UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LIV—LV—1988

КУРЬЕЗНАЯ ФОРМУЛА ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА И НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ФОРМУЛОЙ РИМАНА—ЗИГЕЛЯ

ЯН МОЗЕР, Братислава

Введение

Основную роль при доказательстве оценки Харди и Литтлвуда

$$N_0(T+U) - N_0(T) > A(a)U, \tag{1}$$

играла Лемма 18 (см. [1], стр. 305):

$$J = \int_T^{T+U} I^2 \, \mathrm{d}t = \pi\sqrt{2\pi}\, HU + O\left(\frac{U}{\ln T}\right), \tag{2}$$

где

$$I = I(t, H) = \int_t^{t+H} X(u) \, \mathrm{d}u,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4} + i\,\frac{t}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right) = 2\pi^{\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\pi t} \pi^{\frac{1}{2}\mathrm{i}t} X(t),$$

$$T^a < U < T^b, \quad a > \frac{1}{2}, \quad 0 \leqq H \leqq T^c,$$

и $0 < c$ — сколь угодно малое число.

Харди и Литтлвуд заметили (см. [1], стр. 315, пункт 6.1.), что при доказательстве оценки (1) не была использована полная сила формулы (2), (только следующая отсюда оценка сверху для интеграла), и, далее: *«Все, же, полная лемма кажется достаточно интересной и сама по себе, и может оказать услугу в будущем.»* Сказанное является обоснованием для изучения формулы Харди и Литтлвуда (2).

Некоторые следствия из дискретного аналога формулы **(2), автор** изучал в работах [7], [8], [12].

Далее Харди и Литтлвуд заметили следующее (см. [1], **стр.** 317, пункт 6.3.): *«Наконец мы отметим следствие из Леммы 18, которое, хотя мы и не были в состоянии получить ни какой пользы из него, кажется весьма курьезным.»*

Вот эта курьезная формула Харди и Литтлвуда:

$$\int_T^{T+U} I(t, H)I(t+H, K)\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{U}{\ln T}\right), \tag{3}$$

справедливая равномерно для $0 \leqq H \leqq T^c$, $0 \leqq K \leqq T^c$, $c = c(a)$ — достаточно малое число.

В настоящей работе мы будем изучать некоторые следствия из дискретного аналога курьезной формулы Харди и Литтлвуда (3).

План изложения таков:

В I-ой главе доказано основное соотношение

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \Phi[g_\nu(\tau), \varrho_1\omega, M]\Phi[g_\nu(\tau), \varrho_2\omega, M] \sim$$

$$\sim \frac{2}{\pi^2} F(\bar{\varrho}; M) U \ln^2 \frac{T}{2\pi}, \ \bar{\varrho} = \varrho_2 - \varrho_1,$$

где

$$\Phi[g_\nu(\tau), \varrho\omega, M] = \sum_{k=0}^{M} Z[g_\nu(\tau) + (k+\varrho)\omega]$$

и $F(\bar{\varrho}; M)$ — некоторая четная функция переменной $\bar{\varrho}$, (U, M, ϱ_1, ϱ_2 удовлетворяют соответствующим условиям).

Функцию $F(\bar{\varrho}; M)$ естественно назвать автокорреляционной функцией; обоснование этому названию будет дано в последующих главах.

Во II-ой главе изучается поведение автокорреляционной функции $F(\bar{\varrho}; M)$. Доказаны следующие свойства:

(A) Графиком функции $F(\bar{\varrho}; M)$, $\bar{\varrho} \in \langle -M, M \rangle$ является слегка искаженный равнобедренный треугольник с высотой $\sim \pi M$; это — основной «всплеск» автокорреляционной функции.

(B) Для больших значений $|\bar{\varrho}|$ имеет место оценка

$$F(\bar{\varrho}; M) = O\left(\frac{1}{|\bar{\varrho}|}\right),$$

т. е. при больших $|\bar{\varrho}|$, значения $F(\bar{\varrho}; M)$ практически равны нулю.

Заметим, что при доказательстве свойства (A) использована одна формула Кронекера ([14], стр. 173).

Из свойства (B) следует, что существует бесконечное множество таких пар $(\overset{*}{\varrho}_1, \overset{*}{\varrho}_2)$, что

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \Phi[g_\nu(\tau), \overset{*}{\varrho}_1 \omega, M] \,.\, \Phi[g_\nu(\tau), \overset{*}{\varrho}_2 \omega, M] = O\left(\frac{U \ln^2 T}{\sqrt[3]{\ln\ln T}}\right),$$

т. е. мы получаем дискретный аналог курьезной формулы Харди и Литтлвуда (3), для соответствующего подмножества допустимых значений ϱ_1, ϱ_2.

Еще сделаем следующее радиотехническое замечание: Свойства (A), (B), функции $F(\bar{\varrho}; M)$, при достаточно большом M, скажем

$$M \sim (\ln\ln T)^{1/4},$$

соответствует поведению графика автокорреляционной функции широкополосного случайного шума (см. [15], стр. 37, рис. г); поведение автокорреляционной функции, соответствующее узкополосному случайному шуму (см. [15], стр. 37, рис. в), нам встретилось в работах [4], [5], (9), продолжающих работу [3].

В III-ей главе, сначала приведена радиотехническая интерпретация поведения функции $F(\bar{\varrho}; M)$ — эргодичность гипотетической случайной последовательности, для которой измерены значения лишь одной реализации. После этого наводящего соображения действуем так: С помощью формулы Римана—Зигеля определена детерминированная случайная последовательность (на самом деле — однопараметрическая система таких последовательностей). Дано определение асимптотически стационарного и асимптотически эргодического случайных процессов, и, доказана асимптотическая эргодичность построенной случайной последовательности.

