UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LVI—LVII

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГЕОРГИЙ КВИНИКАДЗЕ, Тбилиси

Пусть n — некоторое натуральное число, $-\infty < a < b < +\infty$, а $f \in \mathscr{K}_{loc}([a, b[\times R^n; R)$[1]. Рассмотрим задачу о нахождении такого решения u уравнения

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}), \tag{0.1}$$

которое определено на некотором промежутке $[a_0, b[\subset [a, b[$ и удовлетворяет условиям

$$(-1)^i u^{(i)}(t) > 0$$

при

$$a_0 \leq t < b, \quad \lim_{t \to b-} u^{(i)}(t) = 0 \quad (i = 0, \ldots, n-1). \tag{0.2}$$

Задача (0.1), (0.2) вызывает интерес в связи с т.н. сингулярными кнезеровскими решениями обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1]).

В работе для уравнений, в некотором смысле «подлинейных» (см. (2.2), (2.4), (2.17), (3.3)) устанавливаются как необходимые, так и достаточные условия разрешимости задачи (0.1), (0.2), а также двусторонние априорные оценки решений этой задачи вблизи b. При этом рассматривается случай, когда

$$(-1)^n f(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0 \text{ при } a \leq t < b, \ (-1)^{i-1} x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{0.3}$$

Всюду в дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений

---

[1]) По поводу обозначений см. ниже.

$$R =]-\infty, +\infty[, \quad R_+ = [0, +\infty[, \quad R^n = \underbrace{R \times \ldots \times R}_{n \text{ раз}}, \quad R_+^n = \underbrace{R_+ \times \ldots \times R_+}_{n \text{ раз}};$$

если $t_0 \in [a, b[$ и $r > 0$, то

$$\Lambda_n(t_0, b; r) = \{(t, x_1, \ldots, x_n) \in [t_0, b[\times R^n : 0 \le (-1)^{i-1} x_i \le (b-t)^{n-i} r (i = 1, \ldots, n)\}.$$

Пусть $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset R$ — некоторые промежутки и $\Gamma \subset R^n$. Тогда: $L_{loc}(\mathcal{I}; \mathcal{J})$ — множество всех функций $p: \mathcal{I} \to \mathcal{J}$, интегрируемых по Лебегу на каждом сегменте, содержащемся в $\mathcal{I}$; $C(\Gamma; \mathcal{J})$ — множество всех непрерывных функций $h: \Gamma \to \mathcal{J}$; $\mathcal{K}_{loc}(\mathcal{I} \times \Gamma; \mathcal{J})$ — множество всех функций $f: \mathcal{I} \times \Gamma \to \mathcal{J}$, удовлетворяющих локальным условиям Каратеодори, т.е. таких, что $f(t, \cdot) \in C(\Gamma; \mathcal{J})$ при почти всех $t \in \mathcal{I}$ и для любого компакта $\Gamma_0 \subset \Gamma$

$$\sup\{|f(\cdot, x)| : x \in \Gamma_0\} \in L_{loc}(\mathcal{I}; \mathcal{J});$$

$\tilde{C}_{loc}^{n-1}(\mathcal{I}; \mathcal{J})$ — множество всех функций $u: \mathcal{I} \to \mathcal{J}$, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно на каждом сегменте, содержащемся в $\mathcal{I}$; $\tilde{C}_{loc}(\mathcal{I}; \mathcal{J}) = \tilde{C}_{loc}^{0}(\mathcal{I}; \mathcal{J})$.

Под решением уравнения (0.1), определенным на $\mathcal{I}$, будем понимать функцию $u \in \tilde{C}_{loc}^{n-1}(\mathcal{I}; \mathcal{J})$, почти всюду на $\mathcal{I}$ удовлетворяющую этому уравнению.

