UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LVI—LVII

О НУЛЯХ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА, ПОРОЖДЕННОГО ФОРМУЛОЙ РИМАНА—ЗИГЕЛЯ

ЯН МОЗЕР, Братислава

Введение

В предлагаемой работе, исходя из асимптотической формы*) главного члена формулы Римана-Зигеля:

$$Z_2(t) = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(t \ln\frac{P}{n} - T \ln P + \pi v\right), \quad P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \quad T = t_v,$$

$$t \in \left(T - \frac{U}{2}, T + \frac{U}{2}\right), \quad U \in \left\langle \frac{H_1}{\ln P}, \frac{H_2}{\ln P} \right\rangle,$$

где $0 < H_1$ H_2 — постоянные, построен случайный процесс $\overset{*}{Z}_2$. Для изучения нулей нечетного порядка процесса $\overset{*}{Z}_2$ использована теория выбросов С. О. Райса (см. [1], ср. 15), хорошо известная в статистической радиотехнике.

Получен следующий результат: существует такая реализация $\bar{Z}_2$ случайного процесса $\overset{*}{Z}_2$, для которой справедлива оценка

$$N_0\left\{\left(T - \frac{U}{2}, T + \frac{U}{2}\right); \bar{Z}_2\right\} > \frac{1}{\sqrt{3}\,\pi}(1 - \varepsilon)\, U \ln P, \quad P \to \infty,$$

где N_0 — число нулей нечетного порядка реализации $\bar{Z}_2$ в промежутке $(T - U/2, T + U/2)$ и $0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число.

Реализация $\bar{Z}_2$ имеет следующий вид:

*) Отсюда, по теореме Котельникова из теории информации следует, что длина промежутка Найквиста $\frac{1}{2w} \sim \frac{2\pi}{\ln T} \sim t_{v+1} - t_v$.

$$\bar{Z}_2 = Z_2(t;\ \bar{\varphi}_1,\ \bar{\varphi}_2,\ \ldots) =$$
$$= 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(t \ln\frac{P}{n} - T \ln P + \pi\nu + \bar{\varphi}_n\right),$$

где $\bar{\varphi}_n \in \langle -\pi,\ \pi\rangle$, $n = 1, \ldots, [P]$. Значит, реализация $\bar{Z}_2$ получается соответствующей фазовой модуляцией осцилляторов, определяющих $Z_2(t)$.

Итак, методами статистической радиотехники построена действительная функция $\bar{Z}_2$, родственная асимптотической форме главного члена формулы Римана—Зигеля, такого рода, что для числа ее нулей нечетного порядка, лежаших в очень коротком промежутке $(T - U/2,\ T + U/2)$, имеет место оценка снизу типа А. Сельберга (см. [2]), с постоянной

$$\frac{1}{2\pi.\sqrt{3}} - \bar{\varepsilon};\quad \ln P \sim \frac{1}{2}\ln T.$$

Особо отметим, что существующие методы ([2], [4], [5]) для изучения нулей нечетного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)$ в коротких промежутках, совсем неприменимы для изучения нулей нечетного порядка реализаций типа $\bar{Z}_2$, в очень коротком промежутке $(T - U/2,\ T + U/2)$.

Радиотехническая интерпретация вспомогательного результата (Теорема 4) о математическом ожидании числа нулей нечетного порядка случайного процесса $\overset{*}{Z}_2$ в промежутке $(T - U/2,\ T + U/2)$, состоит в следующем: получена частота федингов (замираний) радиосигнала, проходящего через гипотетическую среду со случайными неоднородностями, в точку приема.

В I-ой главе построен вспомогательный случайный процесс $F = F(\tau)$. Доказаны следующие его свойства: стационарность в смысле Хинчина, дифференцируемость и асимптотическая $(P \to \infty)$ гауссовость одномерной плотности (последнее — с помощью центральной преельной теоремы Ляпунова). Далее, в предположении гауссовости процесса F, получена математическое ожидание числа его нулей нечетного порядка.

Во II-ой главе доказано существование одномерной и двумерной плотностей процесса F. При этом использована асимптотическая формула для функции Бесселя $J_0(x)$. Кроме этого доказана инвариантность m-мерной характеристической функции χ_m относительно сдвига

$$(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_m) \to (\tau_1 + \tau_0,\ \ldots,\ \tau_m + \tau_0)$$

при любом $\tau_0 \in (-\infty,\ +\infty)$.

В III-ей главе доказано, что полином Маклорена функции χ_m, любой фиксированной степени, асимптотически $(P \to \infty)$ совпадает с соответствующим полиномом Маклорена гауссовской характеристической функции $\bar{\chi}_m$. Это свойство является аргументом в пользу предположения о гауссовости процесса $F(\tau)$ при $P \to \infty$ — предположения, использованного нами в I-ой главе, при изучении нулей процесса $F(\tau)$.

I Построение случайного процесса и среднее число его нулей в коротких промежутках

1 Асимптотическая форма главного члена формулы Римана—Зигеля

1.1. Сначала преобразуем формулу Римана—Зигеля (ср. [3])

$$Z(v) = 2 \sum_{n \leqq \bar{v}} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta(v) - v \ln n\} + O(v^{-1/4}), \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{v}{2\pi}},$$

к следующему виду:

$$Z(v) = 2 \sum_{n < P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta(v) - v \ln n\} + O(T^{-1/4}),$$

$$v \in \left(T - \frac{U_0}{2}, T + \frac{U_0}{2}\right), \qquad P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \tag{1}$$

где $0 < U_0$ — постоянная.

Пусть, далее, $\{t_\nu(\tau)\}$ обозначает семейство последовательностей, удовлетворяющих условию (см. [7], (1))

$$\vartheta[t_\nu(\tau)] = \pi\nu + \tau, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \ \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle. \tag{2}$$

Сейчас отметим, что ограничение $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ является, в предлагаемой работе, лишь предварительным ограничением на изменение параметра τ. А именно, теперь мы делаем следующее

Предположение 1. Для достаточно большого фиксированного ν, мы полагаем:

$$t_\nu(0) = t_\nu = T, \quad \tau \in \left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right), \quad 0 < H_1 \leqq H \leqq H_2, \tag{3}$$

где H_1, H_2 — постоянные.

Замечание 1. Итак, параметр τ представляет собой новую координату точки из окрестности значения $t_\nu = T$, (т.е. локальную координату).

Далее, из (2), следует:

$$t_\nu(\tau) = t_\nu + \frac{\tau}{\ln P} + O\left(\frac{1}{T \ln^2 T}\right) = T + \frac{\tau}{\ln P} + O\left(\frac{1}{T \ln^2 T}\right), \quad \tau \in \left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right). \quad (4)$$

Теперь, полагая в (1) $v = t_\nu(\tau)$, в силу (2), (4), получаем формулу

$$Z[t_\nu(\tau)] = Z_1[t_\nu(\tau)] + O(T^{-1/4}), \quad (5)$$

где

$$Z_1[t_\nu(\tau)] = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\Omega(n)\,\tau + \Phi(n, \nu)\},$$

$$\Omega(n) = \frac{1}{\ln P} \ln \frac{P}{n}, \quad \Phi(n, \nu) = \pi\nu - T \ln n. \quad (6)$$

1.2. Пусть

$$h(\tau) = T + \frac{\tau}{\ln P}, \qquad \tau \in \left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right). \quad (7)$$

Ясно, что $h(\tau)$ — биекция:

$$h(\tau)\colon \left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right) \to \left(T - \frac{U}{2}, T + \frac{U}{2}\right), \qquad U = \frac{H}{\ln P} < U_0. \quad (8)$$

Поскольку (ср. [6], (11) и [9], стр. 109)

$$Z_1'(v) = O(v^{1/6} \ln^2 v),$$

то (см. (4), (7)):

$$Z_1[t_\nu(\tau)] - Z_1[h(\tau)] = O\{\max |Z_1'| \cdot |t_\nu(\tau) - h(\tau)|\} = O\left(\frac{1}{T^{5/6}}\right). \quad (9)$$

Следовательно, из (6), в силу (9), получаем:

$$Z_1[h(\tau)] = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\Omega(n)\,\tau + \Phi(n, \nu)\} + O(T^{-5/6}). \quad (10)$$

Теперь положим:

$$Z_2[h(\tau)] = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\Omega(n)\,\tau + \Phi(n, \nu)\}, \qquad \tau \in \left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right), \quad (11)$$

относительно H см. (3). Отсюда, преобразованием $t = h(\tau)$, получаем (см. (6)—(8)):

$$Z_2(t) = 2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(t\ln\frac{P}{n} - T\ln P + \pi v\right),$$

$$t\in\left(T-\frac{U}{2},\ T+\frac{U}{2}\right), \qquad U=\frac{H}{\ln P}. \tag{12}$$

Замечание 2. Каждая из формул (11), (12) представляет собой асимптотическую форму главного члена формулы Римана—Зигеля (1). При этом, преобразования

$$t = h(\tau), \qquad \tau = h^{-1}(t)$$

(см. (7)), переводят одну из этих формул в другую. Переменную τ назовем вспомогательной переменной. Далее отметим, что

(A) $h(\tau)$ представляет собой асимптотическую аппроксимацию «истинной» переменной $v = t_v(\tau)$; совершаемая при этом ошибка равна (см. (4), (7)):

$$|h(\tau) - v| = O\left(\frac{1}{T\ln^2 T}\right), \tag{13}$$

(B) $Z_2[h(\tau)]$ представляет собой асимптотическую аппроксимацию значения $Z_1(v)$; совершаемая при этом ошибка равна (ср. (9), (10)):

$$|Z_2[h(\tau)] - Z_1(v)| = O\left(\frac{1}{T^{5/6}}\right). \tag{14}$$

Замечание 3. Поскольку ошибки (13), (14) являются пренебрежимо малыми при $T\to\infty$, то формулы (11), (12) можно считать удобным средством для изучения числа нулей нечетного порядка главного члена формулы Римана—Зегеля (см. (5)), в очень коротких промежутках.

