right)\Lambda + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \\
\varkappa p(t;\, \Lambda,\, t_0,\, \mu) = \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\lambda + O\left(\frac{1}{t_0}\right),
\end{gathered} \tag{15}
$$

для всех $t_0 > K > 0$, где K — достаточно большое число.

Теперь мы определим физическую область решения (15) уравнений (13), по отношению к неравенствам (3), (ср. (4) и Определение 1).

Определение 2. Множество $F_3 = F_3(\Lambda,\, t_0,\, \mu)$ значений $t \in (\gamma', \gamma'')$, для которых имеет место:

$$
\begin{gathered}
E_1(t;\, \Lambda,\, t_0,\, \mu) = \varkappa c^2 \varrho - \varkappa p \geqq 0, \quad E_2(t;\, \Lambda,\, t_0,\, \mu) = \varkappa c^2 \varrho + \varkappa p, \\
\varrho(t;\, \Lambda,\, t_0,\, \mu) > 0,
\end{gathered} \tag{16}
$$

назовем физической областью решения (15).

Так как для $t \in I(t_0)$, $t_0 > K$:

$$
\begin{gathered}
E_1 = 2\left(\frac{2}{\mu^2} - 1\right)\Lambda + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \quad E_2 = \frac{2}{\mu^2}\Lambda + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \\
\varkappa c^2 \varrho = \left(\frac{3}{\mu^2} - 1\right)\Lambda + O\left(\frac{1}{t_0}\right),
\end{gathered}
$$

и неравенства ($\mu > 0$)

$$
2 > \mu^2,\ \frac{2}{\mu^2} > 0,\ 3 > \mu^2
$$

удовлетворяются для $\mu \in (0, \sqrt{2})$, то справедлива

Теорема 3. По гипотезе Римана:

$$
I(t_0) \subset F_3(\Lambda,\, t_0,\, \mu), \qquad \mu \in (0, \sqrt{2}), \tag{17}
$$

для всех достаточно больших $t_0 > 0$.

Напомним ([13], (3)), что

$$
\frac{1}{\gamma'' - \gamma'} \cdot \operatorname{mes}\{(\gamma', \gamma'') \setminus I(t_0)\} = \omega(t_0).
$$

Значит, при сколь угодно малом $\omega(t_0)$, мера множества $(\gamma', \gamma'')\setminus I(t_0)$ является пренебрежимо малой по отношению к длине основного промежутка (γ', γ''). Следовательно, в силу (17), делаем

Замечание 9. По гипотезе Римана, в физическую область $F_3(\Lambda, t_0, \mu)$ входит существенная часть промежутка (γ', γ''), для всех достаточно больших $t_0 > 0$.

Теперь, из (15), следует асимптотическое равенство:

$$\frac{p(t;\, \Lambda,\, t_0,\, \mu)}{c^2 \varrho(t;\, \Lambda,\, t_0,\, \mu)} \sim \frac{\mu^2 - 1}{3 - \mu^2}, \qquad \mu \in (0, \sqrt{2}), \tag{18}$$

для $t \in I(t_0)$, $t_0 \to \infty$.

Замечание 10. Итак, для любого фиксированного, достаточно большого $t_0 > 0$, мы получили бесконечное множество (мощности континуума) уравнений состояния; всякому $\mu \in (0, \sqrt{2})$ соответствует своё уравнение состояния.

Отметим следующие частные случаи уравнений состояния, входящих в (18), (ε, ε', ε'' — сколь угодно малые положительные числа):

$$\begin{aligned}
&\mu = \varepsilon, && p \sim -\frac{1}{3}(1 - \varepsilon')c^2\varrho,\\
&\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}, && p \sim -\frac{1}{5}c^2\varrho,\\
&\mu = 1, && p \sim 0,\\
&\mu = \sqrt{\frac{6}{5}}, && p \sim \frac{1}{9}c^2\varrho,\\
&\mu = \sqrt{\frac{3}{2}}, && p \sim \frac{1}{3}c^2\varrho,\\
&\mu = \sqrt{2} - \varepsilon, && p \sim (1 - \varepsilon'')c^2\varrho.
\end{aligned}$$

7 Существование бесконечного множества асимптотически равновесных состояний, в окрестности равновесного состояния Эйнштейна