1 Вспомогательные утверждения

Лемма 1.1. Пусть $-\infty < a_0 < b < +\infty$, $\alpha_0 = (b - a_0)^{-1}$ и $u \in \tilde{C}_{loc}^{n-1}([a_0, b[; R)$. Тогда функция $v \in \tilde{C}_{loc}^{n-1}([\alpha_0, +\infty[; R)$, определенная равенством

$$v(s) = s^{n-1} u\left(b - \frac{1}{s}\right) \quad \text{при } s \geqslant \alpha_0, \tag{1.1}$$

почти всюду на $[\alpha_0, +\infty[$ удовлетворяет соотношению

$$v^{(n)}(s) = \frac{1}{s^{n+1}} u^{(n)}\left(b - \frac{1}{s}\right). \tag{1.2}$$

Более того,

$$s^i v^{(i)}(s) = \sum_{j=0}^{i} \gamma_{nij} s^{n-1-j} u^{(j)}\left(b - \frac{1}{s}\right), \tag{1.3}$$

$$(-1)^i s^{n-1-i} u^{(i)}\left(b - \frac{1}{s}\right) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \gamma_{nij} s^j v^{(j)}(s) \tag{1.4}$$

при $s \geqslant \alpha_0$ $(i = 0, \ldots, n)$,

где

$$\gamma_{nij} = \frac{i!(n-1-j)!}{j!(n-1-i)!(i-j)!} \quad (i = 0, \ldots, n-1;\ j = 0, \ldots, i)$$
$$\gamma_{nnj} = 0 \quad (j = 0, \ldots, n-1), \quad \gamma_{nnn} = 1. \tag{1.5}$$

Доказательство. При $n = 1$ равенство (1.2), очевидно, соблюдается. Допустим, что оно справедливо для всех $n \in \{1, \ldots, m\}$, где $m \geqslant 1$, и любой функции $u \in \tilde{C}^{n-1}_{loc}([t_0, b[; R)$, и докажем его справедливость для $n = m + 1$. Имеем при $s \geqslant \alpha_0$

$$\frac{d^{m+1}}{ds^{m+1}}\left[s^m u\left(b - \frac{1}{s}\right)\right] = \frac{d^m}{ds^m}\left[\frac{d}{ds}\left[s^m u\left(b - \frac{1}{s}\right)\right]\right] =$$
$$= m\frac{d^m}{ds^m}\left[s^{m-1}u\left(b - \frac{1}{s}\right)\right] + \frac{d}{ds}\left[\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[s^{m-2}u'\left(b - \frac{1}{s}\right)\right]\right] =$$
$$= \frac{m}{s^{m+1}}u^{(m)}\left(b - \frac{1}{s}\right) + \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^m}u^{(m)}\left(b - \frac{1}{s}\right)\right] = \frac{1}{s^{m+2}}u^{(m+1)}\left(b - \frac{1}{s}\right).$$

Тем самым по индукции справедливость равенства (1.2) установлена для любого натурального n.

Соотношения (1.3) очевидны для $n = 1$. Допустим их справедливость для $n = m$, где $m \geqslant 1$, и любого $i \in \{0, \ldots, m\}$. Применяя формулу Лейбница и учитывая (1.5), для любого $i \in \{0, \ldots, m\}$ находим

$$s^i\frac{d^i}{ds^i}\left[s^m u\left(b - \frac{1}{s}\right)\right] = s^i\frac{d^i}{ds^i}\left[s \cdot s^{m-1}u\left(b - \frac{1}{s}\right)\right] =$$
$$= s^{i+1}\frac{d^i}{ds^i}\left[s^{m-1}u\left(b - \frac{1}{s}\right)\right] + is^i\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}\left[s^{m-1}u\left(b - \frac{1}{s}\right)\right] =$$
$$= s\sum_{j=0}^{i}\gamma_{mij}s^{m-1-j}u^{(j)}\left(b - \frac{1}{s}\right) + is\sum_{j=0}^{i-1}\gamma_{m,i-1,j}s^{m-1-j}u^{(j)}\left(b - \frac{1}{s}\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{i}\gamma_{m+1,ij}s^{m-j}u^{(j)}\left(b - \frac{1}{s}\right)$$

при $s \geqslant \alpha_0$.