2 Случайный процесс, порожденный формулой Римана—Зигеля

Сначала мы приводим главный член $Z_1(v)$ формулы Римана—Зигеля (1), к асимптотической форме (см. (11)):

$$Z_2[h(\tau)] = 2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\Omega(n)\,\tau + \Phi(n,\,v)\}, \qquad \tau\in\left(-\frac{H}{2},\ \frac{H}{2}\right).$$

Пусть теперь

$$\varphi_n, \quad n = 1,\ \dots,\ [P],$$

— независимые случайные величины, равномерно распределенные в промежутке $\langle -\pi,\ \pi\rangle$.

Определим случайный процесс:

$$E(\tau) = E[h(\tau);\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots] = \frac{1}{\sigma} Z_2[h(\tau);\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots] =$$

$$= \frac{2}{\sigma} \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\Omega(n)\,\tau + \Phi(n,\ \nu) + \varphi_n\}, \qquad \tau \in \left(-\frac{H}{2},\ \frac{H}{2}\right), \tag{15}$$

где σ — положительный параметр, значение которого мы фиксируем в дальнейшем.

Однако, принимая во внимание свойство стационарности, скажем, в смысле Хинчина, требующее инвариантности соответствующих величин относительно произвольного сдвига

$$(\tau_1,\ \tau_2) \to (\tau_1 + \tau_0,\ \tau_2 + \tau_0), \qquad \tau_0 \in (-\infty,\ +\infty),$$

мы продолжим процесс $E(\tau)$ на бесконечный промежуток изменения τ. А именно, мы определим следующий случайный процесс:

$$F(\tau) = F[h(\tau);\ \varphi_1,\ \varphi_2, \dots] =$$

$$= \frac{2}{\sigma} \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\Omega(n)\,\tau + \Phi(n,\ \nu) + \varphi_n\}, \qquad \tau \in (-\infty,\ +\infty). \tag{16}$$

3 Стационарность в смысле Хинчина процесса $F(\tau)$

Справедлива

Теорема 1. $F(\tau)$ является стационарным процессом в смысле Хинчина.

Доказательство. Поскольку

$$\boldsymbol{M}[\cos\{\Omega(n)\,\tau + \Phi(n,\ \nu) + \varphi_n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\{\Omega(n)\,\tau + \Phi(n,\ \nu) + \varphi_n\}\,\mathrm{d}\varphi_n = 0,$$

то для математического ожидания случайного процесса $F(y)$, (см. (16)), получаем:

$$\boldsymbol{M}[F(\tau)] = \frac{2}{\sigma} \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{M}[\cos\{\Omega(n)\,\tau + \Phi(n,\ \nu) + \varphi_n] = 0, \tag{17}$$

для $\tau \in (-\infty,\ +\infty)$.

Так как для любых $\tau_1,\ \tau_2 \in (-\infty,\ +\infty)$:

$$F(\tau_1)\,F(\tau_2) =$$

$$= \frac{2}{\sigma^2} \sum\sum_{m,n<P} \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\{\Omega(m)\,\tau_1 + \Omega(n)\,\tau_2 + \Phi(m,\ \nu) + \Phi(n,\ \nu) + \varphi_m + \varphi_n\} +$$

$$+\frac{2}{\sigma^2}\sum_{\substack{m,n<P\\ m\neq n}}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\{\Omega(m)\,\tau_1-\Omega(n)\,\tau_2+\Phi(m,\nu)-\Phi(n,\nu)+\varphi_m-\varphi_n\}+$$

$$+\frac{2}{\sigma^2}\sum_{n<P}\frac{1}{n}\cos\{\Omega(n)\cdot(\tau_2-\tau_1)\}$$

и, далее,

$$M[\cos\{\Omega(m)\,\tau_1+\Omega(n)\,\tau_2+\Phi(m,\nu)+\Phi(n,\nu)+\varphi_m+\varphi_n\}]=0,$$

$$M[\cos\{\Omega(m)\,\tau_1-\Omega(n)\,\tau_2+\Phi(m,\nu)-\Phi(n,\nu)+\varphi_m-\varphi_n\}]=0,\qquad m\neq n,$$

$$M[\cos\{\Omega(n)\cdot(\tau_2-\tau_1)\}]=\cos\{\Omega(n)\cdot(\tau_2-\tau_1)\},$$

то, для корреляционной функции $K_1(\tau_1,\tau_2)$ случайного процесса $F(\tau)$, получаем:

$$K_1(\tau_1,\tau_2)=M[F(\tau_1)F(\tau_2)]=$$

$$=\frac{2}{\sigma^2}\sum_{n<P}\frac{1}{n}\cos\{\Omega(n)\cdot(\tau_2-\tau_1)\}=\frac{K(\tau_2-\tau_1)}{\sigma^2}. \tag{18}$$

Значит, корреляционная функция процесса $F(\tau)$ зависит лишь от разности $\tau_2-\tau_1$. Следовательно, в силу (17), (18), процесс $F(\tau)$ является стационарным процессом в смысле Хинчина. Доказательство закончено.

В связи с этим доказательством мы подбираем параметр σ:

$$\sigma=\sqrt{K(0)},$$

$$K(0)=2\sum_{n<P}\frac{1}{n}=2\ln P+O(1),\qquad P\to\infty, \tag{19}$$

где использована формула Эйлера. Следовательно (см. (18)):

$$K_1(\tau_1,\tau_2)=\frac{K(\tau_2-\tau_1)}{K(0)}=R(\tau_2-\tau_1);\qquad R(0)=1, \tag{20}$$

т.е. корреляционная функция процесса $F(\tau)$ совпадает с его нормированной корреляционной функцией — коэффициентом корреляции.

4 Асимптотическая гауссовость одномерного закона распределения процесса $F(\tau)$ и его дифференцируемость

4.1. Сначала рассмотрим вопрос об одномерном законе распределения случайного процесса $F(\tau)$, т.е. вопрос о законе распределения любого его сечения $F(\bar\tau)$, $\bar\tau\in(-\infty,+\infty)$ при $P\to\infty$.

Теорема 2. При $P\to\infty$, закон распределения любого сечения $F(\bar\tau)$,

$\bar{\tau} \in (-\infty, +\infty)$, асимптотически приближается к гауссовскому распределению с математическим ожиданием $\boldsymbol{M}[F(\tau)] = 0$ и дисперсией $\boldsymbol{D}[F(\tau)] = 1$.

Доказательство. Отметим, что случайная величина $F(\bar{\tau})$ выражается при $P \to \infty$ в форме суммы неограниченного количества случайных величин (см. (16)):

$$F(\bar{\tau}) = \sum_{n<P} X_n \cdot X_n = \frac{2}{\sigma\sqrt{n}} \cos\{\varphi_n + \Omega(n)\,\bar{\tau} + \Phi(n, \nu)\},$$

и, очевидно,

$$\boldsymbol{M}[X_n] = 0,\ \boldsymbol{D}[X_n] = \boldsymbol{M}[(X_n - \boldsymbol{M}[X_n])^2] = \boldsymbol{M}[X_n^2] = \frac{2}{\sigma^2 n},$$

$$\boldsymbol{M}[|X_n - \boldsymbol{M}[X_n]|^3] = \boldsymbol{M}[|X_n|^3] \leqq \frac{8}{\sigma^3 n^{3/2}}.$$

Следовательно (см. (19))

$$\sum_{n<P} \boldsymbol{D}[X_n] = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n<P} \frac{1}{n} = 1,$$

$$\sum_{n<P} \boldsymbol{M}[|X_n|^3] < \frac{8}{\sigma^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{A}{\sigma^3}.$$

Так как

$$B_P = \left\{\sum_{n<P} \boldsymbol{D}[X_n]\right\}^{1/2} = 1,$$

то (см. (19))

$$\frac{1}{B_P^3} \sum_{n<P} \boldsymbol{M}[|X_n|^3] < \frac{A}{\sigma^3} < \frac{A}{\ln^{3/2} P} \to 0, \qquad P \to \infty,$$

т.е. условие Ляпунова выполнено и Теорема 2 доказана.

4.2. Относительно всех конечномерных распределений процесса $F(\tau)$, мы сделаем следующее

Предположение 2. Процесс $F(\tau)$ является гауссовским процессом при $P \to \infty$, т.е. все его конечномерные распределения являются гауссовскими при $P \to \infty$.*)

Замечание 4. Аргументом в пользу предположения о гауссовости процесса $F(\tau)$ при $P \to \infty$ является Теорема 2 и глава III, в которой доказано, что полином Маклорена m-мерной характеристической функции χ_m, асим-

---

*) При достаточно больших P.

птотически ($P \to \infty$) совпадает с аналогичным полиномом для гауссовской характеристической функции $\bar{\chi}_m$.

Замечание 5. Из стационарности в смысле Хинчина процесса $F(\tau)$ и предположения о его гауссовости при $P \to \infty$, следует его стационарность в строгом смысле при $P \to \infty$.