Поскольку при любом фиксированном $\bar{\mu} \in (0, \sqrt{2})$, решение (15) уравнений (13) представляет собой тройку почти постоянных функций

$$B_{\bar{\mu}} = (R_{\bar{\mu}}, \varrho_{\bar{\mu}}, p_{\bar{\mu}}) \tag{19}$$

для $t \in I(t_0)$ и $t_0 > K$, где

$$R_{\bar\mu} = R(t;\ \Lambda,\ t_0,\ \bar\mu),\ \ \varrho_{\bar\mu} = \varrho(t;\ \Lambda,\ t_0,\ \bar\mu),\ \ p_{\bar\mu} = p(t;\ \Lambda,\ t_0,\ \bar\mu),$$

то тройку (19) назовем асимптотически равновесным состоянием на промежутке $I(t_0)$.

Напомним, что А. Эйнштейн первоначально построил модель замкнутой статической Вселенной, которая определяется следующими соотношениями (см. [4], стр. 611):

$$R^* = R(t;\ \Lambda) = \frac{c}{\sqrt{\Lambda}},\quad \varkappa c^2 \varrho^* = \varkappa c^2 \varrho(t;\ \Lambda) = 2\Lambda,$$
$$p^* = p(t;\ \Lambda) = 0,\qquad t \in (-\infty,\ +\infty). \tag{20}$$

Как показал Эддингтон, (см. [1]), Вселенная Эйнштейна (20) является неустойчивой, т.е. представляет собой неустойчивое равновесное состояние.

Определение 3. Решение

$$B^* = (R^*,\ \varrho^*,\ p^*),\qquad t \in I(t_0) \tag{21}$$

уравнений Эйнштейна—Фридмана (13), при любом фиксированном $t_0 > K$, назовем равновесным состоянием Эйнштейна на промежутке $I(t_0)$.

Вводя в пространстве Π троек непрерывных функций

$$B = (\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t),\qquad t \in I(t_0)$$

метрику, скажем:

$$d(B_1,\ B_2) = \max_{t \in I(t_0)} \{|\varphi_1 - \varphi_2| + |\psi_1 - \psi_2| + |\chi_1 - \chi_2|\} \tag{22}$$

мы можем пользоваться понятием ε — окрестности точки этого функционального пространства.

Далее отметим, что точки B^* и B_μ, $\mu \in (0,\ \sqrt{2})$, составляют бесконечное подмножество пространства Π. Очевидно, (см. (15), (19), (21)):

$$\inf_{\mu \in (0,\ \sqrt{2})} d(B_\mu,\ B^*) = d(B_1,\ B^*) = O\left(\frac{1}{t_0}\right).$$

Теперь мы сформулируем результаты, полученные в предшествующем пункте, следующим образом.

Теорема 4.*) По гипотезе Римана, при любом фиксированном $t_0 > K$, в любой ε — окрестности равновесного состояния Эйнштейна на проме-

*) Эта теорема родственна теореме А. М. Лапунова о существовании бесконечного количества равновесных фигур в окрестности однородного вращающегося эллипсоида Маклорена.

жутке $I(t_0)$, существует бесконечное множество асимптотически равновесных состояний. Притом:

(A) асимптотически равновесному состоянию $B_{\bar{\mu}}$ соответствует уравнение состояния

$$\frac{p_{\bar{\mu}}}{c^2 \varrho_{\bar{\mu}}} \sim \frac{\bar{\mu}^2 - 1}{3 - \bar{\mu}^2}, \qquad \bar{\mu} \in (0, \sqrt{2}),\ t_0 \to \infty,$$

(B) из всех асимптотически равновесных состояний B_μ, $\mu \in (0, \sqrt{2})$, состояние B_1 имеет наименьшее расстояние (в смысле метрики (22)) от равновесного состояния Эйнштейна B^*, с оценкой

$$d(B_1, B^*) = O\left(\frac{1}{t_0}\right), \qquad t_0 > K,$$

для этого расстояния.