Таким образом, (1.3) имеет место для $n = m + 1$ и любого $i \in \{0, \ldots, m\}$. Для $i = m + 1$ справедливость следует из (1.2). Согласно принципу математической индукции равенства (1.3) доказаны.

Положим $\alpha_{ij} = \gamma_{nij}$, если $0 \leq j \leq i$ и $\alpha_{ij} = 0$, если $i < j \leq n - 1$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. Легко проверить, что матрицы $(\alpha_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$ и $((-1)^{i+j}\alpha_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$

взаимно обратны. Поэтому, с учетом (1.2), (1.4) следует из (1.3). Лемма доказана.

Равенство (1.2) без доказательства приводится в [2, стр. 212].

Ниже для удобства читателя мы приводим одно предложение о сингулярных дифференциальных неравенствах, которое нам понадобится в дальнейшем.

Пусть $F \in \mathscr{K}_{loc}([a, b[\times R_+; R)$. Рассмотрим сингулярную задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \qquad \lim_{t \to b-} x(t) = 0. \tag{1.6}$$

Определение 1.1. Решение $x^*\colon]a_1, b[\to R_+$ задачи (1.6) называется ее верхним решением, если для любого решения $x\colon]a_2, b[\to R_+$ этой задачи имеем

$$x(t) \le x^*(t) \qquad \text{при} \quad t \in]a_1, b[\cap]a_2, b[.$$

Лемма 1.2 (см. [3]). Пусть задача (1.6) имеет верхнее решение $x^*\colon]a_1, b[\to R_+$, а функция $w \in \tilde{C}_{loc}(]a_1, b[; R_+)$ такова, что $\lim\limits_{t \to b-} w(t) = 0$ и почти всюду на $]a_1, b[$ $w'(t) \geqslant F(t, w(t))$. Тогда $w(t) \le x^*(t)$ при $a_1 < t < b$.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть для некоторых $t_0 \in [a, b[$ и $r > 0$ на множестве $\Lambda_n(t_0, b; r)$ соблюдаются неравенства

$$\varphi(t, |x_1|, \dots, |x_n|) \le (-1)^n f(t, x_1, \dots, x_n) \le g(t), \tag{2.1}$$

где $g \in L([a, b]; R_+)$, а $\varphi \in \mathscr{K}_{loc}([t_0, b[\times R_+^n; R_+)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

1) φ не возрастает по первому, не убывает по последним n аргументам и

$$\varphi(t, x, \dots, x) > 0, \quad \int_0^x [y^{n-1}\varphi(t, y, \dots, y)]^{-\frac{1}{n}} \, dy < +\infty \tag{2.2}$$

при $t_0 \le t < b$, $x > 0$;

2) $$\varphi(t, x_1, \dots, x_n) \equiv p(t) h(x_1, \dots, x_n),$$

где $p \in L_{loc}([t_0, b[; R_+)$ и

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [t, b[\colon p(\tau) > 0\} > 0 \tag{2.3}$$

при $t_0 \le t < b$, а $h \in C(R_+^n; R_+)$ не убывает по каждому своему аргументу и

$$h(x, \dots, x) > 0, \quad \int_0^x [y^{n-1}h(y, \dots, y)]^{-\frac{1}{n}}\, dy < +\infty \tag{2.4}$$

при $x > 0$.

Тогда задача (0.1), (0.2) разрешима для некоторого $a_0 \in [t_0, b[$.