4.3. Напомним, что необходимым и достаточным условием дифференцируемости (в среднем квадратическом) случайного процесса, является существование производной его математического ожидания и второй смешанной частной производной его корреляционной функции при $\tau_1 = \tau_2$.

Поскольку имеет место (см. (17), (18)):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}[F(\tau)]}{\mathrm{d}\tau} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 K_1(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \, \partial \tau_2} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n<P} \frac{\Omega^2(n)}{n} \cos\{\Omega(n)\cdot(\tau_2 - \tau_1)\},$$

для $\tau, \tau_1, \tau_2 \in (-\infty, +\infty)$ и, следовательно, $K_1(\tau_1, \tau_2)$ имеет частные производные всех порядков, то делаем

Замечание 6. Случайный процесс $F(\tau)$ является k-жды дифференцируемым процессом,

5 Вычисление значений $R^{(2p)}(0)$

Из (18)—(20) следует формула:

$$R^{(2p)}(0) = \frac{2}{\sigma^2}(-1)^p \sum_{n<P} \frac{\Omega^{2p}(n)}{n}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

где

$$\Omega(n) = \frac{1}{\ln P} \ln \frac{P}{n}, \qquad \Omega(n) \in (0, 1\rangle. \tag{22}$$

Справедлива

Лемма 1.

$$R^{(2p)}(0) = \frac{(-1)^p}{2p+1}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln P}\right)\right\}, \qquad P \to \infty, \tag{23}$$

для $p = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Для вычисления суммы входящей в (21), мы воспользуемся формулой суммирования Эйлера-Маклорена ([9], стр. 19):

$$\sum_{a<n\leqq b} f(n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)f(a)-\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)f(b), \tag{24}$$

в случае

$$f(x)=\frac{\Omega^{2p}(x)}{x},\quad x\in\langle 1,P\rangle,\ f'(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right),\ f(1)=f(P)=O(1).$$

Поскольку

$$\int_1^P\frac{\Omega^{2p}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2p+1}\ln P,$$

($\Omega(x)=w$, см. (22)), то, из (24), в силу (19), (21), следует (23).

6 Нули случайного процесса $F(\tau)$

6.1. Пусть

$$C_0\left\{\left(-\frac{H}{2},\frac{H}{2}\right);\bar{F}\right\} \tag{25}$$

обозначает число нулей нечетного порядка реализации

$$\bar{F}=F[h(\tau);\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\ldots],\qquad \tau\in\left(-\frac{H}{2},\frac{H}{2}\right) \tag{26}$$

случайного процесса $F(\tau)$. Величина

$$C_0\left\{\left(-\frac{H}{2},\frac{H}{2}\right);F\right\}, \tag{27}$$

принимающая значение (25) для реализации (26), является случайной величиной (измеримой функцией на пространстве реализаций случайного процесса $F(\tau)$, ср. [12], стр. 202).

Поскольку $F(\tau)$ является гауссовским, стационарным и дифференцируемым процессом (см. Предположение 2 и Замечание 5) то, для математического ожидания случайной величины (27) имеет место соотношение (см. [15], стр. 134, соотношение (3.3—10), ср. [12], стр. 203, (14], стр. 80):

$$\boldsymbol{M}\left[C_0\left\{\left(-\frac{H}{2},\frac{H}{2}\right);F\right\}\right]=\frac{1}{\pi}\sqrt{-R''(0)}H=\frac{1}{\sqrt{3}\pi}H+O\left(\frac{1}{\ln P}\right)\sim$$

$$\sim\frac{1}{\sqrt{3}\pi}H,\qquad P\to\infty,$$

в силу Леммы 1 при $p=1$. Значит, справедлива

Теорема 3. Пусть $F(\tau)$ — гауссовский процесс при $P\to\infty$. Тогда:

$$M\left[C_0\left\{\left(-\frac{H}{2},\frac{H}{2}\right);\,F\right\}\right]\sim\frac{1}{\sqrt{3}\pi}H,\qquad P\to\infty. \tag{28}$$

6.2. Пусть

$$\tilde{C}_0\left\{\left(T-\frac{U}{2},\ T+\frac{U}{2}\right);\,\bar{Z}_2\right\} \tag{29}$$

обозначает число нулей нечетного порядка функции

$$\bar{Z}_2=Z_2(t;\,\bar{\varphi}_1,\,\bar{\varphi}_2,\,\ldots)= \tag{30}$$

$$=\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(t\ln\frac{P}{n}-T\ln P+\pi\nu+\bar{\varphi}_n\right),\quad t\in\left(T-\frac{U}{2},\ T+\frac{U}{2}\right),$$

(см. (12)). Из (26), в силу (15), (16), получаем

$$\bar{F}=\frac{1}{\sigma}Z_2[h(\tau);\,\bar{\varphi}_1,\,\bar{\varphi}_2,\,\ldots],\qquad \tau\in\left(-\frac{H}{2},\frac{H}{2}\right). \tag{31}$$

Теперь отметим следующее: если

$$Z_2[h(\tau_1);\,\bar{\varphi}_1,\,\bar{\varphi}_2,\,\ldots]\,.\,Z_2[h(\tau_2);\,\bar{\varphi}_1,\,\bar{\varphi}_2,\,\ldots]<0,$$

$$\tau_1,\,\tau_2\in\left(-\frac{H}{2},\frac{H}{2}\right),$$

то, в силу преобразования $t=h(\tau)$, (ср. (11), (12)),

$$Z_2[t_1;\,\bar{\varphi}_1,\,\bar{\varphi}_2,\,\ldots]\,.\,Z_2[t_2;\,\bar{\varphi}_1,\,\bar{\varphi}_2,\,\ldots]<0,$$

$$t_1=h(\tau_1),\quad t_2=h(\tau_2),\qquad t_1,\,t_2\in\left(T-\frac{U}{2},\ T+\frac{U}{2}\right),$$

т.е. преобразование $t=h(\tau)$ переводит нуль нечетного порядка из промежутка $(-H/2,\,H/2)$ в нуль нечетного порядка из промежутка $(T-U/2,\ T+U/2)$ и, наоборот. Следовательно, делаем (см. (25), (29), (31))

Замечание 7.

$$\tilde{C}_0\left\{\left(T-\frac{U}{2},\ T+\frac{U}{2}\right);\,\bar{Z}_2\right\}=C_0\left\{\left(-\frac{H}{2},\frac{H}{2}\right);\,\bar{F}\right\}. \tag{32}$$

Пусть $\overset{*}{Z}_2$ обозначает случайный процесс

$$\overset{*}{Z}_2 = Z_2(t;\ \varphi_1, \varphi_2, \dots) =$$

$$= 2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left\{t\ln\frac{P}{n} - T\ln P + \pi\nu + \varphi_n\right\}, \tag{33}$$

(ср. (30)). Теперь, в силу (28), (32), получаем (см. (8)):

$$M\left[\tilde{C}_0\left\{\left(T-\frac{U}{2},\ T+\frac{U}{2}\right);\ \overset{*}{Z}_2\right\}\right] = M\left[C_0\left\{\left(-\frac{H}{2},\ \frac{H}{2}\right);\ \bar{F}\right\}\right] \sim$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{3}\pi}H = \frac{1}{\sqrt{3}\pi}\cdot\frac{H}{\ln P}\ln P = \frac{1}{\sqrt{3}\pi}U\ln P.$$

Значит, справедлива

Теорема 4. Пусть $F(\tau)$ — гауссовский процесс при $P\to\infty$. Тогда:

$$M\left[\tilde{C}_0\left\{\left(T-\frac{U}{2},\ T+\frac{U}{2}\right);\ \overset{*}{Z}_2\right\}\right] \sim \frac{1}{\sqrt{3}\pi}U\ln P, \qquad P\to\infty, \tag{34}$$

где

$$\frac{H_1}{\ln P} \leqq U \leqq \frac{H_2}{\ln P} \tag{35}$$

и $0 < H_1, H_2$ — постоянные.

Из (34) получаем

Следствие 1. Существует реализация

$$\bar{Z}_2 = 2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(t\ln\frac{P}{n} - T\ln P + \pi\nu + \bar{\varphi}_n\right),$$

$$t\in\left(T-\frac{U}{2},\ T+\frac{U}{2}\right),\quad U\in\left\langle\frac{H_1}{\ln P},\ \frac{H_2}{\ln P}\right\rangle \tag{36}$$

случайного процесса $\overset{*}{Z}_2$ (см. (33)) такого рода, что

$$\tilde{C}_0\left\{\left(T-\frac{U}{2},\ T+\frac{U}{2}\right);\ \bar{Z}_2\right\} > \frac{1}{\sqrt{3}\pi}(1-\varepsilon)\,U\ln P, \qquad P\to\infty, \tag{37}$$

где $0<\varepsilon$ — сколь угодно малое число.

Замечание 8. Итак, фазовая модуляция функции $Z_2(t)$ (см. (12)) — т.е. асимптотической формы главного члена формулы Римана—Зигеля, вектором $(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_{[P]})$, приводит нас к функции $\bar{Z}_2$ (см. (36)), родственной $Z_2(t)$, и, обладающей оценкой снизу типа А. Сельберга (37), для количества своих нулей нечетного порядка в очень коротком промежутке $(T - U/2,\ T + U/2)$, (см. (36)).

7 Точки экстремума, перегиба и другие особые точки случайного процесса $F(\tau)$

Назовем особой точкой p-го порядка процесса $F(\tau)$ точку такого рода, в которой p-я производная процесса равна нулю а $(p+1)$-я отлична от нуля (ср. [14], стр. 264).