С помощью формулы Римана—Зигеля построен также один тип асимптотически гауссовских*) процессов. Отмечена возможная полезность изучения статистических свойств выбросов таких процессов, для изучения аналогичных свойств самой функции $Z(t)$.

Наконец заметим, что настоящая работа продолжает анализ следствий из формулы Римана—Зигеля с помощью дискретного метода, основы которого были заложены Е. К. Титчмаршем в его мемуаре [2].

---

*) Доказана лишь гауссовость одномерного распределения.

I. Основная лемма

1. Формулировка основной леммы

Пусть

$$\vartheta_1(t) = \frac{1}{2} t \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \pi \tag{4}$$

и $g_\nu(\tau)$ означает семейство последовательностей, определенных соотношением ([9], ср. [10]):

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau)] = \frac{1}{2} \pi\nu + \frac{1}{2} \tau, \ \nu = 1, 2, \ldots, \ \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle. \tag{5}$$

Пусть

$$\Phi[g_\nu(\tau), \varrho\omega, M] = \sum_{k=0}^{M} Z[g_\nu(\tau) + (k + \varrho)\omega],$$

$$J = J(\varrho_1, \varrho_2; T, U, M, \tau) = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \Phi[g_\nu(\tau), \varrho_1\omega, M] \,.\, \Phi[g_\nu(\tau), \varrho_2\omega, M], \tag{6}$$

где

$$\omega = \frac{\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}} = \frac{\pi}{2 \ln P}, \ U = \sqrt{T} \ln\ln T,$$

$$\psi \leqq M \leqq (\ln\ln T)^{1/3}, \ |\varrho_1|, |\varrho_2| \leqq \bar{M} = \ln T (\ln\ln T)^{1/3}, \tag{7}$$

и $0 < \psi = \psi(T)$ — функция, сколь угодно медленно возрастающая к ∞ при $T \to \infty$.

Мы покажем, пользуясь формулой Римана—Зигеля ([13], стр. 94)

$$Z(t) = 2 \sum_{n \leqq t_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta - t \ln n) + O(t^{-1/4}), \ t_1 = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \tag{8}$$

где ([13], стр. 383)

$$\vartheta = \vartheta(t) = -\frac{1}{2} t \ln \pi + \operatorname{Im} \ln \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} it\right) =$$

$$= \frac{1}{2} t \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \pi + O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{9}$$

что справедлива следующая

Лемма А.

$$J = \frac{2}{\pi^2} F(\bar{\varrho};\, M) U \ln^2 \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U \ln^2 T}{\sqrt[3]{\ln\ln T}}\right), \tag{10}$$

где $\bar{\varrho} = \varrho_2 - \varrho_1$ и

$$F(\bar{\varrho};\, M) = (M+1)\int_0^{\pi/2} \cos\bar{\varrho}u \, du +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} (M+1-k) \int_0^{\pi/2} \{\cos(k+\bar{\varrho})u + \cos(k-\bar{\varrho})u\}\, du; \tag{11}$$

очевидно

$$F(\bar{\varrho};\, M) = F(-\bar{\varrho};\, M),$$

(O — оценка в (10) имеет место равномерно для ϱ_1, ϱ_2, M, τ в указанных промежутках).

2. Доказательство Леммы А

2.1. Прежде всего, (ср. [7], (118)):

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau) + (k+\varrho)\omega] = \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\tau}{2} + (k+\varrho)\omega \ln P + O\left(\frac{\bar{M}U}{T\ln T}\right).$$

Далее, (см. (4), (7)—(9)),

$$Z(t) = 2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta - t\ln n) + O(T^{-1/4}\ln\ln T) =$$

$$= 2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta_1 - t\ln n) + O(T^{-1/4}\ln\ln T).$$

Следовательно,

$$Z[g_\nu(\tau) + (k+\varrho)\omega] =$$

$$= 2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left\{k\omega\ln\frac{P}{n} + \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\tau}{2} - g_\nu(\tau)\ln n + \varrho\omega\ln\frac{P}{n}\right\} +$$

$$+ O\left(\frac{\bar{M}U}{T^{3/4}\ln T}\right),\ g_\nu \in \langle T,\, T+U\rangle. \tag{12}$$

Отсюда, суммированием по k, получаем (см. (6)):

$$\Phi(\varrho\omega) = \Phi[g_\nu(\tau),\, \varrho\omega,\, M] =$$

$$= \sum_{n<P} A(n,\, M)\cos\alpha(n,\, \nu,\, \varrho) + O\left(\frac{M\bar{M}U}{T^{3/4}\ln T}\right),\ g_\nu \in \langle T,\, T+U\rangle, \tag{13}$$

где

$$A(n, M) = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sin\left\{\frac{1}{2}(M+1)\omega \ln \frac{P}{n}\right\}}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega \ln \frac{P}{n}\right)},$$

$$\alpha(n, \nu, \varrho) = \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\tau}{2} - g_\nu(\tau)\ln n + \varrho\omega \ln \frac{P}{n} + \frac{1}{2}M\omega \ln \frac{P}{n}. \tag{14}$$

Далее

$$\Phi(\varrho_1 \omega) . \Phi(\varrho_2 \omega) = W_1 + W_2 + O\left(\frac{M^2 \bar{M} U}{\sqrt{T}\ln T}\right), \tag{15}$$