Доказательство. Для любого $\varrho > 0$ положим

$$\pi(\varrho, x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \\ x & \text{при} \quad 0 \le x \le \varrho \\ \varrho & \text{при} \quad x > \varrho \end{cases}$$

и пусть

$$\tilde{f}(t, x_1, \dots, x_n) = f(t, \pi(r(b-t)^{n-1}, x_1), -\pi(r(b-t)^{n-2}, -x_2), \dots$$
$$\dots, (-1)^{n-1}\pi(r, (-1)^{n-1}x_n)),$$

$$\tilde{\varphi}(t, x_1, \dots, x_n) = \varphi(t, \pi(r(b-t)^{n-1}, x_1), \pi(r(b-t)^{n-2}, x_2), \dots, \pi(r, x_n)).$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{f} \in \mathcal{K}_{loc}([t_0, b[\times R^n; R)$, $\tilde{\varphi} \in \mathcal{K}_{loc}([t_0, b[\times R^n_+; R_+)$, $\tilde{\varphi}$ не убывает по последним n аргументам и, ввиду (2.1),

$$\tilde{\varphi}(t, |x_1|, \dots, |x_n|) \le (-1)^n f(t, x_1, \dots, x_n) \le g(t) \tag{2.5}$$

при $(t, x_1, \dots, x_n) \in [t_0, b[\times R^n$.

В силу теоремы 2.1 из [1], а также замечания, сделанного в конце [1], существует последовательность $\{v_k : [t_0, b_k] \to R\}_{k=1}^{\infty}$ решений уравнения

$$v^{(n)} = \tilde{\varphi}(t, |v|, |v'|, \dots, |v^{(n-1)}|)$$

такая, что $b_k \uparrow b$ при $k \to \infty$ и

$$(-1)^i v_k^{(i)}(t) > 0$$

при

$$t_0 \le t < b, \quad v_k^{(i)}(b_k) = 0 \qquad (i = 0, \dots, n-1)$$

(v_k могут быть продолжены на $[t_0, b_k]$ ввиду (2.5)).

Зафиксируем k. Пусть u_k — решение уравнения

$$u^{(n)} = \tilde{f}(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}), \tag{2.6}$$

удовлетворяющее условиям

$$u_k^{(i)}(b_k) = 0 \qquad (i = 0, \dots, n-2), \qquad u_k^{(n-1)}(b_k) = (-1)^{n-1}\varepsilon_k, \tag{2.7}$$

где

$$\varepsilon_k = \int_{b_k}^{b} g(t)\, dt. \tag{2.8}$$

Ввиду (2.5) можем предполагать, что u_k определено на $[t_0, b_k]$. Ввиду (2.2) б случае 1) и (2.3) в случае 2) $\varepsilon_k > 0$. Кроме того, $(-1)^{n-1} v_{k+1}^{(n-1)}(b_k) > 0 = (-1)^{n-1} v_k^{(n-1)}(b_k)$. Поэтому, согласно известному утверждению об интегральных неравенствах (см. напр. [1, лемма 1.2]),

$$0 < (-1)^i v_k^{(i)}(t) < (-1)^i v_{k+1}^{(i)}(t), \quad (-1)^i v_k^{(i)}(t) < (-1)^i u_k^{(i)}(t) \tag{2.9}$$

при $t_0 \leq t < b_k$ $(i = 0, \ldots, n-1)$.

Далее, ввиду (2.5)—(2.8) имеем

$$|u_k^{(i)}(t)| = \frac{\varepsilon_k(b_k - t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} + \frac{1}{(n-i-1)!} \int_t^{b_k} (\tau - t)^{n-i-1} |\tilde{f}(\tau, u(\tau), \ldots$$

$$\ldots, u^{(n-1)}(\tau))| \,\mathrm{d}\tau \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_t^b g(t)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.10}$$

при $t_0 \leq t \leq b_k$ $(i = 0, \ldots n-1)$.

Из (2.10) следует, что каков бы ни был сегмент $\mathscr{J} \subset [t_0, b[$, последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ начиная с некоторого места определена, равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на $\mathscr{J}$ вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно. Следовательно, без ограничения общности можем считать, что она сходится к некоторому решению u: $[t_0, b[\to R$ уравнения (2.6). Согласно (2.9) и (2.10) u удовлетворяет условиям (0.2).