Пусть

$$N_p\left\{\left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right); F\right\}$$

означает математическое ожидание числа особых точек порядка p в промежутке $(-H/2, H/2)$. Тогда, в силу Леммы 1, имеет место соотношение (см. [14], стр. 264):

$$N_p\left\{\left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right); F\right\} = \frac{1}{\pi}\sqrt{-\frac{R^{(2p+2)}(0)}{R^{(2p)}(0)}}\,H \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2p+1}{2p+3}}\,H, \tag{38}$$

(напомним, что $F(\tau)$ является $p+1$-жды дифференцируемым процессом, см. замечание 5 и, в силу Предположения 2 — гауссовским при $P \to \infty$).

В случае $p = 1$ получаем следующее выражение

$$N_1\left\{\left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right); F\right\} \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3}{5}}\,H, \qquad P \to \infty$$

для математического ожидания числа локальных экстремумов процесса $F(\tau)$ в промежутке $(-H/2, H/2)$.

В случае $p = 2$ получаем следующее выражение

$$N_2\left\{\left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right); F\right\} \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{5}{7}}\,H, \qquad P \to \infty$$

для математического ожидания числа точек перегиба процесса $F(\tau)$ в промежутке $(-H/2, H/2)$.

Замечание 9. Соотношению (38) соответствует родственное соотношение (ср. (34), (35)):

$$N_p\left\{\left(T-\frac{U}{2}, T+\frac{U}{2}\right); \overset{*}{Z}_2\right\} \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2p+1}{2p+3}}\,U \ln P, \qquad P \to \infty$$

для

$$p = 1, 2, \ldots, \frac{H_1}{\ln P} \leqq U \leqq \frac{H_2}{\ln P}.$$

II Существование одномерной и двумерной плотностей процесса $F(\tau)$

В этой главе мы докажем, исходя из характеристической функции, существование одномерной и двумерной плотностей процесса $F(\tau)$, нужных для нас с точки зрения корреляционной теории.

8 Инвариантность характеристической функции относительно сдвига

Случайному процессу $F(\tau)$ соответствует m-мерная совокупность случайных величин — сечений

$$(F(\tau_1),\ F(\tau_2),\ \ldots,\ F(\tau_m)) \tag{39}$$

при любом выборе m значений $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m \in (-\infty, +\infty)$.

Напомним, что случайный процесс $F(\tau)$ нами определен как неслучайная функция от t и случайных параметров $\varphi_1, \ldots, \varphi_{[P]}$ (см. (16)). В силу этого, совокупности случайных величин (39) соответствует характеристическая функция (ср. [13], стр. 61, 62):

$$\chi_m(q_1, \tau_1; \ldots; q_m, \tau_m) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\mathrm{i} \sum_{k=1}^{m} q_k F(\tau_k; \varphi_1, \ldots, \varphi_{[P]})\right] \cdot W(\varphi_1, \ldots, \varphi_{[P]})\, \mathrm{d}\varphi_1 \ldots \mathrm{d}\varphi_{[P]}, \tag{40}$$

где W — совместная плотность совокупности случайных параметров $\varphi_1, \ldots, \varphi_{[P]}$. Поскольку $\varphi_1, \ldots, \varphi_{[P]}$ — независимые случайные величины, то

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_{[P]}) = w(\varphi_1) \ldots w(\varphi_{[P]}), \tag{41}$$

где $w(\varphi_j) = 1/2\pi$ для $\varphi_j \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $w(\varphi_j) = 0$ для $\varphi_j \notin \langle -\pi, \pi \rangle, j = 1, \ldots, [P]$.

8.1. Справедлива

Теорема 5. Характеристическая функция χ_m инвариантна относительно сдвига

$$(\tau_1, \ldots, \tau_m) \to (\tau_1 + \tau_0, \ldots, \tau_m + \tau_0),$$

т.е.

$$\chi_m(q_1, \tau_1; \ldots; q_m, \tau_m) = \chi_m(q_1, \tau_1 + \tau_0; \ldots; q_m, \tau_m + \tau_0)$$

для любого $\tau_0 \in (-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Поскольку (см. (16))

$$\sum_{k=1}^{m} q_k F(\tau_k) = \frac{2}{\sigma} \sum_{n=1}^{[P]} \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k}{\sqrt{n}} \cos(\varphi_n + \alpha_{n,k}), \tag{42}$$

$$\alpha_{n,k} = \Omega(n)\, \tau_k + \Phi(n, \nu),$$

то (см. (40)—(42)):

$$\chi_m = \prod_{n=1}^{[P]} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{2i}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{m} q_k \cos(\varphi_n + \alpha_{n,k}) \right)^l \right] d\varphi_n \right\}. \quad (43)$$

Так как

$$\left(\sum_{k=1}^{m} q_k \cos(\varphi_n + \alpha_{n,k}) \right)^l =$$

$$= \sum_{(k_1, \dots, k_l)} q_{k_1} \dots q_{k_l} \cos(\varphi_n + \alpha_{n,k_1}) \dots \cos(\varphi_n + \alpha_{n,k_l}), \quad (44)$$

а интегрирование бесконечного ряда в общем члене произведения (43) допустимо, вследствие равномерной сходимости относительно φ_n, то мы должны изучить интеграл:

$$I_1 = I_1(l;\ \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_l}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi_n + \alpha_{n,k_1}) \dots \cos(\varphi_n + \alpha_{n,k_l})\, d\varphi_n. \quad (45)$$

Конечно, при $l > m$, некоторые из значений $\tau_1, \dots, \tau_m$ входящих в совокупность $\tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_l}$ — повторяются.

Далее, так как

$$\cos\beta_1 \dots \cos\beta_l = \sum_{(\pm 1, \dots, \pm 1)} A(\pm 1, \dots, \pm 1) \cos(\beta_1 \pm \beta_2 \pm \dots \pm \beta_l), \quad (46)$$

где суммирование пробегает по всем различным способам выбора знаков у величин $\beta_2, \dots, \beta_l$, то вопрос о значениях интеграла (45) переходит в аналогичный вопрос для интеграла:

$$I_2 = I_2(l;\ \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_l}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\{\varphi_n \pm \varphi_n \pm \dots \pm \varphi_n + \alpha_{n,k_1} \pm \alpha_{n,k_2} \pm \dots \pm \alpha_{n,k_l} +$$

$$+ \Phi(n, \nu) \pm \Phi(n, \nu) \pm \dots \pm \Phi(n, \nu)\}\, d\varphi_n. \quad (47)$$

Теперь, из (47), немедленно получаются соотношения:

$$I_2(2p-1;\ \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_{2p-1}}) = 0,$$

$$I_2(2p;\ \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_{2p}}) = \cos\{\Omega(n)\cdot(\tau_{k_{i_1}} + \dots + \tau_{k_{i_p}} - \tau_{k_{i_{p+1}}} - \dots - \tau_{k_{i_{2p}}})\}, \quad (48)$$

$p = 1, 2, \dots$

Наконец, в силу (43)—(48), получается требуемое свойство инвариантности χ_m относительно сдвига.

8.2. Так как мы не изучали асимптотического поведения функции χ_m при

$$\sqrt{q_1^2 + \ldots + q_m^2} \to \infty,$$

то лишь формальным m — кратным преобразованием Фурье характеристической функции χ_m, получаем соотношение:

$$\tilde{W}(F_1, \tau_1; \ldots; F_m, \tau_m) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\mathrm{i} \sum_{k=1}^{m} q_k F_k\right) \chi_m(q_1, \tau_1; \ldots; q_m, \tau_m) \cdot \mathrm{d}q_1 \ldots \mathrm{d}q_m,$$

т.е. мы получаем плотность $\tilde{W}$ совместного распределения случайных величин $(F_1, \ldots, F_m)$. Следовательно, в силу Теоремы 5, получается

Теорема 6 (формальная). Случайный процесс $F(\tau)$ является стационарным процессом в строгом (узком) смысле.

9 Существование одномерной плотности случайного процесса $F(\tau)$

Из (40), при $m = 1$, получаем:

$$\chi_1(q, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\mathrm{i}qF(\tau; \varphi_1, \ldots, \varphi_{[P]})] \cdot W(\varphi_1, \ldots, \varphi_{[P]})\, \mathrm{d}\varphi_1 \ldots \mathrm{d}\varphi_{[P]}.$$

Отсюда следует (см. (16), (41)):

$$\chi_1(q, \tau) = \prod_{n=1}^{[P]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[\mathrm{i} \frac{2q}{\sigma\sqrt{n}} \cos(\varphi_n + \alpha_n)\right] \mathrm{d}\varphi_n =$$

$$= \prod_{n=1}^{[P]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q \cos\varphi_n}\, \mathrm{d}\varphi_n = \chi_1(q), \qquad Q = \frac{2q}{\sigma\sqrt{n}}, \tag{49}$$

так как $\cos(\varphi_n + \alpha_n)$ имеет период 2π а интегрирование пробегает по промежутку длины 2π.

Замечание 10. Как и следовало ожидать, χ_1 независит от τ.