8 Поведение функций $\varrho(t)$ и $p(t)$ в окрестностях нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)$

Напишем явные выражения для плотности и давления, получающиеся из (13), в силу (14). Имеем (ср. [13], (41)):

$$\varkappa c^2 \varrho = 3\alpha^2 \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 + \frac{3\Lambda}{\mu^2}\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^{2\alpha} - \Lambda,$$

$$\varkappa p = 2\alpha \sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} - 3\alpha^2 \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 - \frac{\Lambda}{\mu^2}\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^{2\alpha} + \Lambda + O\left(\frac{1}{t_0}\right),$$

для $t \neq \gamma$, $t_0 \to \infty$. Пусть теперь $\gamma' < t_0 < \gamma''$, $t \to \gamma' + 0$, $\gamma' \to \infty$ и $n(\gamma')$ — кратность нуля $t = \gamma'$ функции $Z(t)$. В силу (7) получаем:

$$\begin{aligned} \varkappa c^2 \varrho &\sim \frac{3\alpha^2 n^2}{(t-\gamma')^2} + \frac{3\Lambda}{\mu^2}\left\{\frac{Z(t_0)}{L}\right\}^{2\alpha} \cdot \frac{1}{(t-\gamma')^{2n\alpha}}, \\ \varkappa p &\sim \frac{2\alpha n - 3\alpha^2 n^2}{(t-\gamma')^2} - \frac{\Lambda}{\mu^2}\left\{\frac{Z(t_0)}{L}\right\}^{2\alpha} \cdot \frac{1}{(t-\gamma')^{2n\alpha}}. \end{aligned} \tag{23}$$

Далее напомним (см. [13], (2), (36)), что члены последовательности $\alpha(t_0)$ удовлетворяют условию

$$0 < \alpha(t_0) \leqq \frac{\omega^4(t_0)\, m^4(t_0)}{t_0 \Omega(t_0)} < \frac{1}{t_0^2 \ln^4 t_0}, \qquad t_0 > K, \tag{24}$$

и, по гипотезе Римана, очевидно

$$1 \leqq n(\gamma') < A \frac{\ln \gamma'}{\ln\ln \gamma'} < A \frac{\ln t_0}{\ln\ln t_0}. \tag{25}$$

Так как, в силу (24), (25),

$$2n(\gamma')\,\alpha(t_0) < \frac{A}{t_0^2 \ln^3 t_0 \ln\ln t_0} \to 0, \qquad t_0 \to \infty, \tag{26}$$

то, из (23), получаем

$$\varkappa c^2 \varrho \sim \frac{3\alpha^2 n^2}{(t-\gamma')^2}, \quad \varkappa p \sim \frac{2\alpha n - 3\alpha^2 n^2}{(t-\gamma')^2}. \tag{27}$$

Следовательно,

$$\frac{p}{c^2 \varrho} \sim -1 + \frac{2}{3\alpha(t_0)\, n(\gamma')},$$

и, отсюда, в силу (26),

$$\frac{p}{c^2\varrho} > A t_0^2 \ln^3 t_0 \ln\ln t_0 \to \infty, \qquad t_0 \to \infty,\ t \to \gamma' + 0. \tag{28}$$

Аналогичным образом получаем:

$$\frac{p}{c^2\varrho} > A t_0^2 \ln^3 t_0 \ln\ln t_0 \to \infty, \qquad t_0 \to \infty,\ t \to \gamma'' - 0. \tag{29}$$

Наконец, из (28), (29) следует (ср. (16)), что существует $\delta(\gamma) > 0$ такое, что

$$(\gamma', \gamma' + \delta(\gamma')) \cup (\gamma'' - \delta(\gamma''), \gamma'') \not\subset F_3, \qquad t_0 \to \infty.$$

Итак, справедлива

Теорема 5. По гипотезе Римана существуют $K > 0$, $\delta(\gamma) > 0$ такие, что

$$(\gamma', \gamma' + \delta(\gamma')) \cup (\gamma'' - \delta(\gamma''), \gamma'') \not\subset F_3(\Lambda, t_0, \mu),$$

для всех $t_0 > K$, независимо от кратностей $n(\gamma')$, $n(\gamma'')$ нулей $t = \gamma'$, γ'' функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)$, (т.е. некоторая правая окрестность точки γ' и некоторая левая окрестность точки γ'' не входят в физическую область F_3).