Из (0.2) имеем

$$\lim_{t \to b-} \frac{u^{(i)}(t)}{(b-t)^{n-i-1}} = 0 \quad (i = 0, \ldots, n-1). \tag{2.11}$$

Поэтому существует $a_0 \in [t_0, b[$ такое, что $(t, u(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)) \in \Lambda_n(a_0, b; r)$ при $t \geqslant a_0$. Следовательно, согласно определению $\tilde{f}$, сужение u на $[a_0, b[$ является решением задачи (0.1), (0.2). Теорема доказана.

Следствие. Пусть для некоторых $t_0 \in [a, b[$ и $r > 0$ на множестве $\Lambda_n(t_0, b; r)$ соблюдаются неравенства

$$p(t)|x_1|^{\lambda_1} \ldots |x_n|^{\lambda_n} \leq (-1)^n f(t, x_1, \ldots, x_n) \leq q(t)|x_1|^{\lambda_1} \ldots |x_n|^{\lambda_n},$$

где $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $0 < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 1$, $p \in L_{loc}([t_0, b[; R_+)$ удовлетворяет условию (2.3), а $q \in L_{loc}([t_0, b[; R_+)$ — условию

$$\int_{t_0}^{b} (b-t)^{(n-1)\lambda_1 + (n-2)\lambda_2 + \ldots + \lambda_n - 1} q(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Тогда задача (0.1), (0.2) разрешима для некоторого $a_0 \in [t_0, b[$.

Теорема 2.2. Пусть для некоторых $t_0 \in [a, b[$ и $r > 0$ на множестве $\Lambda_n(t_0, b; r)$ соблюдается неравенство

$$(-1)^n f(t, x_1, \ldots, x_n) \leq \psi(t, |x_1|, \ldots, |x_n|), \tag{2.12}$$

где $\psi \in \mathcal{K}_{loc}([t_0, b[\times R_+^n; R_+)$ не убывает по $|x_1|, \ldots, |x_{n-1}|$ и задача

$$\frac{dx}{dt} = -\psi\left(t, \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}x, \ldots, (b-t)x, x\right),$$

$$\lim_{t \to b-} x(t) = 0$$

имеет верхнее решение x^* (см. определение 1.1). Тогда для любого решения u задачи (0.1), 0.2) вблизи b имеем

$$|u^{(n-1)}(t)| \leq x^*(t). \tag{2.13}$$

Доказательство. Пусть u: $[a_0, b[\to R$ — решение задачи (0.1), (0.2). Так как соблюдается (2.11), то ввиду (2.12) t_0 можно считать настолько близким к b, чтобы

$$(-1)^n u^{(n)}(t) \leq \psi(t, |u(t)|, \ldots, |u^{(n-1)}(t)|) \tag{2.14}$$

при $t_0 \leq t < b$.

Ввиду монотонности $u^{(n-1)}$ имеем

$$|u^{(i)}(t)| = \frac{1}{(n-i-2)!}\int_t^b (\tau - t)^{n-i-2}|u^{(n-1)}(\tau)|\, d\tau \leq$$
$$\leq \frac{(b-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}|u^{(n-1)}(t)|$$

при $t_0 \leq t < b$ $(i = 0, \ldots, n-2)$.

Поэтому в силу монотонности ψ из (2.14) находим

$$|u^{(n-1)}(t)|' \geqslant -\psi\left(t, \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}|u^{(n-1)}(t)|, \ldots, (b-t)|u^{(n-1)}(t)|, |u^{(n-1)}(t)|\right)$$

при $t_0 \leq t < b$.

Справедливость оценки (2.13) теперь следует из леммы 1.2. Теорема доказана.

Следствие. Пусть для некоторых $t_0 \in [a, b[$ и $r > 0$ на множестве $\Lambda_n(t_0, b; r)$ соблюдается неравенство

$$(-1)^n f(t, x_1, \ldots x_n) \leq q(t)|x_1|^{\lambda_1} \ldots |x_n|^{\lambda_n},$$

где

$$\lambda_i \geqslant 0 \ (i = 1, \dots, n), \quad 0 < \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 1, \quad q \in L_{loc}([t_0, b[; R_+)$$

и

$$0 < \beta(t) \equiv \int_t^b (b - \tau)^{(n-1)\lambda_1 + (n-2)\lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}} q(\tau) \, d\tau < +\infty$$

при $t_0 \leq t < b$.