По известной формуле из теории функций Бесселя, имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q \cos\varphi_n}\, \mathrm{d}\varphi_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(Q \cos\varphi_n)\, \mathrm{d}\varphi_n = J_0(Q). \tag{50}$$

Далее, для больших положительных x справедлива асимптотическая формула (см. [10], стр. 230, 232, 233):

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P(x, 0) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - Q(x, 0) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right\},$$
$$P(x, 0) = 1 - \vartheta_1 \frac{1^2 . 3^2}{2!\,(8x)^2}, \quad Q(x, 0) = -\frac{1^2}{1!\,8x} + \vartheta_2 \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{3!\,(8x)^3}, \tag{51}$$

ϑ_1, $\vartheta_2 \in (0, 1)$, (в выражениях Стилтьеса для $P(x, 0)$, $Q(x, 0)$ мы положили $p = 0$). Отсюда получаем оценку

$$|J_0(x)| < \frac{A}{\sqrt{x}}, \qquad x \geqq x_0 > 0,$$

где x_0 — достаточно большое число и $0 < A$ — абсолютная постоянная. Теперь, из (49), в силу (50), (51), получается следующая оценка.

Лемма 2.

$$|\chi_1(q)| < A^P \cdot \sigma^{\frac{P}{2}} ([P]!)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{|q|^{\frac{[P]}{2}}}, \qquad |q| \to \infty. \tag{52}$$

Поскольку, из оценки (52), следует сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi_1(q)|\, \mathrm{d}q,$$

то преобразование Фурье $\tilde{W}(F)$:

$$\tilde{W}(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qF} \chi_1(q)\, \mathrm{d}q \tag{53}$$

существует и непрерывно, вследствие равномерной сходимости интеграла, входящего в (53). Итак, справедлива

Теорема 7. Одномерная плотность $\tilde{W}(F)$ случайного процесса $F(\tau)$ существует и является непрерывной функцией.

10 Существование двумерной плотности случайного процесса $F(\tau)$

Для характеристической функции системы двух сечений процесса $F(\tau)$, соответствующих значениям τ_1, $\tau_2 \in (-\infty, +\infty)$, $\tau_1 < \tau_2$, из (40), (ср. (42), (43)), получаем:

$$\chi_2(q_1, \tau_1; q_2, \tau_2) = \prod_{n=1}^{[P]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(B \cos\varphi_n - C \sin\varphi_n)}\, \mathrm{d}\varphi_n, \tag{54}$$

где

$$B = \frac{2}{\varphi\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{2} q_k \cos \alpha_{n,k}, \quad C = \frac{2}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{2} q_k \sin \alpha_{n,k}, \tag{55}$$

$$\alpha_{n,k} = \Omega(n)\, \tau_k + \Phi(n, \nu).$$

Пусть

$$D = \frac{2}{\sigma\sqrt{n}} \sqrt{\bar{B}^2 + \bar{C}^2},$$

$$\bar{B} = \sum_{k=1}^{2} q_k \cos \alpha_{n,k}, \quad \bar{C} = \sum_{k=1}^{2} q_k \sin \alpha_{n,k}. \tag{56}$$

10.1. Сначала мы изучим квадратичную форму:

$$\bar{B}^2 + \bar{C}^2 = q_1^2 + q_2^2 + 2q_1q_2 \cos\{\Omega(n)(\tau_2 - \tau_1)\} = \boldsymbol{K}(q_1, q_2;\ \tau_2 - \tau_1, n, P), \tag{57}$$

где

$$\Omega(n) = \frac{1}{\ln P} \ln \frac{P}{n}, \qquad n = 1, \ldots, [P].$$

Конечно, $\boldsymbol{K}$ — трехпараметрическое семейство квадратичных форм.

Мы получим нетривиальную оценку снизу для минимумов некоторого подмножества квадратичных форм. Справедлива

Лемма 3. Если $n \in (P/4,\ P/2)$, то

$$\boldsymbol{K} = \bar{B}^2 + \bar{C}^2 > A \frac{\tau^2}{\ln^2 P} Q^2, \qquad Q \geqq Q_0 > 0$$

$$Q^2 = q_1^2 + q_2^2, \quad \tau = \tau_2 - \tau_1 > 0, \tag{58}$$

где $0 < A$ — абсолютная постоянная.

Доказательство. Квадратичной форме (57) соответствует симметричная матрица

$$(k_{ij}) = \begin{pmatrix} 1, & \cos\{\Omega(n)\,\tau\} \\ \cos\{\Omega(n)\}, & 1 \end{pmatrix}.$$

Условию $n \in (P/4,\ P/2)$ соответствует ограничение

$$\frac{\tau}{\ln P} \ln 2 < \Omega(n)\, \tau < \frac{\tau}{\ln P} \ln 4.$$

Поскольку τ и P являются независимыми параметрами, то, для любого фиксированного τ подберем P таким образом, что, например,

$$\frac{\tau}{\ln P} \ln 4 < \frac{\pi}{4}. \tag{59}$$

Секулярное уравнение задачи на собственные значения матрицы (k_{ij}) приводит нас к следующим собственным значениям:

$$\lambda_1 = 1 + k_{12}, \ \lambda_2 = 1 - k_{12}, \ k_{12} = \cos\{\Omega(n)\,\tau\}.$$

В силу (59) получаем оценку снизу

$$\lambda_2 = 2\sin^2\frac{\Omega(n)\,\tau}{2} > A\frac{\tau^2}{\ln^2 P} > 0. \tag{60}$$

Далее, соответствующее ортогональное преобразование

$$q_i = \sum_{j=1}^{2} r_{ij} q'_j, \qquad i = 1, 2$$

приводит квадратичную форму к сумме квадратов:

$$\boldsymbol{K} = \lambda_1 q_1'^2 + \lambda_2 q_2'^2; \quad q_1'^2 + q_2'^2 = q_1^2 + q_2^2.$$

Отсюда, в силу экстремальных свойств квадратичной формы и (60), получаем нужную оценку:

$$\boldsymbol{K} \geqq (q_1'^2 + q_2'^2)\,\lambda_2 > A\frac{\tau^2}{\ln^2 P}Q^2.$$

10.2. В этом пункте мы получим оценку функции χ_2 при больших значениях $Q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$.

Положим (см. (54)):

$$M(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(B\cos\varphi_n - C\sin\varphi_n)}\,d\varphi_n.$$

В случае $n \in (P/4, P/2)$, в силу (55), (56), (58), действуем как в теории колебаний и волн:

$$B\cos\varphi_n - C\sin\varphi_n = D\cos(\varphi_n + G),$$

где

$$D = \frac{2}{\sigma\sqrt{n}}\sqrt{\bar{B}^2 + \bar{C}^2} > 0, \quad \cos G = \frac{B}{D}, \quad \sin G = \frac{C}{D}.$$

Далее, (ср. (50)),

$$M(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iD\cos(\varphi_n + G)}\,d\varphi_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iD\cos\varphi_n}\,d\varphi_n = J_0(D), \tag{61}$$

и (см. (19), (58))

$$D = \frac{2}{\sigma\sqrt{n}}\sqrt{\bar{B}^2 + \bar{C}^2} > A\frac{\tau}{\sigma\sqrt{n}\ln P}Q > A\frac{\tau}{\sqrt{n}(\ln P)^{3/2}}Q. \tag{62}$$

Теперь, в силу (51), (61), (62), получаем оценку

$$|M(n)| < A\frac{\sqrt[4]{n}\,(\ln P)^{3/4}}{\sqrt{\tau}}\cdot\frac{1}{\sqrt{Q}}.$$

Следовательно:

$$\prod_{n\in\left(\frac{P}{4},\frac{P}{2}\right)} |M(n)| < \frac{A^P([P]!)^{\frac{1}{4}}(\ln P)^{\frac{3P}{4}}}{\tau^{\frac{1}{2}\left[\frac{P}{4}\right]}}\cdot\frac{1}{Q^{\frac{1}{2}\left[\frac{P}{4}\right]}},$$

$$Q \geqq Q_0, \quad n\in\left(\frac{P}{4},\frac{P}{2}\right). \tag{63}$$

В случае $n\notin(P/4,\ P/2)$ получаем оценку

$$\prod_{n\notin\left(\frac{P}{4},\frac{P}{2}\right)} |M(n)| \leqq 1. \tag{64}$$

Теперь, из (54), в силу (63), (64), получается

Лемма 4.

$$|\chi_2(q_1,\tau_1;\,q_2,\tau_2)| < \frac{A^P.([P]!)^{\frac{1}{4}}(\ln P)^{\frac{3P}{4}}}{\tau^{\frac{1}{2}\left[\frac{P}{4}\right]}}\cdot\frac{1}{Q^{\frac{1}{2}\left[\frac{P}{4}\right]}}, \qquad Q \geqq Q_0 > 0, \tag{65}$$

для любых фиксированных $\tau_1,\ \tau_2\in(-\infty,\ +\infty)$, $\tau_1 < \tau_2$, $\tau = \tau_2 - \tau_1$, при достаточно большом P.

10.3. Так как, из оценки (65), следует сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\chi_2(q_1,\tau_1;\,q_2,\tau_2)|\,dq_1\,dq_2,$$

то существует двукратное преобразование Фурье:

$$\tilde{W}(F_1, F_2;\,\tau_1,\tau_2) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(F_1q_1+F_2q_2)}\chi_2(q_1,\tau_1;\,q_2,\tau_2)\,dq_1\,dq_2 \tag{66}$$

и $\tilde{W}$ является непрерывной функцией от F_1, F_2 поскольку интеграл, входящий в (66), сходится равномерно относительно F_1, F_2. Итак, нами доказана

Теорема 8. Двумерная плотность $\tilde{W}(F_1, F_2;\ \tau_1, \tau_2)$ случайного процесса $F(\tau)$ существует и является непрерывной функцией от F_1, F_2.

