UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LIV—LV—1988

# ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА И УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА—ФРИДМАНА III

ЯН МОЗЕР, Братислава

## Введение

Пусть $\{\gamma\}$ означает последовательность корней уравнения $Z(t) = 0$ и $\{t_0\}$ — последовательность корней уравнения $Z'(t) = 0$, удовлетворяющих условию $\gamma' < t_0 < \gamma''$, (см. [10]—[12]), где $\gamma'$, $\gamma''$ — соседние нули функции $Z(t)$. По гипотезе Римана, члены последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$ отделяют друг друга.

В настоящей работе, в предположении справедливости гипотезы Римана, получена следующая оценка:

$$e^{-A\Omega(t_0)} < \frac{Z(t)}{Z(t_0)} \leqq 1, \quad t \in I(t_0) \subset (\gamma', \gamma''), \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered}
\Omega(t_0) = t_0 \ln^4 t_0 + \ln t_0 . \ln W(t_0), \\
W(t_0) = \max\left\{\frac{2}{\omega(t_0)} t_0 \ln^3 t_0, \frac{2}{m(t_0)}\right\}, \\
I(t_0) = \langle t_0 - \Delta_1(t_0), t_0 + \Delta_2(t_0)\rangle, \\
\Delta_1(t_0) = \{1 - \omega(t_0)\}(t_0 - \gamma'), \Delta_2(t_0) = \{1 - \omega(t_0)\}(\gamma'' - t_0), \\
\omega(t_0) \in (0, 1), m(t_0) = \min\{\gamma'' - t_0, t_0 - \gamma'\},
\end{gathered} \tag{2}$$

($0 < A$ — абсолютная постоянная).

Так как, очевидно,

$$\frac{1}{\gamma'' - \gamma'} \cdot \operatorname{mes}\{(\gamma', \gamma'') \backslash I(t_0)\} = \omega(t_0), \tag{3}$$

то, выбирая $\omega(t_0)$ достаточно малым, можно достигнуть того, чтобы мера множества $(\gamma', \gamma'')\backslash I(t_0)$ была пренебрежимо малой по отношению к длине основного промежутка $(\gamma', \gamma'')$. Итак, оценка (1) действует на существенной части промежутка $(\gamma', \gamma'')$, при достаточно малом $\omega(t_0)$.

При доказательстве оценки (1) основную роль играет оценка

$$\frac{Q(t_0)}{m(t_0)} < t_0 \ln^2 t_0 \ln_2 t_0 \ln_3 t_0; \quad Q(t_0) = \max\{\gamma'' - t_0, t_0 - \gamma'\}, \tag{4}$$

($\ln_2 t_0 = \ln\ln t_0, \ldots$), которую мы получили в работе [17], в предположении справедливости гипотезы Римана. Заметим, что отношение $Q(t_0)/m(t_0)$ характеризует асимметрию положения точки $t_0$ относительно точек $\gamma'$, $\gamma''$, т.е. асимметрию в распределений корней уравнений $Z(t) = 0$, $Z'(t) = 0$.

Оценка (4), в свою очередь, является следствием из формулы

$$\frac{\pi}{4} \sim \sum_{\gamma} \frac{t_0}{\gamma^2 - t_0^2}, \quad t_0 \to \infty,$$

(см. [11]), сопряженной с формулой Римана

$$c + 2 - \ln 4\pi = \sum_{\gamma} \frac{1}{\frac{1}{4} + \gamma^2},$$

$c$ — постоянная Эйлера.

Доказательство оценки (1) помещено в частях 1—4 предлагаемой работы.

В 5-ой части, топологической деформацией графика функции

$$\frac{Z(t)}{Z(t_0)}, \quad t \in \bigcup_{t_0 \in (-\infty, +\infty)} I(t_0),$$

с помощью оценки (1), построена бесконечная система физически несвязанных импульсных решений (Н. И. Р.) уравнений Эйнштейна—Фридмана для сферической геометрии и положительной космологической постоянной. Решение, соответствующее промежутку $I(t_0)$, представляет собой аналог статической Вселенной Эйнштейна, но, с положительным давлением. При этом, $I(t_0)$ входит в физическую область (см. [15], [16]), соответствующую промежутку $(\gamma', \gamma'')$.

Можно считать, что система Н. И. Р. представляет собой бесконечное множество типов коротких эволюций первичного атома Г. Лемэтра, [3]; каждому из промежутков $(\gamma', \gamma'') \subset (-\infty, +\infty)$ соответствует один тип короткой эволюции.

**Замечание 1.** Относительно термина «уравнения Эйнштейна—Фридмана» см. высказывания самого творца теории относительности А. Эйнштейна; например [22], стр. 350, 599.

В 6-ой части вводится гипотеза, согласно которой энтропия $S(t)$ Вселенной, при прохождении через сингулярную точку $t = \gamma$, скачкообразно падает, достигая универсального положительного значения $S_0$:

$$S(\gamma - 0) > S(\gamma + 0) = S_0 > 0.$$

Конечно, сингулярная «точка» является математической абстракцией качественно нового состояния Вселенной. Согласно введенной гипотезе, энергия Вселенной, при прохождении через это состояние, возобновляет свою способность превращаться в полезную работу.

С помощью этой гипотезы, система Н. И. Р. уравнений Эйнштейна—Фридмана, превращается в систему физически связанных импульсных решений (С. И. Р.) этих уравнений.