Тогда для любого решения u задачи (0.1), (0.2) вблизи b имеем

$$|u^{(n-1)}(t)| \leq C_1 [\beta(t)]^{\frac{1}{1-\lambda}},$$

где

$$C_1 = [(1 - \lambda)[(n-1)!]^{-\lambda_1} [(n-2)!]^{-\lambda_2} \dots 2^{-\lambda_{n-2}}]^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Пусть функция φ: $[t_0, b[\times R_+^n \to R$ непрерывна по последним n аргументам. Положим

$$\varphi_n(t, x) = \left[\frac{1}{(n-2)!} \int_0^x (x - y)^{n-2} \varphi(t, (b-t)^{n-1} y, \dots, (b-t) y, y) \, dy \right]^{\frac{1}{n}} \quad (2.15)$$

если $n > 1$,

$$\varphi_1(t, x) = \varphi(t, x)$$

при $t_0 \leq t < b, \ x \geqslant 0$.

Теорема 2.3. Пусть для некоторых $t_0 \in [a, b[$ и $r > 0$ на множестве $\Lambda_n(t_0, b; r)$ соблюдается неравенство

$$(-1)^n f(t, x_1, \dots, x_n) \geqslant \varphi(t, |x_1|, \dots, |x_n|), \quad (2.16)$$

где $\varphi \in \mathscr{K}_{loc}([t_0, b[\times R_+^n; R_+)$ не убывает по последним n аргументам, $\varphi(t, x, \dots, x) > 0$ при $t_0 \leq t < b, \ x > 0$, для любых $x_i \geqslant 0 \ (i = 1, \dots, n)$ функция

$$t \mapsto (b-t)^{n+1} \varphi(t, (b-t)^{n-1} x_1, (b-t)^{n-3} x_2, \dots, (b-t)^{3-n} x_{n-1}, (b-t)^{1-n} x_n)$$

не возрастает на $[t_0, b[$ и

$$\Phi(t, x) \equiv \int_0^x \frac{dy}{\varphi_n(t, y)} < +\infty \quad (2.17)$$

при $t_0 \leq t < b, \ x \geqslant 0$,

где функция φ_n определена равенством (2.15). Тогда для разрешимости задачи (0.1), (0.2) необходимо, чтобы

$$\lim_{t \to b-} \gamma(t) = 0, \quad (2.18)$$

где

$$\gamma(t) = \sup\left\{\phi^{-1}\left(\tau, (b-\tau)^{\frac{1}{n}}\frac{\tau - t}{b-t}\right):\ t \leq \tau < b\right\},$$

а $\phi^{-1}(t,\ \cdot)$, $t \in [t_0, b[$, — функция, обратная к $\Phi(t,\ \cdot)$. Более того, для любого решения u задачи (0.1), (0.2) вблизи b имеем

$$u(t) \geqslant (b-t)^{n-1}\gamma(t). \tag{2.19}$$

Доказательство. Пусть задача (0.1), (0.2) имеет решение u: $[a_0, b[\to R$. Тогда согласно лемме 1.1, а также (2.11), функция $v \in \tilde{C}^{n-1}_{loc}([\alpha_0, +\infty[; R)$, где $\alpha_0 = (b-a_0)^{-1}$, определенная равенством (1.1) является решением уравнения

$$v^{(n)} = \bar{f}(s, v, v', \ldots, v^{(n-1)}),$$

удовлетворяющим условиям

$$(-1)^i v^{(i)}(s) > 0$$

при

$$s \geqslant \alpha_0 \ (i = 0, \ldots, n-1), \quad \lim_{s \to +\infty} v(s) = 0,$$

где

$$\bar{f}(s, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{s^{n+1}} f\left(b - \frac{1}{s},\ \delta_1(s, x_1), \ldots, \delta_n(s, x_1, \ldots, x_n)\right),$$