III Колебания первичного атома Г. Лемэтра

9 Несвязанные колебания, соответствующие бесконечному множеству шемов

Аналогично изложенному в работе [13], тройку почти постоянных функций (15) для $t \in I(t_0)$, $\mu \in (0, \sqrt{2})$, при любом фиксированном $t_0 > K$, назовем импульсным решением (И. Р.) уравнений (13).

Замечание 11. При фиксированных Λ, t_0; $t_0 > K$, (15) представляет собой однопараметрическое семейство И. Р. уравнений (13), которое мы обозначим через

$$\text{И.Р. } (\Lambda, t_0; \mu), \qquad \mu \in (0, \sqrt{2}).$$

Напомним, что в работе [13], пункт 5, (C), была доказана возможность построения И.Р. для всех $t_0 \in (-\infty, +\infty)$. Аналогичным образом получаем и в нашем случае тройку почти постоянных функций (ср. (15)):

$$\begin{aligned} R(t; \Lambda, t_0, \mu) &= \mu \frac{c}{\sqrt{\Lambda}} + H(t_0), \\ \varkappa c^2 \varrho(t; \Lambda, t_0, \mu) &= \left(\frac{3}{\mu^2} - 1\right)\lambda + H(t_0), \\ \varkappa p(t; \Lambda, t_0, \mu) &= \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\Lambda + H(t_0), \end{aligned} \tag{30}$$

для $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, где

$$\begin{aligned} H(t_0) &= O\left(\frac{1}{t_0}\right), \qquad |t_0| > K > 0, \\ |H(t_0)| &\leqq \left|O\left(\frac{1}{K}\right)\right|, \qquad |t_0| \leqq K. \end{aligned} \tag{31}$$

Замечание 12. Итак, И.Р. $(\Lambda, t_0; \mu)$ существует для всех $t_0 \in (-\infty, +\infty)$. Для последующего изложения оказывается целесообразным

Определение 4. Любую последовательность $\{\mu(t_0)\}$, $\mu(t_0) \in (0, \sqrt{2})$, определенную для последовательности $\{t_0\}$, $(Z'(t_0) = 0, t_0 \neq \gamma)$, назовем шемом.

Определение 5. Бесконечную систему

$$\text{И.Р. } (\Lambda, t_0; \mu(t_0)), \qquad t_0 \in (-\infty, +\infty)$$

назовем системой несвязанных импульсных решений, соответствующих шему $\{\mu(t_0)\}$ и обозначим через Н.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$.

Далее мы отметим, что нули $t = \gamma$ функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)$ являются сингулясными точками в следующем смысле (ср. (26)—(29)):

$$\begin{aligned} R(\gamma') = R(\gamma'') = 0, \\ \varrho(\gamma' + 0) = \varrho(\gamma'' - 0) = +\infty, \; p(\gamma' + 0) = p(\gamma'' - 0) = +\infty; \end{aligned} \tag{32}$$

для t_0 подчиненных условию $|t_0| \leqq K$ (см. (31)), мы воспользовались тем, что $\alpha(t_0)$ сколь угодно мало, например, в формуле

$$\varkappa p \sim 2\alpha n \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\alpha n\right)\frac{1}{(t-\gamma')^2}.$$

В силу (32) назовем множество $\langle\gamma', \gamma''\rangle \setminus I(t_0)$ сингулярной областью а промежуток $I(t_0)$ — регулярной областью.

Замечание 13. Чередование сингулярных и регулярных областей определяется, в основном, ($\omega(t_0)$ — сколь угодно мало, см. [13], (2), (3)) законом распределения нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, т.е. происходит почти случайным образом (ср. [13], пункт 5, (E)) — что является некоторым аргументом в пользу выбора функции $Z(t)$ в определении радиуса Вселенной (14).

Наконец приведем следующую интерпретацию Н.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$.

Замечание 14. Разбиению промежутка $(-\infty, +\infty)$ на объединение регулярных и сингулярных областей и любому фиксированному шему $\{\mu(t_0)\}$, соответствует один тип несвязанных колебаний первичного атома Г. Леметра между регулярными и сингулярными состояниями. При этом:

(A) шем $\{\mu(t_0)\}$ определяет колебание асимптотического значения радиуса первичного атома

$$\mu(t_0)\cdot\frac{c}{\sqrt{\Lambda}},$$

(B) существует бесконечное множество типов несвязанных колебаний первичного атома — всякому шему соответствует один тип колебания.