Можно считать, что система С. И. Р. описывает один тип вечной эволюции первичного атома Г. Лемэтра а именно, осцилляцию первичного атома между двумя состояниями:

(A) состоянием с почти постоянным объемом

$$V \doteq 2\left(\frac{6}{5}\right)^{3/2} \pi^2 \left(\frac{c}{\sqrt{\Lambda}}\right)^3, \tag{5}$$

(c — скорость света в пустоте, $\Lambda$ — космологическая постоянная),

(B) состоянием с почти нулевым объемом.

При этом, чередование состояний первичного атома Г. Лемэтра определяется законом распределения нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)$, т. е. происходит почти случайным образом.

В связи с космологической постоянной $\Lambda$ напомним, что априорное предположение о равенстве нулю $\Lambda$ — члена в уравнениях поля Эйнштейна, нужно считать необоснованным (см. соответствующий обзац в книге акад. В. Л. Гинзбурга [6], стр. 304).

Наконец заметим что, помимо вышеупомянутых обстоятельств, использование терминологии из релятивистской космологии при изучений вопроса о распределении корней уравнений

$$Z(t) = 0, \quad Z'(t) = 0, \quad Z''(t) = 0,$$

(корни уравнения $Z''(t) = 0$ играют роль при определении физической области в случае, когда допускаются отрицательные давления, см. [16]), значительно оживляет соответствующие формулы и оценки.

## 1. Формулы, связанные с логарифмической производной функции $Z(t)$

Напомним, что функция $Z(t)$ определена следующим образом ([18], стр. 94, 383):

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{2}t\ln\pi + \operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}it\right) =$$

$$= \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

В предположении справедливости гипотезы Римана, имеет место основная формула ([11]), (1)):

$$-\frac{d}{dt}\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\} = \sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \neq \gamma. \tag{6}$$

Интегрированием формулы (6) в пределах $t_0$, $t \in I(t_0)$, получается (ср. [12], (7))

**Формула 1.** В предположении справедливости гипотезы Римана:

$$-\frac{Z'(t)}{Z(t)} = (t - t_0)\cdot\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)(t_0-\gamma)} + O\left(\frac{|t-t_0|}{t_0}\right), \tag{7}$$

для $t \in I(t_0)$.

При этом учтено, что бесконечный ряд в (6) равномерно сходится на $I(t_0)$ и $Z'(t_0) = 0$.

Так как

$$(t - t_0)\cdot\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)(t_0-\gamma)} = \sum_{\gamma}\left(\frac{1}{t_0-\gamma} - \frac{1}{t-\gamma}\right),$$

то, интегрированием формулы (7) в пределах $t_0$, $t \in I(t_0)$, получается

**Формула 2.** В предположении справедливости гипотезы Римана:

$$-\ln\frac{Z(t)}{Z(t_0)} = \sum_{\gamma}\left\{\frac{t-t_0}{t_0-\gamma} - \ln\left|\frac{t-\gamma}{t_0-\gamma}\right|\right\} + O\left\{\frac{(t-t_0)^2}{t_0}\right\}, \tag{8}$$

для $t \in I(t_0)$.

## 2. Вспомогательные утверждения

Справедлива

**Лемма 1.**

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2} = O\left\{\frac{\ln t_0}{\omega^2(t_0) m^2(t_0)}\right\}, \quad t \in I(t_0). \tag{9}$$

**Доказательство.** Пусть:

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2} = \sum_{\gamma \leqq \gamma' - 1} + \sum_{\gamma \in (\gamma' - 1,\, \gamma'' + 1)} + \sum_{\gamma'' + 1 \leqq \gamma} \tag{10}$$

Так как (см. (2)),

$$t - \gamma' \geqq t_0 - \Delta_1(t_0) - \gamma' = \omega(t_0)(t_0 - \gamma')$$

и, аналогичным образом,

$$\gamma'' - t \geqq \omega(t_0)(\gamma'' - t_0),$$

то, (см. (2)),

$$|t - \gamma| \geqq \omega(t_0) m(t_0), \quad t \in I(t_0), \quad \gamma \in (\gamma' - 1,\, \gamma'' + 1). \tag{11}$$

Далее напомним, что

$$\sum_{\gamma \in (\gamma' - 1,\, \gamma'' + 1)} 1 = O(\ln t_0). \tag{12}$$

Теперь, в силу (11), (12):

$$\sum_{\gamma \in (\gamma' - 1,\, \gamma'' + 1)} \frac{1}{(t-\gamma)^2} = O\left\{\frac{\ln t_0}{\omega^2(t_0) m^2(t_0)}\right\}, \quad t \in I(t_0). \tag{13}$$

Так как

$$|t - \gamma| = \gamma - t > \gamma - \gamma'', \quad t \in I(t_0), \quad \gamma'' + 1 \leqq \gamma,$$

то, (см. (12), ср. [18], стр. 216):

$$\sum_{\gamma'' + 1 \leqq \gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2} < \sum_{\gamma'' + 1 \leqq \gamma} \frac{1}{(\gamma - \gamma'')^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma'' + n \leqq \gamma < \gamma'' + n + 1} \frac{1}{(\gamma - \gamma'')^2} < A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\gamma'' + n)}{n^2} =$$

$$= A \sum_{n \leqq \gamma''} \frac{\ln 2\gamma''}{n^2} + A \sum_{\gamma'' < n} \frac{\ln 2n}{n^2} < A \ln t_0, \quad t \in I(t_0). \tag{14}$$

Аналогичным образом получается оценка

$$\sum_{\gamma \leqq \gamma' - 1} \frac{1}{(t-\gamma)^2} < A \ln t_0, \quad t \in I(t_0). \tag{15}$$

Теперь, из (10), в силу (13)—(15), следует (9).