а

$$\delta_i(s, x_1, \ldots, x_i) = (-1)^{i-1}s^{i-n}\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j-1}s^{j-1}\gamma_{n,i-1,j-1}x_j \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Легко видеть, что если $s \geqslant \alpha_0$, $0 \leq (-1)^{j-1}s^{j-1}x_j \leq r\gamma^{-1}$ $(j = 1, \ldots, i)$, где $\gamma = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\sum\limits_{j=1}^{i}\gamma_{n,i-1,j-1}$, то $0 \leq (-1)^{i-1}\delta_i(s, x_1, \ldots, x_i) \leq rs^{i-n}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Кроме того, для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $|\delta_i(s, x_1, \ldots, x_i)| \geqslant s^{2i-n-1}|x_i|$ при $s \geqslant \alpha_0$, $(-1)^{j-1}x_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, i)$. Поэтому, в силу (2.16) и монотонности φ при $s \geqslant s_0 = (b-t_0)^{-1}$, $0 \leq (-1)^{i-1}s^{i-1}x_i \leq r\gamma^{-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ соблюдается неравенство

$$\bar{f}(s, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \bar{\varphi}(s, |x_1|, \ldots, |x_n|),$$

где функция

$$\bar{\varphi}(s, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{s^{n+1}}\varphi\left(b - \frac{1}{s},\ s^{1-n}x_1,\ s^{3-n}x_2, \ldots, s^{n-3}x_{n-1},\ s^{n-1}x_n\right)$$

согласно условию теоремы не возрастает по первому аргументу.

Далее, ввиду (2.17)

$$\bar{\Phi}^{-1}(s, x) \equiv \int_0^x \frac{dy}{\bar{\varphi}_n(s, y)} < +\infty$$

при $s \geqslant s_0$, $x_0 \geqslant 0$, где

$$\bar{\varphi}_n(s, x) = \left[\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-y)^{n-2}\,\bar{\varphi}\left(s, y, \frac{y}{s}, \ldots, \frac{y}{s^{n-1}}\right) dy\right]^{\frac{1}{n}} = \tag{2.20}$$

$$= s^{-\frac{n+1}{n}}\varphi_n\left(b - \frac{1}{s}, x\right)$$

если $n > 1$,

$$\bar{\varphi}_1(s, x) = \bar{\varphi}(s, x) = s^{-2}\varphi_1\left(b - \frac{1}{s}, x\right)$$

при $s \geqslant s_0$, $x \geqslant 0$.

Таким образом, соблюдаются все условия теоремы 4.1 из [1]. Согласно этой теореме

$$\lim_{s \to +\infty} \bar{\gamma}(s) = 0, \tag{2.21}$$

где

$$\bar{\gamma}(s) = \sup\{\bar{\Phi}^{-1}(\xi, \xi - s) : \xi \geqslant s\},$$

и для больших s

$$v(s) \geqslant \bar{\gamma}(s). \tag{2.22}$$

Так как ввиду (2.20) $\bar{\Phi}^{-1}(s, x) = \Phi^{-1}\left(b - \frac{1}{s}, s^{-\frac{n+1}{n}} x\right)$, нетрудно убедиться, что (2.21) эквивалентно (2.18), а (2.22)—(2.19). Теорема доказана.

Следствие. Пусть для некоторых $t_0 \in [a, b[$ и $r > 0$ на множестве $\Lambda_n(t_0, b; r)$ соблюдается неравенство

$$(-1)^n f(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant p(t)\,|x_1|^{\lambda_1} \ldots |x_n|^{\lambda_n},$$

где $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $0 < \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 1$, а $p \in L_{loc}([t_0, b[; R_+)$ и функция

$$t \mapsto (b-t)^{n+1+\lambda_1(n-1)+\lambda_2(n-3)+\ldots+\lambda_{n-1}(3-n)+\lambda_n(1-n)}p(t)$$

положительна и не возрастает на $[t_0, b[$. Тогда для разрешимости задачи (0.1), (0.2) необходимо, чтобы

$$\lim_{t \to b-} (b-t)^{(n-1)\lambda_1 + (n-2)\lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} + 1} p(t) = 0$$