где

$$W_1 = \frac{1}{2} \sum_{m,\,n<P}\sum A(m, M)A(n, M)\cos\{2\pi\beta(\nu)\},$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \sum_{m,\,n<P}\sum A(m, M)A(n, M)\cos\{2\pi\gamma(\nu)\}, \tag{16}$$

$$\beta(\nu) = \frac{1}{2\pi}\left\{g_\nu(\tau)\ln\frac{n}{m} + \frac{1}{2}M\omega\ln\frac{n}{m} + \varrho_2\omega\ln\frac{P}{m} - \varrho_1\omega\ln\frac{P}{n}\right\}$$

$$\gamma(\nu) = \frac{1}{2\pi}\left\{\pi\nu - g_\nu(\tau)\ln(mn) + \tau + \frac{1}{2}M\omega\ln\frac{P^2}{mn} + \right.$$

$$\left. + \varrho_2\omega\ln\frac{P}{m} + \varrho_1\omega\ln\frac{P}{n}\right\}.$$

2.2. **В настоящем пункте получим оценку суммы**

$$\sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} W_1(m \neq n) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m,n<P}\sum A(m, M)A(n, M) \cdot \sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} \cos\{2\pi\beta(\nu)\}.$$

Так как (см. (4), (5))

$$\frac{\mathrm{d}g_\nu(\tau)}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\pi}{\ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}},$$

то

$$\beta'(v) = \frac{1}{2\ln\frac{g_v(\tau)}{2\pi}} \ln\frac{n}{m} < \frac{1}{4},\ m < n,\ g_v(\tau) \in \langle T,\ T+U \rangle,$$

$$\beta'(v) > \frac{A}{\ln T} \ln\frac{n}{m},\ \beta''(v) < 0.$$

Следовательно, (см. [13], стр. 78, Лемма 2, стр. 73, Лемма 1),

$$\sum_{T \leqq g_v \leqq T+U} \cos\{2\pi\beta(v)\} = O\left(\frac{\ln T}{\ln\frac{n}{m}}\right), \tag{17}$$

и (см. (14) и [13], стр. 138, соотношение (1)):

$$\sum_{T \leqq g_v \leqq T+U} W_1(m \neq n) = O\left(M^2 \ln T \cdot \sum_{m \neq n < P}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}\left|\ln\frac{n}{m}\right|}\right) =$$

$$= O(M^2 \sqrt{T} \ln^2 T), \tag{18}$$

так как оценка, аналогичная (17), получается и в случае $m > n$.

2.3. В настоящем пункте мы получим оценку суммы

$$\sum_{T \leqq g_v \leqq T+U} W_2.$$

Так как, очевидно,

$$\sum_{T \leqq g_v \leqq T+U} W_2(m = n = 1) = O(1), \tag{19}$$

то достаточно изучить случай $mn \geqq 2$. Далее,

$$\gamma'(v) = \frac{1}{2} - \frac{\ln(mn)}{2\ln\frac{g_v(\tau)}{2\pi}},\ g_v(\tau) \in \langle T,\ T+U \rangle,$$

$$0 < \gamma'(v) < \frac{1}{2},\ \gamma''(v) > 0,\ \gamma'(v) > \frac{1}{2} - \frac{\ln(mn)}{2\ln P^2} =$$

$$= \frac{1}{4\ln P} \ln\frac{P^2}{mn} > \frac{1}{4\ln P} \ln\frac{P}{n},$$

и, отсюда,

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \cos\{2\pi\gamma(\nu)\} = O\left(\frac{\ln T}{\ln \dfrac{P}{n}}\right).$$

Следовательно, (можно предположить, что P — целое, так как такое предположение приводит в (12) к ошибке $O(T^{-1/4})$),

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} W_2(mn \geqq 2) = O(M^2\sqrt{T}\ln^2 T). \tag{20}$$

2.4. В настоящем пункте мы изучим следующую сумму:

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} W_1(m = n).$$

Из (16) следует, что

$$W_1(m = n) = 2\sum_{n<P} \frac{1}{n} G(M+1, \Omega)\cos(\bar{\varrho}\Omega) = 2\sum_{n<P} H(n) = W_3, \tag{21}$$

где

$$G(M+1, \Omega) = \left(\frac{\sin\left\{\dfrac{1}{2}(M+1)\Omega\right\}}{\sin\dfrac{1}{2}\Omega}\right)^2, \ \Omega = \omega\ln\frac{P}{n}, \ \bar{\varrho} = \varrho_2 - \varrho_1. \tag{22}$$

Выражение для суммы W_3 мы получим с помощью формулы Эйлера—Маклорена ([13], стр. 19) для функции $H(x)$, $x \in \langle 1, P\rangle$, доопределенной при $x = P$ по известной формуле

$$G(M+1, \Omega) = M + 1 + 2\sum_{k=1}^{M}(M+1-k)\cos k\Omega. \tag{23}$$

Так как

$$H(1),\ H(P) = O(1),$$

то

$$\sum_{n<P} H(n) = \int_1^P H(x)\,dx + \int_1^P \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)H'(x)\,dx + O(1) =$$

$$= W_4 + W_5 + O(1). \tag{24}$$

Прежде всего,

$$W_4 = \int_1^P G\left(M+1,\, \omega \ln \frac{P}{x}\right) \cos\left(\bar{\varrho}\omega \ln \frac{P}{n}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^{\pi/2} G(M+1,\, u) \cos(\bar{\varrho} u)\, \mathrm{d}u.$$