Справедлива

**Лемма 2.** По гипотезе Римана,

$$\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 = O\left\{\frac{\ln^2 t_0}{\omega^4(t_0) m^4(t_0) (\ln\ln t_0)^2}\right\}, \quad t \in I(t_0). \tag{16}$$

**Доказательство.** Прежде всего, в силу (9),

$$\left|\sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)(t_0-\gamma)}\right| \leqq \left\{\sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2}\right\}^{1/2} \cdot \left\{\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^{1/2} <$$

$$< A \frac{\ln t_0}{\omega^2(t_0) m^2(t_0)}, \quad t \in I(t_0).$$

Далее, по оценке Литтлвуда ([4], стр. 237),

$$\gamma'' - \gamma' < \frac{A}{\ln\ln \gamma'}, \tag{17}$$

(справедливой по гипотезе Римана), имеем

$$|t - t_0| < \gamma'' - \gamma' < \frac{A}{\ln\ln t_0}, \; t \in I(t_0).$$

Теперь, в силу (7), получаем оценку:

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = O\left\{\frac{\ln t_0}{\omega^2(t_0) m^2(t_0) (\ln\ln t_0)^2}\right\}, \quad t \in I(t_0),$$

о отсюда следует (16). Доказательство Леммы 2 закончено.

Так как $\omega(t_0) \in (0, 1)$ и $m(t_0) \in (0, 1)$ для достаточно больших $t_0 > 0$, (см. (17)), то из Леммы 1 и 2 получаем

**Следствие 1.** По гипотезе Римана,

$$\sum_\gamma \frac{1}{(\gamma - t)^2}, \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 = O\left\{\frac{\ln^2(t_0)}{\omega^4(t_0) m^4(t_0)}\right\}, \; t \in I(t_0). \tag{18}$$

## 3. Влияние ослабленной гипотезы Мертенса на оценку (18)

Пусть

$$M(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n),$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса. Предположение о справедливости оценки

$$\int_1^x \left\{\frac{M(t)}{t}\right\}^2 \mathrm{d}t < A \ln x,$$

называется ослабленной гипотезой Мертенса, ([18], стр. 374). Напомним, что из ослабленной гипотезы Мертенса следует:

(A) гипотеза Римана,

(B) утверждение, что все нули $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma$ функции $\zeta(s)$, $s = \sigma + \mathrm{i}t$, являются простыми.

В работе [14] мы показали, что, по ослабленной гипотезе Мертенса, справедлива оценка:

$$m(t_0) > \frac{A}{\exp\left(A \dfrac{\ln^2 t_0}{\ln\ln t_0}\right)} = A t_0^{-A \frac{\ln t_0}{\ln\ln t_0}}. \tag{19}$$

Теперь, из (18), в силу (19), получаем

**Следствие 2.** По ослабленной гипотезе Мертенса,

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2}, \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 = O\left\{\frac{1}{\omega^4(t_0)} \cdot t_0^{A \frac{\ln t_0}{\ln\ln t_0}}\right\}, \quad t \in I(t_0).$$

## 4. Доказательство основной оценки (1).

Имеет место

**Теорема.** По гипотезе Римана:

$$\mathrm{e}^{-A\Omega(t_0)} < \frac{Z(t)}{Z(t_0)} \leqq 1, \quad t \in I(t_0), \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(t_0) &= t_0 \ln^4 t_0 + \ln t_0 . \ln W(t_0), \\ W(t_0) &= \max\left\{\frac{2}{\omega(t_0)} t_0 \ln^3 t_0, \frac{2}{m(t_0)}\right\}, \end{aligned} \tag{21}$$

(относительно $\omega(t_0)$, $m(t_0)$ см. (2), $0 < A$ — абсолютная постоянная).

**Доказательство.** Пусть

$$\sum_{\gamma}\left\{\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}-\ln\left|\frac{t-\gamma}{t_0-\gamma}\right|\right\}=\sum_{\gamma\leqq\gamma'-1}+\sum_{\gamma''+1\leqq\gamma}+\sum_{\gamma\in(\gamma'-1,\,\gamma''+1)}. \tag{22}$$

(A) Если $\gamma\leqq\gamma'-1$, то для $t\in I(t_0)$, в силу оценки Литтлвуда (17), имеем

$$\left|\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}\right|\leqq\frac{|t-t_0|}{t_0-\gamma'+1}<\gamma''-\gamma'<\frac{A}{\ln\ln t_0}. \tag{23}$$

Далее,

$$\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}-\ln\left|\frac{t-\gamma}{t_0-\gamma}\right|=\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}-\ln\left(1+\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}\right)=$$

$$=\left(\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}\right)^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+2}\left(\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}\right)^k, \tag{24}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+2}\left(\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}\right)^k=\frac{1}{2}+O\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}\right|^k\right\}=\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\ln\ln t_0}\right). \tag{25}$$