Замечание 11. В силу Теоремы 5:

$$\tilde{W}(F_1, F_2;\ \tau_1, \tau_2) = \tilde{W}(F_1, F_2;\ 0, \tau_2 - \tau_1) = \tilde{\tilde{W}}(F_1, F_2;\ \tau).$$

III Дальнейшие свойства характеристической функции χ_m

Напомним, что нижеизучаемым частным производным характеристической функции χ_m, соответствуют моменты:

$$M[F_1^{n_1} \ldots F_m^{n_m}] = (-i)^l \left. \frac{\partial^l \chi_m}{\partial q_1^{n_1} \ldots \partial q_m^{n_m}} \right|_{\bar{q}=0},$$

$n_1 + \ldots + n_m = l$, $l = 1, 2, \ldots$, $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_m)$.

Так как в нашем случае $M[F_j] = 0, j = 1, \ldots, m$, то $M[F_1^{n_1} \ldots F_m^{n_m}]$ являются центральными моментами.

11 Частные производные характеристической функции χ_m при $\bar{q} = 0$, порядков 2, 4 и $2p - 1$

Справедлива

Лемма 5.

$$\chi_m|_{\bar{q}=0} = 1, \tag{67}$$

$$\left. \frac{\partial^{2p-1} \chi_m}{\partial q_{k_1} \ldots \partial q_{k_{2p-1}}} \right|_{\bar{q}=0} = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, \tag{68}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \chi_m}{\partial q_k\, \partial q_l} \right|_{\bar{q}=0} = -R(\tau_k - \tau_l), \tag{69}$$

$$\left. \frac{\partial^4 \chi_m}{\partial q_k\, \partial q_l\, \partial q_r\, \partial q_s} \right|_{\bar{q}=0} = R(\tau_k - \tau_r)\, R(\tau_l - \tau_s) +$$

$$+ R(\tau_k - \tau_s)\, R(\tau_l - \tau_r) + R(\tau_k - \tau_l)\, R(\tau_r - \tau_s) + O\left(\frac{1}{\ln^2 P}\right), \tag{70}$$

при $P \to \infty$, где $k, l, r, s = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Свойство (67) является простым следствием из (40).

11.1. Прежде всего (см. (40), ср. (43)):

$$\left. \frac{\partial^{2p-1} \chi_m}{\partial q_{k_1} \ldots \partial q_{k_{2p-1}}} \right|_{\bar{q}=0} =$$

$$= \left(\frac{2i}{\sigma}\right)^{2p-1} \sum_{(n_1, \dots, n_{2p-1})} \frac{1}{\sqrt{n_1 \dots n_{2p-1}}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{2p-1} \cos(\varphi_{n_j} + \alpha_{n_j, k_j}) \cdot$$

$$\cdot W(\varphi_1, \dots, \varphi_{[P]}) \, d\varphi_1 \dots d\varphi_{[P]}. \tag{71}$$

Так как (ср. (46)):

$$\prod_{j=1}^{l} \cos(\varphi_{n_j} + \alpha_{n_j, k_j}) =$$

$$= \sum_{(\pm 1, \dots, \pm 1)} A(\pm 1, \dots, \pm 1) \cos(\varphi_{n_1} \pm \varphi_{n_2} \pm \dots \pm \varphi_{n_l} +$$

$$+ \alpha_{n_1, k_1} \pm \alpha_{n_2, k_2} \pm \dots \pm \alpha_{n_l, k_l}),$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{l} \cos(\varphi_{n_j} + \alpha_{n_j, k_j}) \cdot W \, d\varphi_1 \dots d\varphi_{[P]} = 0, \tag{72}$$

$l = 2p - 1$, $p = 1, 2, \dots$

Теперь, из (71), в силу (72), следует (68).

11.2. Так как

$$\left.\frac{\partial^2 \chi_m}{\partial q_k \, \partial q_l}\right|_{\bar{q}=0} =$$

$$= -\frac{4}{\sigma^2} \sum_{n, r < P}\sum \frac{1}{\sqrt{nr}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\varphi_n + \alpha_{n,k}) \cos(\varphi_n + \alpha_{r,l}) \cdot W \, d\varphi_1 \dots d\varphi_{[P]} \tag{73}$$

и, далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\varphi_n + \alpha_{n,k}) \cos(\varphi_r + \alpha_{r,l}) \, W \, d\varphi_1 \dots d\varphi_{[P]} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \cos\{\Omega(n)(\tau_k - \tau_l)\}, & n = r, \\ 0, & n \neq r, \end{cases}$$

то, из (73), (см. (18), (22)), следует (69).

11.3. Имеем:

$$\left.\frac{\partial^4 \chi_m}{\partial q_k \, \partial q_l \, \partial q_r \, \partial q_s}\right|_{\bar{q}=0} = \frac{16}{\sigma^4} \sum_{(n_1, \dots, n_4)} \frac{1}{\sqrt{n_1 \dots n_4}} I_3, \quad n_1, \dots, n_4 < P,$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\varphi_{n_1} + \alpha_{n_1, k}) . \cos(\varphi_{n_2} + \alpha_{n_2, l}) . \cos(\varphi_{n_3} + \alpha_{n_3, r}) \cdot$$

$$\cdot \cos(\varphi_{n_4} + \alpha_{n_4, s}) . \, W \, d\varphi_1 \dots d\varphi_{[P]}. \tag{74}$$

Интеграл входящий в (74) отличен от нуля только тогда, когда $(n_1, \ldots, n_4)$ распадается на группы попарно равных членов, т.е. в случаях

$$(n_1, n_2, n_1, n_2), \; (n_1, n_1, n_2, n_2), \; (n_1, n_2, n_2, n_1). \tag{75}$$

При этом, упорядоченные четверки (75) равны между собой только в случае $n_1 = n_2$. В силу этого, сумма входящая в (74), расщепляется следующим образом:

$$\sum_{(n_1, \ldots, n_4)} = \sum_{(n_1, n_2, n_1, n_2)} + \sum_{(n_1, n_1, n_2, n_2)} + \sum_{(n_1, n_2, n_2, n_1)}, \tag{76}$$

где штрих обозначает условие $n_1 \neq n_2$.

В случае (n_1, n_2, n_1, n_2) имеем:

$$\cos(\varphi_{n_1} + \alpha_{n_1, k}) \cos(\varphi_{n_1} + \alpha_{n_1, r}) \cos(\varphi_{n_2} + \alpha_{n_2, l}) \cos(\varphi_{n_2} + \alpha_{n_2, s}) =$$

$$= \frac{1}{4}\{\cos(\alpha_{n_1, k} - \alpha_{n_1, r}) \cdot \cos(\alpha_{n_2, l} - \alpha_{n_2, s}) +$$

$$+ \cos(\alpha_{n_2, l} - \alpha_{n_2, s}) \cdot \cos(2\varphi_{n_1} + \alpha_{n_1, k} + \alpha_{n_1, r}) +$$

$$+ \cos(\alpha_{n_1, k} - \alpha_{n_1, r}) \cdot \cos(2\varphi_{n_2} + \alpha_{n_2, l} + \alpha_{n_2, s}) +$$

$$+ \cos(2\varphi_{n_1} + \alpha_{n_1, k} + \alpha_{n_1, r}) \cdot \cos(2\varphi_{n_2} + \alpha_{n_2, l} + \alpha_{n_2, s})\}.$$

Первому члену соответствует сумма (см. (18), (20), (42), ср. (74))

$$\frac{4}{\sigma^4} \sum_{n_1, n_2}\sum \frac{1}{n_1 n_2} \cos(\alpha_{n_1, k} - \alpha_{n_1, r}) \cos(\alpha_{n_2, l} - \alpha_{n_2, s}) =$$

$$= \left\{\frac{2}{\sigma^2} \sum_{n_1} \frac{1}{n_1} \cos(\alpha_{n_1, k} - \alpha_{n_1, r})\right\} \left\{\frac{2}{\sigma^2} \sum_{n_2} \frac{1}{n_2} \cos(\alpha_{n_2, l} - \alpha_{n_2, s})\right\} =$$

$$= R(\tau_k - \tau_r) R(\tau_l - \tau_s). \tag{77}$$

Второму и третьему членам соответствуют нулевые вклады в сумму (74). Четвертому члену соответствует ненулевой вклад только в случае $n_1 = n_2$:

$$\frac{2}{\sigma^2} \sum_{n_1} \frac{1}{n_1^2} \cos(\alpha_{n_1, k} + \alpha_{n_1, r} - \alpha_{n_1, l} - \alpha_{n_1, s}) = O\left(\frac{1}{\sigma^4}\right) = O\left(\frac{1}{\ln^2 P}\right). \tag{78}$$

Следовательно, (см. (76)—(78)):

$$\frac{16}{\sigma^4} \sum_{(n_1, n_2, n_1, n_2)} = R(\tau_k - \tau_r) R(\tau_l - \tau_s) + O\left(\frac{1}{\ln^2 P}\right). \tag{79}$$

В случае (n_1, n_1, n_2, n_2) мы, прежде всего, имеем (см. (76), ср. (78)):

$$\sum_{(n_1, n_1, n_2, n_2)} = \sum_{(n_1, n_1, n_2, n_2)} + O(1).$$

Теперь, как в (79),

$$\frac{16}{\sigma^4} \sum_{(n_1, n_1, n_2, n_2)} = R(\tau_k - \tau_l)\, R(\tau_r - \tau_s) + O\left(\frac{1}{\ln^2 P}\right), \tag{80}$$

и, аналогичным образом,

$$\frac{16}{\sigma^4} \sum_{(n_1, n_2, n_2, n_1)} = R(\tau_k - \tau_s)\, R(\tau_l - \tau_r) + O\left(\frac{1}{\ln^2 P}\right). \tag{81}$$

Наконец, из (74), в силу (76), (79)—(81), следует (70).