10 Связанные колебания и нарушение закона возрастания энтропии, при прохождении через сингулярную точку

Напомним (см. [13], пункт 6), что вопрос о возможности превратить систему Н.И.Р. в систему С.И.Р. теснейшим образом связан с вопросом о поведении энтропии Вселенной $S(t)$ при прохождении через сингулярную точку. В нашем случае сингулярными точками являются нули $t = \gamma$ функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$. В этом направлении мы вводим (ср. [13]) следующую математическую гипотезу:

$$S(\gamma - 0) > S(\gamma + 0) = S_0 \geqq 0, \tag{33}$$

где S_0 — абсолютная постоянная и $S(\gamma) = S_0$ для всех $\gamma \in (-\infty, +\infty)$.

Замечание 15. Согласно гипотезе (33), Энтропия вселенной $S(t)$:

(A) при прохождении через сингулярную точку $t = \gamma$, которая представляет собой математическую абстракцию для качественно нового состояния Вселенной, скачкообразно падает,

(B) остается конечной для всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Замечание 16. Согласно гипотезе (33), система Н.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$, соответствующая шему $\{\mu(t_0)\}$, превращается в систему связанных И.Р.—С.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$, соответствующую шему $\{\mu(t_0)\}$.

Наконец отметим, что С.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$ интерпретируем согласно Замечанию 14, (несвязанные $\to$ связанные).

11 Классификация связанных колебаний

11.1 Спектр асимптотически полных масс, соответствующий шему

Объем V сферической Вселенной, соответствующий радиусу $R(t)$, равен

$$V = 2\pi^2 R^2(t).$$

Следовательно, в силу (30),

$$V = \frac{2\pi^2 c^3}{\Lambda^{3/2}} \mu^3 + H_1(t_0), \qquad t_0 \in I(t_0).$$

объему V соответствует полная масса:

$$M = \frac{2\pi^2 c}{\varkappa\sqrt{\Lambda}} (3\mu - \mu^3) + H_2(t_0), \qquad t \in I(t_0),$$

($H_1(t_0)$, $H_2(t_0)$ — функции, порожденные $H(t_0)$).

Определение 6. Величину

$$M_0 = M_0(\mu) = \frac{2\pi^2 c}{\varkappa\sqrt{\Lambda}} (3\mu - \mu^3), \qquad \mu \in (0, \sqrt{2}),$$

назовем асимптотически полной массой, соответствующей регулярной области $I(t_0)$ и последовательность $\{M_0[\mu(t_0)]\}$, где

$$M_0[\mu(t_0)] = \frac{2\pi^2 c}{\varkappa\sqrt{\Lambda}} (3\mu(t_0) - \mu^3(t_0)).$$

назовем спектром асимп. полных масс, соответствующим шему $\{\mu(t_0)\}$.

11.2 Сопряженные значения параметра μ и вырожденные состояния

В M_0 входит функция:

$$F(\mu) = 3\mu - \mu^3, \qquad \mu \in (0, \sqrt{2}).$$

Очевидно

$$\max_{\mu\in(0,\sqrt{2})} F(\mu) = F(1) = 2,$$

при этом, $F(\mu)$:

для $\mu\in(0, 1)$ возрастает и $F(\mu)\in(0, 2)$,

для $\mu\in(1, \sqrt{2})$ убывает и $F(\mu)\in(\sqrt{2}, 2)$.

Далее мы рассмотрим кубическое уравнение $F(\mu) = K$, т.е.

$$\mu^3 - 3\mu + K = 0, \qquad K\in(\sqrt{2}, 2). \tag{34}$$

Это — уравнение типа:

$$\mu^3 - 3P\mu - 2Q = 0, \qquad P = 1,\ Q = -\frac{K}{2},\ Q^2 < P^3$$

В этом случае

$$\cos\varphi = \frac{Q}{\sqrt{P^3}} = -\frac{K}{2}, \qquad \frac{K}{2}\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right).$$

Выбирая для φ значение $\varphi_0 = \varphi_0(K)$, $\varphi_0\in(\pi/2, \pi)$, получаем следующие выражения для корней уравнения (34):

$$\mu_1 = \mu_1(K) = 2\cos\frac{\varphi_0}{3} > 0,$$

$$\mu_2 = \mu_2(K) = -\frac{\mu_1}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\varphi_0}{3} > 0,$$

$$\mu_3 = \mu_3(K) = -\frac{\mu_1}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\varphi_0}{3} < 0.$$

Имеет место:

$$\mu_2(K)\in\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\ 1\right), \quad \mu_1(K)\in(1, \sqrt{2}),$$

для $K\in(\sqrt{2}, 2)$.