Следовательно,

$$\sum_{\gamma\leqq\gamma'-1}\left\{\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}-\ln\left|\frac{t-\gamma}{t_0-\gamma}\right|\right\}=$$

$$=(t-t_0)^2\cdot\sum_{\gamma\leqq\gamma'-1}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\left\{\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\ln\ln t_0}\right)\right\},$$

и, отсюда, (см. (15), (17)):

$$0\leqq\sum_{\gamma\leqq\gamma'-1}\left\{\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}-\ln\left|\frac{t-\gamma}{t_0-\gamma}\right|\right\}<A\frac{\ln t_0}{(\ln\ln t_0)^2},\quad t\in I(t_0). \tag{26}$$

(B) Если $\gamma''+1\leqq\gamma$, то для $t\in I(t_0)$, (ср. (23)),

$$\left|\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}\right|\leqq\frac{|t-t_0|}{1+\gamma''-t_0}<\gamma''-\gamma'<\frac{A}{\ln\ln t_0},$$

и, способом (24)—(26), получаем оценку:

$$0\leqq\sum_{\gamma''+1\leqq\gamma}\left\{\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}-\ln\left|\frac{t-\gamma}{t_0-\gamma}\right|\right\}<A\frac{\ln t_0}{(\ln\ln t_0)^2},\quad t\in I(t_0). \tag{27}$$

(C) Пусть $\gamma \in (\gamma' - 1, \gamma'' + 1)$, $t \in I(t_0)$ и

$$V = \sum_{\gamma \in (\gamma' - 1, \gamma'' + 1)} \left\{ \frac{t - t_0}{t_0 - \gamma} - \ln \left| \frac{t - \gamma}{t_0 - \gamma} \right| \right\} =$$

$$= \sum_{\gamma \in (\gamma' - 1, \gamma'' + 1)} \frac{t - t_0}{t_0 - \gamma} + \sum_{\gamma \in (\gamma' - 1, \gamma'' + 1)} \ln \left| \frac{t_0 - \gamma}{t - \gamma} \right| = V_1 + V_2. \quad (28)$$

Так как

$$\left| \frac{t - t_0}{t_0 - \gamma} \right| \leqq \frac{Q(t_0)}{m(t_0)}, \quad t \in I(t_0), \quad \gamma \in (\gamma' - 1, \gamma'' + 1),$$

то, (см. (4), (12), (28)),

$$|V_1| \leqq \sum_{\gamma \in (\gamma' - 1, \gamma'' + 1)} \left| \frac{t - t_0}{t_0 - \gamma} \right| < A \ln t_0 \,.\, t_0 \ln^3 t_0 = A t_0 \ln^4 t_0 \,. \quad (29)$$

В силу (11), используя в надлежащем месте оценку (4), получаем:

$$\left| \frac{t_0 - \gamma}{t - \gamma} \right| = \left| 1 + \frac{t_0 - t}{t - \gamma} \right| \leqq 1 + \frac{|t - t_0|}{|t - \gamma|} < 1 + \frac{Q(t_0)}{\omega(t_0) m(t_0)} <$$

$$< \frac{2}{\omega(t_0)} \cdot \frac{Q(t_0)}{m(t_0)} < \frac{2}{\omega(t_0)} t_0 \ln^3 t_0 \,. \quad (30)$$

Так как далее, (см. (2), (17)):

$$|t_0 - \gamma| \geqq m(t_0), \quad \gamma \in (\gamma' - 1, \gamma'' + 1),$$

$$|t - \gamma| = \gamma - t < \gamma'' + 1 - \gamma' = \gamma'' - \gamma' + 1 < 2, \quad \gamma \in \langle \gamma'', \gamma'' + 1), \quad (31)$$

$$|t - \gamma| = t - \gamma < \gamma'' - \gamma' + 1 < 2, \quad \gamma \in (\gamma' - 1, \gamma' \rangle,$$

то, (см. (30), (31)),

$$\frac{1}{2} m(t_0) < \left| \frac{t_0 - \gamma}{t - \gamma} \right| < \frac{2}{\omega(t_0)} t_0 \ln^3 t_0 \,.$$

Следовательно,

$$- \ln \frac{2}{m(t_0)} < \ln \left| \frac{t_0 - \gamma}{t - \gamma} \right| < \ln \left\{ \frac{2}{\omega(t_0)} t_0 \ln^3 t_0 \right\},$$

(конечно, $m(t_0) \in (0, 1)$ при достаточно больших $t_0$), и, (см. (21)):

$$\left| \ln \left| \frac{t_0 - \gamma}{t - \gamma} \right| \right| < \ln W(t_0), \quad t \in I(t_0), \quad \gamma \in (\gamma' - 1, \gamma'' + 1). \quad (32)$$

Далее, (см. (12), (28), (32)).

$$|V_2| \leqq \sum_{\gamma \in (\gamma' - 1,\, \gamma'' + 1)} \left| \ln \left| \frac{t_0 - \gamma}{t - \gamma} \right| \right| < A \ln t_0 \,.\, \ln W(t_0). \tag{33}$$

Теперь, (см. (28), (29), (33)),

$$V_1 + V_2 \leqq |V_1| + |V_2| < A t_0 \ln^4 t_0 + A \ln t_0 \,.\, \ln W(t_0), \tag{34}$$

и, очевидно,

$$V_1 + V_2 > -A t_0 \ln^4 t_0 - A \ln t_0 \,.\, \ln W(t_0). \tag{35}$$

Наконец, из (8) в силу (22), (26), (27), (34), (35), следует оценка (20). Доказательство Теоремы закончено.