12 Частные производные характеристической функции χ_m при $\bar{q} = 0$, порядков $2p$, $p \geqq 3$

В пункте 11.3. мы впервые встретились с отклонением частных производных характеристической функции χ_m от соответствующих производных характеристической функции $\bar{\chi}_m$, порожденной корреляционной матрицей

$$\|R(\tau_k - \tau_l)\|, \qquad k, l = 1, \ldots, m.$$

Так как вектор математических ожиданий равен нулю, то $\bar{\chi}_m$ — характеристическая функция гауссовской совокупности случайных величин. К счастью, оказалось, что эти отклонения стремятся к нулю при $P \to \infty$.

Так как в статистической радиотехнике предполагается, что существенная информация о процессе заключается в первых моментах и моменты высших порядков вносят лишь несущественные уточнения, то уже соотношений (67)—(70) достаточно для предположения о гауссовости процесса $F(\tau)$ при $P \to \infty$.

В этой части мы, однако, получим результат типа (70) для всех $2p$, $p \geqq 3$. Явно отметим, что p может достигать сколь угодно бофьших но фиксированных значений; выбор p не зависит от P.

Справедлива

Лемма 6.

$$\left.\frac{\partial^{2p} \chi_m}{\partial q_{k_1} \ldots \partial q_{k_{2p}}}\right|_{\bar{q} = 0} =$$

$$= (-1)^p \frac{(2p)!}{2^p p!} \{R(\tau_{k_1} - \tau_{k_2}) R(\tau_{k_3} - \tau_{k_4}) \dots R(\tau_{k_{2p-1}} - \tau_{k_{2p}})\}_{SYM} + O\left(\frac{1}{\ln^2 P}\right),$$

$$p = 3, 4, \dots,$$

при $P \to \infty$, где $\{\dots\}_{SYM}$ обозначает симметризованную форму произведений, составленных из R, содержашую

$$\frac{(2p)!}{2^p p!}$$

членов и $k_1, \dots, k_{2p} = 1, \dots, m$.

Доказательство.

12.1. Прежде всего имеем:

$$\left.\frac{\partial^{2p} \chi_m}{\partial q_{k_1} \dots \partial q_{k_{2p}}}\right|_{\bar{q}=0} =$$

$$= (-1)^p \frac{2^{2p}}{\sigma^{2p}} \sum_{(n_1, \dots, n_{2p})} \frac{1}{\sqrt{n_1 \dots n_{2p}}} \cdot I_4, \qquad n_1, \dots, n_{2p} < P, \tag{82}$$

$$I_4 = I_4(n_1, \dots, n_{2p}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\varphi_{n_1} + \alpha_{n_1, k_1}) \dots \cos(\varphi_{n_{2p}} + \alpha_{n_{2p}, k_{2p}}) \cdot W \, d\varphi_1 \dots d\varphi_{[P]}.$$

Интеграл входящий в (82), отличен от нуля только тогда, когда $(n_1, \dots, n_{2p})$ распадается на группы попарно равных членов. Отсюда, для суммы входящей в (82), получаем следующее выражение

$$\sum_{(n_1, \dots, n_{2p})} \frac{1}{\sqrt{n_1 \dots n_{2p}}} I_4(n_1, \dots, n_{2p}) =$$

$$= \sum_{(n_1, \dots, n_{2p})} \frac{1}{n_1 \dots n_p} I_4(n_1, n_1, n_2, n_2, \dots, n_p, n_p) + \dots \tag{83}$$

где:

(A) количество сумм стоящих на правой стороне равно $(2p)!/2^p p!$,

(B) первая сумма соответствует выбору

$$n_1 = n_2, \; n_3 = n_4, \; \dots, \; n_{2p-1} = n_{2p},$$

(C) многоточие обозначает штрихованные суммы (ср. (76)).

12.2. Произведение косинусов в первой сумме на правой стороне (83), можно написать так:

$$\prod_{j=1}^{p} \cos(\varphi_{n_j} + \alpha_{n_j, k_{2j-1}}) \cos(\varphi_{n_j} + \alpha_{n_j, k_{2j}}) =$$

$$= \frac{1}{2^p} \prod_{j=1}^{p} \cos\{\Omega(n_j)(\tau_{k_{2j-1}} - \tau_{k_{2j}})\} + Q; \qquad (84)$$

использовано соотношение (ср. (42))

$$\alpha_{n_j, k_{2j-1}} - \alpha_{n_j, k_{2j}} = \Omega(n_j)(\tau_{k_{2j-1}} - \tau_{k_{2j}}).$$

Главному члену в (84) соответствует следующий вклад в частную производную (см. (18), (20), (82), (83)):

$$(-1)^p \frac{2^{2p}}{\sigma^{2p}} \sum_{(n_1, \ldots, n_p)} \frac{1}{n_1 \ldots n_p} \cdot \frac{1}{2^p} \prod_{j=1}^{p} \cos\{\Omega(n_j)(\tau_{k_{2j-1}} - \tau_{k_{2j}})\} =$$

$$= (-1)^p \prod_{j=1}^{p} \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n_j=1}^{[P]} \frac{1}{n_j} \cos\{\Omega(n_j)(\tau_{k_{2j-1}} - \tau_{k_{2j}})\} =$$

$$= (-1)^p \prod_{j=1}^{p} R(\tau_{k_{2j-1}} - \tau_{k_{2j}}). \qquad (85)$$

Теперь оценим вклад члена Q в частную производную. Так как

$$\cos(\varphi_{n_j} + \alpha_{n_j, k_{2j-1}}) \cos(\varphi_{n_j} + \alpha_{n_j, k_{2j}}) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\alpha_{n_j, k_{2j-1}} - \alpha_{n_j, k_{2j}}) + \frac{1}{2}\cos(2\varphi_{n_j} + \alpha_{n_j, k_{2j-1}} + \alpha_{n_j, k_{2j}}), \qquad (86)$$

то Q есть сумма членов, являющихся, в свою очередь, произведениями сомножителей, входящих в правую сторону (86), правда, при разных j. При этом, в каждый член этой суммы входит сомножитель типа

$$\frac{1}{2}\cos(2\varphi_{n_j} + \alpha_{n_j, k_{2j-1}} + \alpha_{n_j, k_{2j}}).$$

Следовательно, интеграл такого члена только тогда отличен от нуля, когда в этот член входит четное число сомножителей указанного типа с попарно равными значениями n_j. Так как (см. (19))

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n_j < P} \frac{1}{n_j} = O(1), \quad \frac{1}{\sigma^4} \sum_{n_j < P} \frac{1}{n_j^2} = O\left(\frac{1}{\sigma^4}\right) = O\left(\frac{1}{\ln^2 P}\right),$$

то каждый член входящий в Q а следовательно и вся сумма Q (ограниченное число членов при $P \to \infty$), вносит в частную производную вклад, оцениваемый как

$$O\left\{\frac{1}{\sigma^4}\sum_{n<P}\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n<P}\frac{1}{n}\right)^{p-2}\right\} = O\left(\frac{1}{\ln^2 P}\right). \tag{87}$$

Следовательно, первой сумме в (83) соответствует следующий вклад (см. (85)):

$$(-1)^p R(\tau_{k_1}-\tau_{k_2})R(\tau_{k_3}-\tau_{k_4})\ldots R(\tau_{k_{2p-1}}-\tau_{k_{2p}}) + O\left(\frac{1}{\ln^2 P}\right). \tag{88}$$

12.3. Еще рассмотрим вклад в производную от штрихованных сумм входящих в (83). В любой фиксированной штрихованной суме отсутствуют члены, соответствующие совокупности $(n_{l_1}, \ldots, n_{l_p})$, в которой имеет место хотя бы одно равенство $n_{l_i} = n_{l_j}$, $i \neq j$, (ср. сказанное в связи с (75) и (76)). Но добавление суммы таких членов вносит ошибку $O(1/\ln^2 P)$, получающуюся как в (87).

Теперь уже становится очевидным, что каждая из штрихованных сумм вносит в частную производную вклад типа (88), притом так, что сумма всех главных членов образует симметризованную форму произведений:

$$(-1)^p \frac{(2p)!}{2^p p!}\{R(\tau_{k_1}-\tau_{k_2})R(\tau_{k_3}-\tau_{k_4})\ldots R(\tau_{k_{2p-1}}-\tau_{k_{2p}})\}_{SYM}.$$

13 Соображения, приводящие к предположению о гауссовости процесса $F(\tau)$ при $P\to\infty$

Напомним, что предположение о гауссовости случайного процесса $F(\tau)$ приводит нас к следующему выражению для характеристической функции совокупности $(F(\tau_1), \ldots, F(\tau_m))$, $m = 1, 2, \ldots$:

$$\bar{\chi}_m = \bar{\chi}_m(q_1, \tau_1; \ldots; q_m, \tau_m) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} R(\tau_k-\tau_l)q_k q_l\right], \tag{89}$$

(конечно, $\boldsymbol{M}[F(\tau)] = 0$, $\tau\in(-\infty, +\infty)$).