Далее, так как (см. (7)),

$$H'(x) = O\left(\frac{M^2}{x^2}\right) + O\left(\frac{M^2}{x^2} \cdot \frac{M+|\bar{\varrho}|}{\ln T}\right) = O\left\{M^2 (\ln\ln T)^{1/3} \cdot \frac{1}{x^2}\right\};$$

использованы оценки (см. (23))

$$G = O(M^2),\ \frac{\partial G}{\partial \Omega} = O(M^3),$$

то

$$W_5 = O\left\{M^2 (\ln\ln T)^{1/3} \cdot \int_1^P \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right\} = O\{M^2 (\ln\ln T)^{1/3}\},$$

и, (см. (24)),

$$W_3 = \frac{2}{\omega} \int_0^{\pi/2} G(M+1,\, u) \cos(\bar{\varrho} u)\, \mathrm{d}u + O\{M^2 (\ln\ln T)^{1/3}\}.$$

Однако, (см. (11), (23)),

$$\int_0^{\pi/2} G(M+1,\, u) \cos(\bar{\varrho} u)\, \mathrm{d}u = (M+1) \int_0^{\pi/2} \cos \bar{\varrho} u\, \mathrm{d}u +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} (M+1-k) \int_0^{\pi/2} \{\cos(k+\bar{\varrho})u + \cos(k-\bar{\varrho})u\}\, \mathrm{d}u = F(\bar{\varrho};\, M), \quad (25)$$

и, (см. (7), [11], (59)),

$$Q = \sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} 1 = \frac{1}{\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U^2}{T}\right) + O(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O\{(\ln\ln T)^2\}. \quad (26)$$

Следовательно,

$$\sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} W_1(m=n) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} F(\bar{\varrho};\, M) U \ln^2 \frac{T}{2\pi} + O\{M^2 U \ln T (\ln\ln T)^{1/3}\}. \quad (27)$$

2.5. Теперь мы завершим доказательство Леммы А. В силу (6), (15), (18)—(20), (27), получаем

$$J = \frac{2}{\pi^2} F(\bar{\varrho};\ M) \,.\, U \ln^2 \frac{T}{2\pi} + O\{M^2 U \ln T (\ln\ln T)^{1/3}\} + O(M^2 \sqrt{T} \ln^2 T) +$$

$$+ O\left(\frac{M^2 \bar{M} U^2}{\sqrt{T}}\right) = \frac{2}{\pi^2} F(\bar{\varrho};\ M) U \ln^2 \frac{T}{2\pi} + S_1 + S_2 + S_3.$$

Так как (см. (7)):

$$\frac{S_1}{U \ln^2 T} = O\left\{\frac{M^2 (\ln\ln T)^{1/3}}{\ln T}\right\} = O\left(\frac{\ln\ln T}{\ln T}\right),$$

$$\frac{S_2}{U \ln^2 T} = O\left(\frac{M^2}{\ln\ln T}\right) = O\left\{\frac{1}{(\ln\ln T)^{1/3}}\right\},$$

$$\frac{S_3}{U \ln^2 T} = O\left(\frac{M^2 \bar{M}}{\ln^2 T}\right) = O\left\{\frac{(\ln\ln T)^2}{\ln T}\right\},$$

то Лемма А доказана.

II. Свойства автокорреляционной функции

3. Следствие из одной формулы Кронекера

Справедлива следующая формула Кронекера ([14], стр. 173):

$$\frac{e^{2\pi\mu x i}}{1 - e^{2\pi x i}} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{e^{2k\pi\mu i}}{k - x},\ 0 < \mu < 1, \tag{28}$$

где x — нецелое число.

Прежде всего заметим, что ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{2k\pi\mu i}}{k - x},\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi\mu i}}{k - x}$$

сходятся. Далее:

$$B(n, \mu) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{e^{2k\pi\mu i}}{k - x} =$$

$$= -\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{2k\pi\mu i}}{k - x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-2k\pi\mu i}}{k + x},$$

$$\operatorname{Re}\{B(n,\mu)\} = -\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k-x} - \frac{1}{k+x}\right)\cos(2k\pi\mu),$$

$$\operatorname{Im}\{B(n,\mu)\} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+x} + \frac{1}{k-x}\right)\sin(2k\pi\mu),$$

$$2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mu x\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{2\pi x\mathrm{i}}} = -\pi\,\frac{\cos\pi x(2\mu-1)}{\sin\pi x} - \mathrm{i}\pi\,\frac{\sin\pi x(2\mu-1)}{\sin\pi x}.$$

Теперь, из (28), при $\mu = 1/4$, получаем:

$$\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}x} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k-x}\right)\cos\frac{\pi}{2}k,$$

$$\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2}x} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x} + \frac{1}{k-x}\right)\sin\frac{\pi}{2}k. \tag{29}$$

Пусть, далее,

$$|x| \leqq \alpha N,\ \alpha\in(0,\,1),\ \frac{1}{1-\alpha} = O(1). \tag{30}$$

Так как

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k\pm x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}k} = O\left\{\frac{1}{(1-\alpha)N}\right\} = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

то, из (29), следует.

Лемма 1. При условии (30):

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k-x}\right)\cos\frac{\pi}{2}k = -\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}x} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k+x} + \frac{1}{k-x}\right)\sin\frac{\pi}{2}k = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2}x} + O\left(\frac{1}{N}\right), \tag{31}$$

где x — нецелое число.

4. Поведение автокорреляционной функции в промежутке $\langle -M, M\rangle$.