**Замечание 2.** По ослабленной гипотезе Мертенса, в силу (19), получаем следующее уточнение второго соотношения в (21):

$$W(t_0) = \max \left\{ \frac{2}{\omega(t_0)} t_0 \ln^3 t_0,\ A t_0^{A \frac{\ln t_0}{\ln \ln t_0}} \right\}.$$

Далее определим последовательность $\{\alpha(t_0)\}$ для достаточно больших $t_0 > 0$ таким образом, чтобы члены этой последовательности удовлетворяли условию

$$0 < \alpha(t_0) \leqq \frac{\omega^4(t_0) m^4(t_0)}{t_0 \Omega(t_0)} < 1. \tag{36}$$

Очевидно, (см. (21)),

$$\lim_{t_0 \to \infty} \alpha(t_0) = 0.$$

Теперь, из (20), в силу (36), получаем неравенства:

$$1 + O\left(\frac{1}{t_0}\right) < \left\{ \frac{Z(t)}{Z(t_0)} \right\}^{\alpha(t_0)} \leqq 1, \quad t \in I(t_0).$$

Значит, из Теоремы получаем асимптотическое соотношение. А именно, справедливо

Следствие 3. По гипотезе Римана,

$$\left\{ \frac{Z(t)}{Z(t_0)} \right\}^{\alpha(t_0)} = 1 + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \quad t \in I(t_0). \tag{37}$$

**Замечание 3.** Асимптотическое соотношение (37) дает нужную для нас топологическую деформацию графика функции

$$\frac{Z(t)}{Z(t_0)}, \quad t \in I(t_0)$$

для $t_0 > K > 0$, где $K$ достаточно большое число.

Отметим еще, что из (18), в силу (36), получается

**Следствие 4.** По гипотезе Римана,

$$\alpha(t_0) \cdot \sum_\gamma \frac{1}{(\gamma - t)^2}, \quad \alpha^2(t_0) \cdot \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 = O\left(\frac{1}{t_0}\right), \quad t \in I(t_0). \tag{38}$$

## 5. Бесконечное множество типов коротких эволюций первичного атома Г. Лемэтра (система Н. И. Р.)

(A) Подставляя в основные уравнения релятивистской космологии (см. например, [9], стр. 209),

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa c^2}{3} \varrho(t) &= \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{R^2} - \frac{\Lambda}{3}, \\ \varkappa p(t) &= -2\frac{R''}{R} - \left(\frac{R'}{R}\right)^2 - \frac{c^2}{R^2} + \Lambda, \end{aligned} \tag{39}$$

для случая сферической геометрии и положительной космологической постоянной $\Lambda$, вместо $R$ выражение

$$R = R(t) = \sqrt{\frac{6}{5}} \cdot \frac{c}{\sqrt{\Lambda}} \cdot \left\{\frac{Z(t)}{Z(t_0)}\right\}^{\alpha(t_0)}, \quad t \in I(t_0), \tag{40}$$

получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa c^2}{3} \varrho(t) &= \frac{5}{6}\Lambda\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^{2\alpha(t_0)} - \frac{\Lambda}{3} + \alpha^2(t_0) \cdot \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2, \\ \varkappa p(t) &= \Lambda - \frac{5}{6}\Lambda\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^{2\alpha(t_0)} + 2\alpha(t_0) \cdot \sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} - \\ &\quad - 3\alpha^2(t_0) \cdot \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \quad t \in I(t_0), \end{aligned} \tag{41}$$

(в надлежащем месте мы использовали основное соотношение (6)). Далее, из (40), (41), в силу (37) и оценок (38), получаем:

$$\left.\begin{aligned}
R = R(t) &= \sqrt{\frac{6}{5}} \cdot \frac{c}{\sqrt{\Lambda}} + O\left(\frac{1}{t_0}\right),\\
\frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t) &= \frac{1}{2}\Lambda + O\left(\frac{1}{t_0}\right),\\
\varkappa p(t) &= \frac{1}{6}\Lambda + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \quad t \in I(t_0).
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

**Замечание 4.** Тройку почти постоянных функций (42), при любом но фиксированном $t_0 > K > 0$, ($K$ — достаточно большое число), назовем импульсным решением (И. Р.) уравнений Эйнштейна—Фридмана (39).

Напомним, что объем $V$ сферической Вселенной, соответствующий радиусу $R(t)$, равен

$$V = 2\pi^2 R^3(t),$$

(ср. [9], стр. 213). Отсюда, в силу (42), следует формула (5).

**(В)** Из (42) следует соотношение

$$E(t) = \frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t) - \varkappa p(t) = \frac{1}{3}\Lambda + O\left(\frac{1}{t_0}\right). \tag{43}$$

Ф и з и ч е с к у ю  о б л а с т ь $F(t_0)$ решения уравнений Эйнштейна—Фридмана (39) в промежутке $(\gamma', \gamma'')$, мы определим следующим образом (см. [15], [16]):

$$F(t_0) = \{t\colon p(t) \geqq 0,\ E(t) \geqq 0,\ t \in (\gamma', \gamma'')\}. \tag{44}$$

Определение (44) опирается на общее свойство тензора энергии-импульса макроскопического тела и электромагнитного поля, ср. [8], стр. 107, (34.2), стр. 110, (35.5), (35.6).