Из (89) получаются соотношения (ср. [11], стр. 64):

$$\bar{\chi}_m|_{\bar{q}=0} = 1,$$
$$\left.\frac{\partial^{2p-1}\bar{\chi}_m}{\partial q_{k_1}\ldots\partial q_{k_{2p-1}}}\right|_{\bar{q}=0} = 0, \tag{90}$$
$$\left.\frac{\partial^{2p}\bar{\chi}_m}{\partial q_{k_1}\ldots\partial q_{k_{2p}}}\right|_{\bar{q}=0} =$$
$$= (-1)^p\frac{(2p)!}{2^p p!}\{R(\tau_{k_1}-\tau_{k_2})R(\tau_{k_3}-\tau_{k_4})\ldots R(\tau_{k_{2p-1}}-\tau_{k_{2p}})\}_{SYM},$$

где $p = 1, 2, \ldots$, Сравнивая (90) с соответствующими соотношениями из Леммы 5 и 6, получаем:

$$
\begin{gathered}
\chi_m|_{\bar{q}=0} = \bar{\chi}_m|_{\bar{q}=0}, \\
\left.\frac{\partial^{2p-1}\chi_m}{\partial q_{k_1}\ldots\partial q_{k_{2p-1}}}\right|_{\bar{q}=0} = \left.\frac{\partial^{2p-1}\bar{\chi}_m}{\partial q_{k_1}\ldots\partial q_{k_{2p-1}}}\right|_{\bar{q}=0}, \quad p = 1, 2, \ldots, \\
\left.\frac{\partial^2\chi_m}{\partial q_k \partial q_l}\right|_{\bar{q}=0} = \left.\frac{\partial^2\bar{\chi}_m}{\partial q_k \partial q_l}\right|_{\bar{q}=0}, \\
\left.\frac{\partial^{2p}\chi_m}{\partial q_{k_1}\ldots\partial q_{k_{2p}}}\right|_{\bar{q}=0} = \left.\frac{\partial^{2p}\bar{\chi}_m}{\partial q_{k_1}\ldots\partial q_{k_{2p}}}\right|_{\bar{q}=0} + O\left(\frac{1}{\ln^2 P}\right);
\end{gathered}
\tag{91}
$$

в последнем соотношении $p = 2, 3, \ldots$

Теперь, из (91), следует

Теорема 9. Полиномы Маклорена функций χ_m, $\bar{\chi}_m$:

$$1 + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)!} \mathrm{d}^{2p}\chi_m|_{\bar{q}=0}, \quad 1 + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)!} \mathrm{d}^{2p}\bar{\chi}_m|_{\bar{q}=0}$$

совпадают при $P \to \infty$ для любого фиксированного N (т.е. асимптотически совпадают).

В силу Теоремы 9 делаем следующее

Предположение 3.

$$\lim_{P\to\infty} \chi_m = \bar{\chi}_m, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{92}$$

т.е. мы предполагаем, что $F(\tau)$ является гауссовским процессом при $P \to \infty$, (ср. Предположение 2).

Замечание 12. Асимптотической гауссовости (при $P \to \infty$) одномерного распределения процесса $F(\tau)$, установленной с помощью центральной предельной теоремы Ляпунова (см. Теоремы 2), соответствует соотношение

$$\lim_{P\to\infty} \chi_1 = \bar{\chi}_1,$$

которое входит в (92) и является, в свою очередь, аргументом в пользу общего соотношения (92).

14 Заключительные замечания

Результаты, содержащиеся в Лемме 5, можно интерпретировать также следующим образом: при больших P, процесс $F(\tau)$ «мало отличается» от гауссовского процесса, в следующем смысле: его одномерная и двумерная плотности

$$\tilde{W}(F), \ \tilde{\tilde{W}}(F_1, F_2; \tau)$$

выражаются асимптотическими рядами Эджворта, по одномерным и двумерным полиномам Чебышева—Эрмита, в которых отбрасываваются все члены кроме первого.

Поскольку из (68) следует, что все многомерные центральные моменты процесса $F(\tau)$ нечетного порядка, равны нулю, то отбрасыванию членов в рядах Эджворта соответствует аппроксимация плотностей $\tilde{W}$, $\tilde{\tilde{W}}$ с учетом лишь асимметрии.

Теперь напомним, что для процессов «мало отличающихся» от гауссовского, теория выбросов применима (см. [14], стр. 94—98) и получается результат типа (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Rice, S. O.: Mathematical analysis of random noise. Bell System Technical Journal, v. 23, No. 3, 282—332 (1944); v. 24, No. 1, 46—156 (1945).
2. Selberg, A.: On the zeros of Riemann's zeta-function. Skr. Norske Vid. Akad. Oslo (1942), No. 10, 1—59.
3. Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the Zeta-function of Riemann, IV, Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105.
4. Карацуба, А. А.: О нулях дзета-функции Римана. ДАН СССР, 1984 т. 276, №3, 535—539.
5. Карацуба, А. А.: О нулях $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой. Изв. АН СССР, сер. мат., 1984, т. 48, №3, 569—584.
6. Мозер, Ян: О корнях уравнения $Z'(t) = 0$. Acta Arith., 40 (1981), 79—89.
7. Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана-Зигеля. Acta Arith., 42 (1982), 1—10.
8. Мозер, Ян: Теорема Ляпунова и статистическая длина одной кривой в теории дзета-функции Римана. Acta Math. Univ. Comen., (в редакции).
9. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана. Москва, ИИЛ 1953.
10. Ватсон, Г. Н.: Теория бесселевых функций. Москва, ИИЛ 1949.
11. Гардинер, К. В.: Стохастические методы в естественных науках. Москва, «Мир» 1986.
12. Крамер, Г.—Линдбеттер, М.: Стационарные случайные процессы. Москва, «Мир» 1969.
13. Миддлтон, Д.: Введение в статистическую теорию связи. Москва, «Советское радио» 1961.
14. Тихонов, В. И.: Выбросы случайных процессов. Москва, «Наука» 1970.
15. Сборник «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», под редакцией Н. А. Железнова. Москва, ИИЛ 1953; стр. 88—238.

Адрес автора:

Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступило: 18. 1. 1988

SÚHRN

O NULOVÝCH BODOCH ISTÉHO NÁHODNÉHO PROCESU, GENEROVANÉHO RIEMANNOVÝM—SIEGELOVÝM VZORCOM

JÁN MOSER, Bratislava

Pomocou asymptotickej formy hlavného člena v Riemannovom—Siegelovom vzorci je definovaný náhodný proces $\overset{*}{Z}_2$. Pri štúdiu nulových bodov nepárneho rádu procesu $\overset{*}{Z}_2$ je použitá Riceova teória (1944, 1945) o pretínaní danej úrovne náhodným procesom, ktorá je dobre známa v štatistickej rádiotechnike.

Dokázaný je nasledovný výsledok: existuje taká realizácia $\bar{Z}_2(t)$ procesu $\overset{*}{Z}_2$, pre ktorú platí odhad

$$N_0\left\{\left(T-\frac{U}{2}, T+\frac{U}{2}\right); \bar{Z}_2\right\} > \frac{1}{\sqrt{3}\pi}(1-\varepsilon)\, U \ln P, \qquad U \in \left\langle \frac{H_1}{\ln P}, \frac{H_2}{\ln P}\right\rangle,$$

$P = (T/2\pi)^{1/2}$, $P \to \infty$, kde N_0 je počet nulových bodov nepárneho rádu realizácie $\bar{Z}_2(t)$ v intervale $(T - U/2, T + U/2)$, $0 < \varepsilon$ je ľubovoľne malé číslo a $0 < H_1, H_2$ sú konštanty.

Teda, metódami štatistickej rádiotechniky je zostrojená reálna funkcia $\bar{Z}_2(t)$ s vlastnosťou, že pre počet jej nulových bodov nepárneho rádu, ležiacich vo veľmi krátkom intervale $(T - U/2, T + U/2)$, platí odhad zdola Selbergovho typu (1942).

SUMMARY

ON ZERO POINTS OF A CERTAIN RANDOM PROCESS GENERATED BY RIEMANN—SIEGEL FORMULA

JÁN MOSER, Bratislava

By means of the asymptotic form of the main term in Riemann-Siegel formula, a random process $\overset{*}{Z}_2$ is defined. To study the zero points of the odd order of $\overset{*}{Z}_2$ the Rice's theory (1944, 1945) concerning the crossing of a given level by a random process, is used. The last mentioned theory is well known in the statistical radio engineering.

The following result is proved: there exists a realization $\bar{Z}_2(t)$ of $\overset{*}{Z}_2$ with the estimate

$$N_0\left\{\left(T-\frac{U}{2}, T+\frac{U}{2}\right); \bar{Z}_2\right\} > \frac{1}{\sqrt{3}\pi}(1-\varepsilon)\, U \ln P, \qquad U \in \left\langle \frac{H_1}{\ln P}, \frac{H_2}{\ln P}\right\rangle,$$

$P = (T/2\pi)^{1/2}$, $P \to \infty$, where N_0 is the number of the zero points of the odd order of the realization $\bar{Z}_2(t)$ in the interval $(T - U/2, T + U/2)$, $0 < \varepsilon$ is an arbitrary small number and $0 < H_1, H_2$ are constants.

Thus, by means of the methods of statistical radio engineering a real function $\bar{Z}_2(t)$ is constructed such, that the number of its zero points of the odd order in a very short interval $(T - U/2, T + U/2)$, the lower estimate of Selberg's typu (1942) is valid.