Справедлива следующая

Теорема 1.

$$F(\bar{\varrho};\, M) = \left\{\pi + O\left(\frac{1}{M-\bar{\varrho}}\right)\right\}(M-\bar{\varrho}),\ \bar{\varrho}\in\langle 0,\, M-\bar{\psi}\rangle,$$
$$F(\bar{\varrho};\, M) = O(M+1-\bar{\varrho}),\ \bar{\varrho}\in(M-\bar{\psi},\, M\rangle,\ \bar{\psi}\leqq \ln\psi, \tag{32}$$

где $\bar{\psi} = \bar{\psi}(T)$ — функция типа ψ.

Явно отметим одно следствие из Теоремы 1.

Следствие 1.

$$F(0;\, M) = \pi M + O(1), \tag{33}$$

т.е. (см. (10): $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$):

$$J(\varrho, \varrho) = \sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U}\left\{\sum_{k=0}^{M} Z[g_\nu(\tau) + (k+\varrho)\omega]\right\}^2 \sim \frac{2}{\pi} MU \ln^2\frac{T}{2\pi}.$$

Замечание 1. Так как автокорреляционная функция $F(\bar{\varrho};\, M)$ является четной функцией, то из Теоремы 1 следует, что ее графиком на промежутке $\langle -M,\, M\rangle$ является слегка искаженный равнобедренный треугольник с высотой $\sim \pi M$ при $T\to\infty$.

Доказательство Теоремы 1.

(A) Рассмотрим случай:

$$\bar{\varrho}\in(0,\,1)\cup(1,\,2).$$

Из (11), принимая во внимание сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pm\bar{\varrho}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(k\pm\bar{\varrho})},$$

получаем:

$$F(\bar{\varrho};\, M) = M\cdot\frac{1}{\bar{\varrho}}\sin\frac{\pi}{2}\bar{\varrho} + (M+\bar{\varrho})\cdot\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k+\bar{\varrho}}\sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\varrho}) +$$
$$+ (M-\bar{\varrho})\cdot\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k-\bar{\varrho}}\sin\frac{\pi}{2}(k-\bar{\varrho}) + O(1). \tag{34}$$

Далее:

$$F(\bar{\varrho};\, M) = M\left\{\frac{1}{\bar{\varrho}}\sin\frac{\pi}{2}\bar{\varrho} + B_1\right\},$$

где

$$B_1 = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k+\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\varrho}) + \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k-\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}(k-\bar{\varrho}) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{2}\bar{\varrho} \cdot \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{1}{k+\bar{\varrho}} + \frac{1}{k-\bar{\varrho}}\right) \sin\frac{\pi}{2}k +$$

$$+ \sin\frac{\pi}{2}\bar{\varrho} \cdot \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{1}{k+\bar{\varrho}} - \frac{1}{k-\bar{\varrho}}\right) \cos\frac{\pi}{2}k.$$

Замкнутое выражение для B_1 получим с помощью Леммы 1. Имеем (см. (31), $x = \bar{\varrho}$, $N = M$):

$$B_1 = \pi - \frac{1}{\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}\bar{\varrho} + O\left(\frac{1}{M}\right).$$

Следовательно,

$$F(\bar{\varrho};\, M) = \pi M + O(1), \qquad \bar{\varrho} \in (0,\, 1) \cup (1,\, 2). \tag{35}$$

(B) Рассмотрим случай

$$\bar{\varrho} = m + \bar{\bar{\varrho}},\ m = 2, 3, \ldots, [M - \bar{\psi}],\ \bar{\bar{\varrho}} \in (0,\, 1).$$

Так как (см. (34)),

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k+\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\varrho}) = \sum_{k=m+1}^{M+m} \frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}} \sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{M+m} - \sum_{k=1}^{m-1} - \frac{1}{m+\bar{\bar{\varrho}}} \sin\frac{\pi}{2}(m+\bar{\bar{\varrho}}),$$

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k-\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}(k-\bar{\varrho}) = \sum_{k=1}^{M-m}{}' \frac{1}{k-\bar{\bar{\varrho}}} \sin\frac{\pi}{2}(k-\bar{\bar{\varrho}}) + \frac{1}{\bar{\bar{\varrho}}} \sin\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1}{}' \frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}} \sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}}),$$

то,

$$F(m + \bar{\bar{\varrho}};\, M) = \frac{M-m}{\bar{\bar{\varrho}}} \sin\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}} +$$

$$+ (M+m)\sum_{k=1}^{M+m}\frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}}) + (M-m)\sum_{k=1}^{M-m}\frac{1}{k-\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}(k-\bar{\bar{\varrho}}) -$$

$$- 2m\cdot\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}}) + O(1).$$

Однако

$$(M+m)\sum_{k=1}^{M+m}\frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}}) = (M-m)\sum_{k=1}^{M+m} + 2m\sum_{k=1}^{M+m},$$

$$m\sum_{k=m}^{M+m}\frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}}) = m\,.\,O\left(\frac{1}{m+\bar{\bar{\varrho}}}\right) = O(1).$$

Следовательно,

$$F(m+\bar{\bar{\varrho}};\,M) = (M-m)\left\{\frac{1}{\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}} + \sum_{k=1}^{M+m}\frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}}) +\right.$$

$$\left.+ \sum_{k=1}^{M-m}\frac{1}{k-\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}(k-\bar{\bar{\varrho}})\right\} + O(1) =$$

$$= (M-m)\left(\frac{1}{\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}} + B_2\right) + O(1). \qquad (36)$$

Замкнутое выражение для B_2 получим с помощью Леммы 1. Так как

$$\sum_{k=M-m+1}^{M+m}\frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}}) = O\left(\frac{1}{M-m+\bar{\bar{\varrho}}+1}\right) = O\left(\frac{1}{M-m}\right),$$