**Замечание 5.** Из (42)—(44) следует, что

$$I(t_0) \subset F(t_0), \quad t_0 > K > 0. \tag{45}$$

Из (39), (40), аналогично случаю [15], (19), (20), получаем соотношения:

$$R(\gamma') = R(\gamma'') = 0, \quad p(\gamma' + 0) = p(\gamma'' - 0) = -\infty. \tag{46}$$

Следовательно, делаем

**Замечание 6.** В силу (46), некоторая правая окрестность точки $\gamma'$ и некоторая левая окрестность точки $\gamma''$ не входят в физическую область $F(t_0)$. Точки $t = \gamma$ естественно назвать сингулярными точками.

**(С)** В пункте (А) мы построили бесконечную систему И. Р., которую естественно назвать системой физически несвязанных импульсных решений (Н. И. Р.) уравнений Эйнштейна—Фридмана (39) на множестве

$$\bigcup_{K < t_0} I(t_0).$$

(Ca) Напомним, что функция $Z(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ является четной функцией, (ср. [18], стр. 23, 94). Далее, последовательность $\{\alpha(t_0)\}$ продолжим на множество $t_0 < -K < 0$ четным образом:

$$\alpha(t_0) = \alpha(-t_0), \quad t_0 < -K < 0.$$

После этих замечаний становится очевидным, что мы построили систему Н. И. Р. на множестве

$$\bigcup_{t_0 \in (-\infty, -K) \cup (K, +\infty)} I(t_0).$$

(Cb) Теперь мы определим последовательности $\{\omega(t_0)\}$, $\{\alpha(t_0)\}$ для конечного количества значений

$$t_0 \in (0, K\rangle. \tag{47}$$

Заметим, что выбором $\omega(t_0)$ определяется соответствующий промежуток $I(t_0)$, $t_0 \in (0, K\rangle$, а выбором $\alpha(t_0)$ — нужная топологическая деформация графика функции

$$\frac{Z(t)}{Z(t_0)}, \quad t \in I(t_0), \quad t_0 \in (0, K\rangle.$$

Нам нужно получить аналоги соотношений (37), (38), действующие на промежутке $I(t_0)$ — существенной части промежутка $(\gamma', \gamma'')$, (ср. (3)). Выбирая значения $\omega(t_0)$, $\alpha(t_0) \in (0, 1)$ достаточно малыми, мы удовлетворим всем этим требованиям и, на соответствующем множестве

$$\bigcup_{t_0 \in (0, K\rangle} I(t_0),$$

получим конечную систему Н. И. Р. типа (42).

(Cc) Далее, четным продолжением системы Н. И. Р. из (Cb) на значения $t_0 \in \langle -K, 0)$ мы получаем конечную систему Н. И. Р. на множестве

$$\bigcup_{t_0 \in \langle -K, 0) \cup (0, K\rangle} I(t_0). \tag{48}$$

(Cd) Обратим теперь внимание на точку $t = 0$, (см. (47), (48)). Так как $Z(0) \neq 0$ и, в силу четности и бесконечной дифференцируемости функции $Z(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, имеет место $Z'(0) = 0$, то $0 \in \{t_0\}$. Следовательно, как в (Cb), подходящим выбором $\omega(0)$, $\alpha(0)$ построим промежуток $I(0)$ и на нем — соответствующее И. Р.

(Ce) После сказанного в пунктах (Ca)—(Cd) ми делаем **замечание 7**. Мы построили систему Н. И. Р. уравнений Эйнштейна—Фридмана (39) на множестве

$$\bigcup_{t_0 \in (-\infty, +\infty)} I(t_0).$$

**Замечание 8.** Система Н. И. Р. представляет собой временно симметричное (относительно точки $t = 0$) решение уравнений Эйнштейна—Фридмана (39), (отметим аналогию с временно симметричными гравитационными волнами, ср. [20], стр. 104).

(D) Напомним, что А. Эйнштейн, первоначально построил модель замкнутой статической Вселенной, которая определяется следующими соотношениями ([21], стр. 611):

$$R(t) = \frac{c}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \varkappa c^2 \varrho(t) = 2\Lambda, \quad p(t) = 0, \quad t \in (-\infty, +\infty). \tag{49}$$

Сравнение соотношений (42), (49) приводит нас к следующему замечанию.

**Замечание 9.** Соотношения (42) обобщают замкнутую модель Вселенной Эйнштейна на промежутке $I(t_0)$; включено положительное давление $p(t)$, удовлетворяющее условию (44).

Однако, Эддингтон доказал (см. [1]), что статическая Вселенная Эйнштейна неустойчива. Именно, при малых изменениях $\varrho$, радиус Вселенной $R$ начнет уменьшаться или возрастать к бесконечности.

**Замечание 10.** Имея в виду факт неустойчивости Вселенной Эйнштейна, мы априорно задали распределение сингулярных точек — это нули $t = \gamma$ функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)$ — и на соответствующем множестве

$$\bigcup_{t_0 \in (-\infty, +\infty)} I(t_0)$$

построили систему Н. И. Р.