Значения $\mu_1(K)$, $\mu_2(K)$, при любом фиксированном $K\in(\sqrt{2}, 2)$, назовем *сопряженными* значенияни.

Замечание 17. Для сопряженных значений $\mu_1(K)$, $\mu_2(K)$, $K\in(\sqrt{2}, 2)$:

(A) $$M_0(\mu_1) = M_0(\mu_2) = \frac{2\pi^2 c}{\varkappa\sqrt{\Lambda}}K,$$

при любом $t_0\in(-\infty, +\infty)$,

(B) главные члены величин R, ϱ, p, (см. (30)):

$$R_0 = \mu \frac{c}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \varrho_0 = \left(\frac{3}{\mu^2} - 1\right)\Lambda, \quad p_0 = \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\Lambda$$

имеют различные значения соответственно.

Еще отметим, что для любого фиксированного $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, регулярное состояние первичного атома Г. Лемэтра, определяется четверкой $(R_0, \varrho_0, p_0, M_0)$.

Определение 7. Регулярные состояния первичного атома Г. Лемэтра, соответствующие сопряженным значениям $\mu_1(K)$, $\mu_2(K)$, при любом фиксированном $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ назовем вырожденными состояниями, т.е. для вырожденных состояний:

$$R_0(\mu_1) \neq R_0(\mu_2), \quad \varrho_0(\mu_1) \neq \varrho_0(\mu_2), \quad p_0(\mu_1) \neq p_0(\mu_2), \quad M_0(\mu_1) = M_0(\mu_2). \quad (35)$$

11.3 Классификация С.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$ *по признаку сохранения асимптотически полной массы*

Прежде всего мы определим следующее разбиение множества всех шемов на непересекающиеся классы.

П е р в ы й к л а с с составляет бесконечное множество следующих шемов:

$$\{\mu(t_0)\}, \quad \mu(t_0) = \bar{\mu}, \quad \bar{\mu} \in (0, \sqrt{2}).$$

Пусть далее, $\mu_1(K)$, $\mu_2(K)$ — сопряженные значения, соответствующие любому фиксированному $K \in (\sqrt{2}, 2)$. Этим двум сопряженным значениям соответствует бесконечное множество шемов — в каждом из этих шемов значения $\mu_1(K)$, $\mu_2(K)$ чередуются определенным образом. Но и множество сопряженных значений является бесконечным.

В т о р о й к л а с с содержит бесконечное множество шемов порожденных — вышеуказанным способом — всеми сопряженными значениями.

Т р е т и й к л а с с содержит бесконечное множество всех остальных шемов.

Замечание 18. Разбиение множества всех шемов на три класса порождает разбиение всех С.И.Р. $[\{\mu(t_0)\}]$ на соответствующие три класса. При этом, колебания первичного атома Г. Лемэтра входлящие:

(A) в первый класс, обладают стационарным спектром асимп. полных масс, (асимп. полная масса сохраняется), кроме того, последовательность четверок $(R_0, \varrho_0, p_0, M_0)$, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ является стационарной для фиксированного шема,

(B) во второй класс, обладают стационарным спектром асимп. полных масс, (асимп. полная масса сохраняется), однако, последовательность четверок $(R_0, \varrho_0, p_0, M_0)$, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ — это последовательность вырожденных состояний (см. (35)) — не является стационарной для фиксированного шема,

(C) в третий класс, обладают нестационарным спектром асимп. полных масс, (асимп. полная масса не сохраняется).