то, (см. (31): $N = M-m$, $x = \bar{\bar{\varrho}}$),

$$B_2 = \cos\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}\cdot\sum_{k=1}^{M-m}\left(\frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}} + \frac{1}{k-\bar{\bar{\varrho}}}\right)\sin\frac{\pi}{2}k +$$

$$+ \sin\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}\cdot\sum_{k=1}^{M-m}\left(\frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}} - \frac{1}{k-\bar{\bar{\varrho}}}\right)\cos\frac{\pi}{2}k + O\left(\frac{1}{M-m}\right) =$$

$$= \pi - \frac{1}{\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}} + O\left(\frac{1}{M-m}\right).$$

Теперь, (см. (36)),

$$F(m+\bar{\bar{\varrho}};M)=(M-m)\left\{\pi+O\left(\frac{1}{M-m}\right)\right\},\ m=0,1,\ldots,[M-\bar{\psi}],\ \bar{\bar{\varrho}}\in(0,1). \tag{37}$$

(C) Рассмотрим случай

$$m=[M-\bar{\psi}]+1,\ \ldots\ M-1,\ \bar{\bar{\varrho}}\in(0,1).$$

Так как ряды, упоминавшиеся в начале части (A), сходятся, то из (36) следует:

$$F(m+\bar{\bar{\varrho}};M)=O(M+1-m),\ m=[M-\bar{\psi}]+1,\ldots,M-1,\ \bar{\bar{\varrho}}\in(0,1). \tag{38}$$

(D) Рассмотрим случай

$$\bar{\varrho}=0,1,\ldots,M.$$

Так как функция $F(\bar{\varrho};M)$ непрерывна в $\bar{\varrho}$, то из (35), ($\bar{\varrho}\to 0,1,2$) и (37), (38), ($\bar{\bar{\varrho}}\to 1$), получаем соотношения:

$$F(m;M)=(M-m)\left\{\pi+O\left(\frac{1}{M-m}\right)\right\},\ m=0,1,\ldots,[M-\bar{\psi}],$$

$$F(m,M)=O(M+1+m),\ m=[M-\bar{\psi}]+1,\ldots,M.$$

5. Асимптотическое поведение одного бесконечного ряда

При изучении асимптотического поведения автокорреляционной функции $F(\bar{\varrho};M)$ нам понадобится следующая

Лемма 2.

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{1}{k+x}\sin\frac{\pi}{2}(k+x)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{r+x+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}r+\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{r^2}\right),\ x\geqq 0,\ r\geqq 1. \tag{39}$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha_k=\frac{1}{k+x},\ \beta_k=\sin\frac{\pi}{2}(k+x),$$

$$\sigma_k=\sum_{l=1}^{k}\beta_l,\ \beta_k=\sigma_k-\sigma_{k-1};\ \sigma_0=0.$$

Пользуясь преобразованием Абеля, получаем:

$$\sum_{k=r+1}^{K} \alpha_k \beta_k = -\alpha_{r+1} \cdot \sigma_r + \alpha_K \sigma_K + \sum_{k=r+1}^{K-1} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \sigma_k =$$

$$= -\frac{1}{r+x+1}\sigma_r + \sum_{k=r+1}^{K-1} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)}\sigma_k + \frac{1}{K+x}\sigma_K =$$

$$= -\frac{1}{r+x+1}\sigma_r + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sum_{k=r+1}^{K-1} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=r+1}^{K-1} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{K+x}\sigma_K; \tag{40}$$

в надлежащем месте использована формула

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Однако:

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)} = \frac{1}{r+x+1},$$

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Следовательно, переходя в (40) к пределу при $K \to \infty$, получаем (39).

6. Асимптотическое поведение автокорреляционной функции при больших значениях $|\bar{\varrho}|$

Справедлива следующая

Теорема 2.

$$F(\bar{\varrho}; M) = O\left(\frac{1}{|\bar{\varrho}|}\right),\ 2M \leqq |\bar{\varrho}| \leqq \bar{M}, \tag{41}$$

(относительно M, $\bar{M}$ см. (7)).

Замечание 2. Оценка (41) выражает тонкое явление — отсутствие гармонических составляющих в автокорреляционной функции на больших расстояниях. В сулу этого обстоятельства, мы приводим более подробно соответствующие формулы в доказательстве этой оценки.

Доказательство Теоремы 2. В силу четности функции $F(\bar{\varrho}; M)$, достаточно изучить случай

$$\bar{\varrho} = pM + \bar{\bar{\varrho}},\ p = 2, \ldots, K = O\left(\frac{\bar{M}}{M}\right) = O(\ln T),\ \bar{\bar{\varrho}} \in (0, M). \tag{42}$$

Из (11) следует:

$$F(\bar{\varrho}; M) = \frac{M+1}{\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}\bar{\varrho} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} (M+1-k)\left\{\frac{1}{k+\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\varrho}) + \frac{1}{k-\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}(k-\bar{\varrho})\right\} =$$

$$= (M+1+\bar{\varrho}) \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k+\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\varrho}) +$$

$$+ (M+1-\bar{\varrho}) \cdot \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k-\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}(k-\bar{\varrho}) + R_1 + R_2, \tag{43}$$

где

$$R_1 = -\sum_{k=1}^{M}\left\{\sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\varrho}) + \sin\frac{\pi}{2}(k-\bar{\varrho})\right\} = -2\cos\frac{\pi}{2}\bar{\varrho} \cdot \sum_{k=1}^{M} \sin\frac{\pi}{2}k,$$

$$R_2 = \frac{M+1}{\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}\bar{\varrho}. \tag{44}$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k+\bar{\varrho}} \sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\varrho}) = \sum_{k=pM+1}^{(p+1)M} \frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}} \sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}}),$$