(E) Напомним, далее, что $I(t_0) \subset (\gamma', \gamma'')$ и величина $\gamma'' - \gamma'$, т.е. разность ординат соседних нулей

$$\frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma', \quad \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma''$$

дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s = \sigma + \mathrm{i}t$, совершает весьма сложные колебания в окрестности значения

$$\frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}},$$

для $(\gamma', \gamma'') \subset \langle T, \quad T+H\rangle, \quad T>0,\ H=H(T)=O(T),$ где (ср. [13], (42))

$$t_{\nu+1}-t_\nu \sim \frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}, \quad t_\nu,\ t_{\nu+1}\in\langle T,\ T+H\rangle$$

и $\{t_\nu\}$ есть последовательность, определенная соотношением

$$\vartheta(t_\nu)=\pi\nu, \quad \nu=1, 2, \dots .$$

Свойства последовательностей $\{t_\nu\}$, $\{Z(t_\nu)\}$ впервые начал изучать Е. К. Титчмарш (см. [5]).

Еще отметим, что для $\gamma''-\gamma'$ существует, по гипотезе Римана, оценка сверху — это оценка Литтлвуда (см. (17)):

$$\gamma''-\gamma' < \frac{A}{\ln\ln\gamma'},$$

и оценка снизу, справедливая по ослабленной гипотезе Мертенса:

$$\gamma''-\gamma' > \frac{1}{\gamma'}\exp\left(-A\frac{\ln\gamma'}{\ln\ln\gamma'}\right),$$

([18], стр. 379).

Пример сложного поведения величины $\gamma''-\gamma'$ можно найти на графике функции $Z(t)$ в окрестности первой пары нулей Лемера ([2], стр. 296).

**Замечание 11.** В силу вышесказанного можно считать, что последовательность $\{\gamma\}$, $\gamma>0$ распределена почти случайным образом относительно членов последовательности $\{t_\nu\}$, $t_\nu>0$. Именно почти случайность распределения последовательности $\{\gamma\}$ является аргументом в пользу выбора точек $t=\gamma$ в качестве сингулярных точек, (см. Замечание 6).

Наконец, сказанное в пунктах (A)—(E) приводит нас к следующей интерпретации Н. И. Р.

**Замечание 12.** Система Н. И. Р., соответствующая множеству

$$\bigcup_{t_0\in(-\infty,+\infty)} I(t_0),$$

представляет собой бесконечное множество типов коротких эволюций первичного атома Г. Лемэтра, [3].

## 6. Энтропия Вселенной и один тип вечной эволюции первичного атома Г. Лемэтра (система С. И. Р.)

Вопрос о возможности превратить систему Н. И. Р. в систему физически связанных импульсных решений (С. И. Р.), тесно связан с вопросом о поведении энтропии Вселенной $S(t)$ при прохождении Вселенной через сингулярную точку.

В нашем случае сингулярными точками являются нули $t = \gamma$ функции $Z(t)$, (см. Замечания 6, 10). Обычно принимается

**Гипотеза 1.**

$$S(\gamma - 0) \leqq S(\gamma + 0), \tag{50}$$

т.е. при прохождении через сингулярную точку, энтропия Вселенной не уменьшается.

В этом направлении см. книгу Толмена [19], стр. 332—336, 433—458, особенно стр. 454—458, (изложение ведется на основе варианта релятивистской термодинамики), ср. также [7], стр. 699—704, (где, однако, изложение ведется на основе классической термодинамики). В обоих случаях соответствующие выкладки проделаны лишь для частного значения $\Lambda = 0$.

Мы примем вместо (50) следующее математическое предположение.

**Гипотеза 2.**

$$S(\gamma - 0) > S(\gamma + 0) = S_0 > 0, \quad \gamma \in (-\infty, +\infty), \tag{51}$$

т.е. при прохождении через сингулярную точку, антропия Вселенной скачкообразно падает, достигая универсального положительного значения $S_0$.

**Замечание 13.** По Гипотезе 2, энергия Вселенной при прохождении через сингулярную точку, возобновляет свою способность превращаться в полезную работу.

Далее мы позволим себе процитировать мнение А. Эйнштейна по поводу сингулярной точки ([22], стр. 611, 612):

*«При больших плотностях поля и вещества уравнения поля и даже входящие в них переменные должны терять смысл. Поэтому мы не можем предположить, что уравнения поля остаются справедливыми при больших плотностях поля остаются справедливыми при больших плотностях поля и материи, и не можем заключить, что «начало расширения» должно означать сингулярность в математическом смысле. Поэтому мы должны иметь в виду, что, может быть, и нельзя распространять уравнения на такие области.»*

После этого мы отметим, что:

(A) сингулярная «точка» является лишь математической абстракцией для качественно нового состояния Вселенной, которое достигается в результате колоссального космологического коллапса,

(B) это качественно новое состояние не входит в физическую область (ср. Замечание 6).

В силу (A), (B), математическая гипотеза (51) не является совершенно необоснованной и с физической точки зрения.

**Замечание 14.** По гипотезе (51), система Н. И. Р. уравнений Эйнштейна —Фридмана (39), превращается в систему С. И. Р.

Сказанное в 6-ой части приводит нас к следующей интерпретации С. И. Р.