ЛИТЕРАТУРА

1. Eddington, A. S.: On the instability of Einstein's spherical world, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 90 (1930), 668.
2. Littlewood, J. E.: Two notes on the Riemann zeta-function, Proc. Cambr. Phil. Soc., 22 (1924), 234—242.
3. Уилер, Дж.: Гравитация, нейтрино Вселенная, ИИЛ, Москва 1962.
4. Эйнштейн, А.: Собрание научных трудов, т. 1, «Наука» Москва 1965.
5. Эйнштейновский сборник 1966, «Наука» Москва 1966.
6. Прошлое и будущее Вселенной, сборник, «Наука» Москва 1986.
7. Будущее науки, Выпуск 18, «Знание» Москва 1985.
8. Мозер, Ян: Об одном новом следствии из гипотезы Римана, Acta Arith., 25 (1974), 307—311.
9. Мозер, Ян: Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой, Acta Arith., 26 (1974), 33—39.
10. Мозер, Ян: О точках нерегиба функции $Z(t)$, Acta Arith., 28 (1975), 89—99.
11. Мозер, Ян: Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна—Фридмана, Acta Math. Univ. Comen., 44—45 (1984), 115—125.
12. Мозер, Ян: Дзета-функция Римана и уравнения Энштейна—Фридмана II, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 52—53, (1987), 49—73.
13. Мозер, Ян: Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна—Фридмана III, Acta Math. Univ. Comen., (в редакции).

Адрес автора:

Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступило: 1. 9. 1987

SÚHRN

NIEKTORÉ STAVOVÉ ROVNICE, DEFINOVANÉ RIEMANNOVOU DZETA-FUNKCIOU

JÁN MOSER, Bratislava

V predkladanej práci je fyzikálna oblasť riešenia Einsteinových—Friedmannových rovníc definovaná vzhľadom na nerovnosť $|p| \leqq c^2\varrho$. Dokázaná je veta: Ak platí Riemannova hypotéza, potom fyzikálna oblasť riešenia, odpovedajúceho polomeru Vesmíru

$$R = c\,\frac{Z(t)}{Z(t_0)}\left\{\beta\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^{-1/2}, \qquad t \neq \gamma,\ \beta > \frac{1}{2}$$

existuje pre všetky dostatočne veľké $t_0 > 0$. Poznamenajme, že teraz do fyz. oblasti patria aj isté okolia nulových bodov funkcie $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$. V týchto okoliach platí asymptotická stavová rovnica $p \sim -\frac{1}{3}c^2\varrho$.

Ďalej je, na základe Riemannovej hypotézy, dokázané, že v ľubovoľnom ε — okolí Einsteinovho rovnovážneho stavu, existuje nekonečne mnoho asymptoticky rovnovážnych stavov, so stavovými rovnicami:

$$\frac{p}{c^2\varrho} \sim \frac{\mu^2 - 1}{3 - \mu^2}, \qquad \mu \in (0, \sqrt{2}).$$

Okrem toho sa v práci študujú oscilácie prvotného Lemaitrovho atómu. Typy oscilácií sú matematické modely evolúcie prvotného atómu pred „Veľkým výbuchom".

SUMMARY

SOME STATE EQUATIONS DEFINED BY MEANS OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION

JÁN MOSER, Bratislava

In the present paper the physical domain of the solution of the Einstein-Friedmann equations is defined with respect to the inequality $|p| \leqq c^2\varrho$. The following theorem is proved: Under the Riemann hypothesis the physical domain of the solution of the corresponding radius of Universe

$$R = c\,\frac{Z(t)}{Z(t_0)}\left\{\beta\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^{-1/2}, \qquad t \neq \gamma,\ \beta > \frac{1}{2}$$

exists for all sufficiently large $t_0 > 0$. Note that now to the physical domain belong also certain neighbourhoods of zero points of the function $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$. In these neighbourhoods the asymptotical state equation $p \sim -\frac{1}{3}c^2\varrho$ holds true.

Further, under the Riemann hypothesis, it is proved that in any ε — neighbourhood of the Einstein equilibrium state there exist infinitely many of asymptotic equilibrium states with the state equations:

$$\frac{p}{c^2\varrho} \sim \frac{\mu^2 - 1}{3 - \mu^2}, \qquad \mu \in (0, \sqrt{2}).$$

Moreover the oscilations of the primary Lemaitre atom are studied in the paper. The types of oscilations form mathematical models of the evolution of the primary atom before the "Big explosion".