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\bar{\varrho}-k} \sin\frac{\pi}{2}(\bar{\varrho}-k) = \sum_{k=(p-1)M}^{pM-1} \frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}} \sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}}),$$

то, по Лемме 2 (см. (39))

$$\sum_{k=pM+1}^{(p+1)M} \frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}} \sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}}) = \sum_{k=pM+1}^{\infty} - \sum_{k=(p+1)M+1}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{pM+\bar{\bar{\varrho}}+1} \cos\left(\frac{\pi}{2}pM + \frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}} + \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(p+1)M+\bar{\bar{\varrho}}+1}\cos\left\{\frac{\pi}{2}(p+1)M+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}+\frac{\pi}{4}\right\}+O\left(\frac{1}{p^2M^2}\right),$$

$$\sum_{k=(p-1)M}^{pM-1}\frac{1}{k+\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\bar{\varrho}})=\sum_{k=(p-1)M}^{\infty}-\sum_{k=pM}^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(p-1)M+\bar{\bar{\varrho}}}\cos\left\{\frac{\pi}{2}(p-1)M+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}-\frac{\pi}{4}\right\}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{pM+\bar{\bar{\varrho}}}\cos\left\{\frac{\pi}{2}pM+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}-\frac{\pi}{4}\right\}+O\left(\frac{1}{p^2M^2}\right).$$

Далее:

$$(\bar{\varrho}+M+1)\cdot\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k+\bar{\varrho}}\sin\frac{\pi}{2}(k+\bar{\varrho})-$$

$$-(\bar{\varrho}-M-1)\cdot\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{\bar{\varrho}-k}\sin\frac{\pi}{2}(\bar{\varrho}-k)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{M}{pM+\bar{\bar{\varrho}}+1}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}pM+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}+\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left\{\frac{\pi}{2}(p+1)M+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}+\frac{\pi}{4}\right\}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{(p-1)M+\bar{\bar{\varrho}}}\right)\cos\left\{\frac{\pi}{2}(p-1)M+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}-\frac{\pi}{4}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{M+1}{pM+\bar{\bar{\varrho}}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}pM+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{pM}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}M\,.\sin\frac{\pi}{4}(M+1)\,.\cos\frac{\pi}{2}(pM+\bar{\bar{\varrho}})+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{M}{pM+\bar{\bar{\varrho}}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}pM+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}pM+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(p-1)M+\bar{\bar{\varrho}}}\cos\left\{\frac{\pi}{2}(p-1)M+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}-\frac{\pi}{4}\right\}+O\left(\frac{1}{pM}\right)=$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}M\,.\,\sin\frac{\pi}{4}(M+1)\,.\cos\frac{\pi}{2}((pM+\bar{\bar{\varrho}}) -$$

$$-\frac{M}{pM+\bar{\bar{\varrho}}}\sin\frac{\pi}{2}(pM+\bar{\bar{\varrho}}) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(p-1)M+\bar{\bar{\varrho}}}\cos\left\{\frac{\pi}{2}(p-1)M+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}-\frac{\pi}{4}\right\}+O\left(\frac{1}{pM}\right).$$

Теперь, (см. (42)—(44)):

$$F(\bar{\varrho};\,M) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}M\,.\,\sin\frac{\pi}{4}(M+1)\,.\cos\frac{\pi}{2}(pM+\bar{\bar{\varrho}}) -$$

$$-\,2\cos\frac{\pi}{2}(pM+\bar{\bar{\varrho}})\cdot\sum_{k=1}^{M}\sin\frac{\pi}{2}k +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(p-1)M+\bar{\bar{\varrho}}}\cos\left\{\frac{\pi}{2}(p-1)M+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}-\frac{\pi}{4}\right\}+O\left(\frac{1}{pM}\right).$$

Однако,

$$\sum_{k=1}^{M}\sin\frac{\pi}{2}k = \frac{\sin\frac{\pi}{4}M}{\sin\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}(M+1) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}M\sin\frac{\pi}{4}(M+1).$$

Значит, имеет место формула:

$$F(\bar{\varrho};\,M) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(p-1)M+\bar{\bar{\varrho}}}\cos\left\{\frac{\pi}{2}(p-1)M+\frac{\pi}{2}\bar{\bar{\varrho}}-\frac{\pi}{4}\right\}+O\left(\frac{1}{pM}\right), \qquad (45)$$

и отсюда, для $2 \leqq p \leqq K$ (см. (42)), следует оценка (41).

III. Некоторые типы случайных процессов, порожденных формулой Римана—Зигеля

7. Радиотехническая интерпретация поведения автокорреляционной функции $F(\bar{\varrho};\, M)$

В настоящей части мы приведем некоторые наводящие соображения. С точки зрения радиоинженера естественно считать, что последовательность (см. (13))

$$\Phi[g_\nu(\tau),\, \varrho\omega,\, M],\ g_\nu \in \langle T,\, T+U\rangle \tag{46}$$

является реализацией некоторой случайной последовательности, при этом, реализация соответствует достаточно длинному промежутку времени, ($U = \sqrt{T}\ln\ln T$).

Далее, предположим, что в его распоряжении имеется только реализация (46). Тогда он, осреднением по одной реализации, приближенно вычисляет автокорреляционную функцию $F(\bar{\varrho};\, M)$ и, исследует ее поведение при достаточно больших расстояниях $|\bar{\varrho}|\omega$.