**Замечание 15.** Система С. И. Р., соответствующая множеству

$$\bigcup_{t_0\in(-\infty,\ +\infty)} I(t_0),$$

представляет собой один тип вечной (т. е. для $t\in(-\infty,\ +\infty)$) эволюции первичного атома Г. Лемэтра, а именно, осцилляцию первичного атома между состоянием с почти постоянным объемом (5) и состоянием с почти нулевым объемом. При этом, чередование состояний первичного атома определяется законом распределения нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$, т. е. происходит почти случайным образом (см. Замечание 11).

ЛИТЕРАТУРА


1. Eddington, A. S.: On the instability of Einstein's spherical world, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 90 (1930), 668.
2. Lehmer, D. H.: On the roots of the Riemann zeta-function, Acta Math., 95 (1956), 291—298.
3. Lemaitre, G.: L'atome primitive, Genewa 1948.
4. Littlewood, J. E.: Two notes on the Riemann zeta-function, Proc. Cambr. Phil. Soc., 22 (1924), 234—242.
5. Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, IV, Quart, J. Math. 5 (1934), 98—105.
6. Гинзбург, В. Л.: О физике и астрофизике, «Наука», Москва 1985.
7. Зельдович, Я. Б.—Новиков, И. Д.: Строение и эволюция Вселенной, «Наука», Москва 1975.
8. Ландау, Л. Д.—Лифшиц, Е. М.: Теория поля, Москва 1962.
9. Мак-Витти, Г.: Общая теория относительности и космология, ИИЛ, Москва 1961.
10. Мозер, Ян: Об одном новом следствии из гипотезы Римана, Acta Arith., 25 (1974), 307—311.
11. Мозер, Ян: Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой, Acta Arith., 26 (1974), 33—39.
12. Мозер, Ян: О точках перегиба функции $Z(t)$, Acta Arith., 28 (1975), 89—99.
13. Мозер, Ян: Об одной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 31—43.

14. Мозер, Ян: О некоторых оценках снизу для расстояний соседних нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, Acta Math. Univ. Comen., 44—45 (1984), 75—80.
15. Мозер, Ян: Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна-Фридмана, Acta Math. Univ. Comen., 44—45 (1984), 115—125.
16. Мозер, Ян: Дзета-функция римана и уравнения Эйнштейна—Фридмана II, Acta Math. Univ. Comen., 52—53 (1987), 49—73.
17. Мозер, Ян: О распределении корней уравнений в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., 52—53 (1987), 7—19.
18. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, ИИЛ, Москва 1953.
19. Толмен, Р.: Относительность термодинамика и космология, «Наука», Москва 1974.
20. Уилер, Дж.: Гравитация нейтрино и Вселенная, ИИЛ, Москва 1962.
21. Эйнштейн, А.: Собрание научных трудов, т. 1., «Наука», Москва 1965.
22. Эйнштейн, А.: Собрание научных трудов, т. 2., «Наука», Москва 1966.

*Адрес автора:*

Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступило: 27. 6. 1986

## SÚHRN

## RIEMANNOVA DZETA-FUNKCIA A EINSTEINOVE-FRIEDMANNOVE ROVNICE III

Ján Moser, Bratislava

Na základe Riemannovej hypotézy je zostrojená istá topologická deformácia grafu funkcie

$$\frac{Z(t)}{Z(t_0)}, \quad t\in(-\infty,\infty),$$

($\{t_0\}$ je postupnosť koreňov rovnice $Z'(t)=0$, pre ktoré $Z(t_0)\neq 0$). Pomocou tejto topologickej deformácie je zostrojený nekonečný systém nezviazaných impulzných riešení (N. I. R.) Einsteinových—Friedmannových rovníc. Systém N. I. R. je interpretovaný ako nekonečná množina typov „krátkych evolúcií" prvotného Lemaitrovho atómu. Istá matematická hypotéza o chovaní sa entropie Vesmíru pri prechode cez singulárny bod $\left(=\text{nulový bod funkcie } \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right)$ prevádza systém N. I. R. na systém zviazaných impulzných riešení (Z. I. R.) Einsteinových—Friedmannových rovníc. Systém Z. I. R. je interpretovaný ako jeden typ večnej (t. j. pre $t\in(-\infty,\infty)$) evolúcie prvotného Lemaitrovho atómu.

## SUMMARY

## RIEMANN ZETA-FUNCTION AND EINSTEIN—FRIEDMANN EQUATIONS III

Ján Moser, Bratislava

On the basis of the Riemann hypothesis a topological deformation of the graph of the function

$$\frac{Z(t)}{Z(t_0)}, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

is constructed ($\{t_0\}$ is a sequence of roots of equation $Z'(t) = 0$ for which $Z(t_0) \neq 0$). By means of the mentioned deformation an infinite set of non bounded impulsive solutions (N. B. I. S.) of Einstein—Friedmann equations is constructed. N. B. I. S. is interpretted as an infinite set of types of "short evolutions" of the primary Lemaitre's atom. Certain mathematical hypothesis on the behaviour of the entropy of the Universe while passing the singular point $\left(= \text{zero point of the function } \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right)$ transform the system N. B. I. S. to the system of bounded impulsive solusolutions (B. I. S.) of Einstein—Friedmann equations. The system B. I. S. is interpretted as a type of everlasting (i.e. for $t \in (-\infty, \infty)$) evolution of the primary Lemaitre's atom.