и для любого его решения u вблизи b имеем

$$u(t) \geqslant C_2[(b-t)^{-\lambda(n-1)-1}p_0(t)]^{\frac{1}{1-\lambda}},$$

где

$$p_0(t) = \sup\{(b-\tau)^{(n-1)\lambda_1+(n-2)\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}+1}(\tau-t)^n p(\tau)\colon t \leq \tau < b\},$$

$$C_2 = [n^n(1-\lambda)^{-n}(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1)]^{\frac{1}{\lambda-1}}.$$

3 Пример

Полученные выше результаты проиллюстрируем на примере уравнения

$$u^{(n)} = (-1)^n g(t)\,|u|^{\lambda_1}|u'|^{\lambda_2}\ldots|u^{(n-1)}|^{\lambda_n}, \tag{3.1}$$

где $g \in L_{loc}([a, b[; R_+)$, для некоторых $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\sigma \in R$

$$\mu_1(b-t)^\sigma \leq g(t) \leq \mu_2(b-t)^\sigma \quad \text{при} \quad a \leq t < b \tag{3.2}$$

и

$$\lambda_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \quad 0 < \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 1. \tag{3.3}$$

Из следствий теорем 2.1—2.3 вытекает

Теорема 3.1. Пусть соблюдаются условия (3.2) и (3.3). Тогда для разрешимости задачи (3.1), (0.2) необходимо и достаточно, чтобы $\sigma + \lambda_1(n-1) + \lambda_2(n-2) + \ldots + \lambda_{n-1} + 1 > 0$, и для любого ее решения u вблизи b имеем

$$C_*(b-t)^{\frac{\omega}{1-\lambda}} \leq u(t) \leq C^*(b-t)^{\frac{\omega}{1-\lambda}},$$

где $\omega = \sigma + n - \lambda_2 - \ldots - (n-1)\lambda_n$, а C_* и C^* — положительные постоянные, зависящие только от μ_1, μ_2, n, σ и λ_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Настоящая работа была выполнена во время научной стажировки автора на кафедре математического анализа университета им. Коменского Братиславы. В заключение автор выражает свою искренную благодарность сотрудникам кафедры за оказанное ему гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kvinikadze, G.: On Kneser-type solutions of sublinear ordinary differential equations. Čas. pěst. mat. (to appear).
2. Дьедонне, Ж.: Основы современного анализа. Москва 1964.

3. Квиникадзе, Г. Г.: Некоторые замечания о сингулярных дифференциалных неравенствах. Дифференц. уравнения, XV, № 6, 1979, 980—990.

Адрес автора:

Поступило: 23. 11. 1987

Георгий Квиникадзе
СССР, 380043
Тбилиси
Университетская ул., 2
Институт прикладной математики
им. И. Н. Векуа Тбилисского
государственного университета

SÚHRN

O JEDNEJ SINGULÁRNEJ CAUCHYHO ÚLOHE PRE NELINEÁRNE OBYČAJNÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE

G. KVINIKADZE, Tbilisi

V článku sa študuje úloha (0.1), (0.2), kde n je prirodzené číslo, $-\infty < a < b < +\infty$ a funkcia f: $[a, b[\times R^n \to R$ spĺňa lokálne Carathéodoryho podmienky a (0.3). Sú odvodené postačujúce aj nutné podmienky pre existenciu riešenia a obojstranné apriórne odhady blízko b.

SUMMARY

ON CERTAIN SINGULAR CAUCHY PROBLEM FOR NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

G. KVINIKADZE, Tbilisi

In the paper the problem (0.1), (0.2) is considered where n is a natural number, $-\infty < a < b < +\infty$ and the function f: $[a, b[\times R^n \to R$ satisfies local Carathéodory conditions and (0.3). The sufficient conditions for the solvability of (0.1), (0.2) are given as well as the necessary ones. Two-sided a priori estimates of solutions are obtained near b.