Напомним, что в нашем случае (см. (41)):

$$F(\bar{\varrho};\, M) = O\left(\frac{1}{|\bar{\varrho}|}\right).$$

Так как для

$$\bar{\varrho} = \ln T\,.\,(\ln\ln T)^{1/3}$$

(см. (7)) имеем

$$\bar{\varrho}\omega \sim \pi(\ln\ln T)^{1/3}$$

то

$$F\{\ln T\,.\,(\ln\ln T)^{1/3};\, M\} = O\left(\frac{\omega}{|\bar{\varrho}|\omega}\right) = O\left\{\frac{1}{\ln T(\ln\ln T)^{1/3}}\right\} = o(1).$$

Следовательно, на больших расстояниях $|\bar{\varrho}|\omega$ от точки 0, автокорреляционная функция стремится к нулю.

Такое поведение автокореляционной функции является аргументом в пользу эргодичности гипотетической случайной последовательности. На основе предположения об эргодичности, радиоинженер вычисляет приближенные значения основных (в рамках корреляционной теории) характеристик случайной последовательности: математического ожидания и автокорреляционной функции, воспользовавшись при этом осреднением по времени, с помощью единственной реализации (46).

Попробуем дать строгую основу под эти наводящие соображения.

8. Детерминированная случайная последовательность, порожденная формулой Римана—Зигеля

Пусть φ — случайная величина, равномерно распределенная на промежутке $\langle -\pi, \pi\rangle$. Внося в аргумент косинуса в формулах (12), (13) $-n\varphi$ и разделяя получающуюся из (13) формулу на

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\ln P},$$

получаем следующую детерминированную случайную последовательность (при любом фиксированном $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$):

$$\Phi_1 = \Phi_1[g_\nu(\tau), \varrho\omega, M, \varphi] =$$

$$= \sum_{n<P} \bar{A}(n, M)\cos\{\alpha(n, \nu, \varrho) - n\varphi\} + R_3,\ g_\nu \in \langle T, T+U\rangle, \tag{47}$$

где (см. (13), (14)),

$$\bar{A}(n, M) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{A(n, M)}{\sqrt{\ln P}},\ R_3 = O\left(\frac{M\bar{M}U}{T^{3/4}\ln^{3/2}T}\right) = O(T^{-1/4}). \tag{48}$$

Напомним, что детерминированные случайные процессы имеют определенную функциональную зависимость от времени, а их случайный характер обусловливается случайными параметрами, не зависящими от времени (см. [16], стр. 53, 54). Детерминированные случайные процессы представляют собой вырожденные виды случайных процессов.

Замечание 3. Дет. случ. посл. (47) является суммой случайной составляющей и пренебрежимо малой (при $T \to \infty$) неслучайной составляющей R_3.

Так как из (5) следует (см. (4), (7)) соотношение

$$g_{\nu+1}(\tau) - g_\nu(\tau) = \omega + O\left(\frac{U}{T\ln^2 T}\right) = \omega + O\left(\frac{\ln\ln T}{\sqrt{T}\ln^2 T}\right),$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$, т. е.

$$g_{\nu+1}(\tau) - g_\nu(\tau) \sim \omega,\ g_\nu \in \langle T, T+U\rangle, \tag{49}$$

при $T \to \infty$, $(g_\nu = g_\nu(0))$, то распределение «точек отсчета» дет. случ. посл. (47), является асимптотически равномерным распределением с разностью ω.

Далее, выражение для Φ_1 напишем в следующей форме:

$$\Phi_1 = \sum_{n<P} (W\cos n\varphi + V\sin n\varphi) + R_3, \tag{50}$$

где

$$W = W(n,\ v,\ \varrho) = \bar{A}(n,\ M)\cos\{\alpha(n,\ v,\ \varrho)\},$$
$$V = V(n,\ v,\ \varrho) = \bar{A}(n,\ M)\sin\{\alpha(n,\ v,\ \varrho)\}.$$

Конечно, система случайных величин

$$\cos n\varphi,\ \sin n\varphi,\ n < P, \tag{51}$$

где φ — равномерно распределена на промежутке $\langle -\pi,\ \pi\rangle$, является центрированной системой взаимно некоррелированных случайных величин, т. е. (M - математическое ожидание):

$$M[\cos n\varphi] = M[\sin n\varphi] = 0,\ M[\sin m\varphi \,.\, \cos n\varphi] = 0,$$

$$M[\cos m\varphi \,.\, \cos n\varphi] = M[\sin m\varphi \,.\, \sin n\varphi] = \frac{1}{2}\,\delta_{mn},$$

(эти соотношения являются следствием ортогональности системы функций (51) на промежутке $\langle -\pi,\ \pi\rangle$.

Следовательно, для математического ожидания случ. посл. получаем (см. (50)):

$$M[\Phi_1] = M[R_3] = R_3 = o(1), \tag{52}$$

и, для ее автокорреляционной функции (см. (7), (14), (48), ср. (21), (22), (25)):

$$K(\varrho_1,\ \varrho_2) = M[\mathring{\Phi}_1(\varrho_1\,\omega)\mathring{\Phi}_1(\varrho_2(\omega)] =$$
$$= M[\{\Phi_1(\varrho_1\,\omega) - R_3\}\,.\,\{\Phi_1(\varrho_2\,\omega) - R_3\}] =$$
$$= \sum_{n<P}\{W(n,\ v,\ \varrho_2)W(n,\ v,\ \varrho_1) + V(n,\ v,\ \varrho_2)V(n,\ v,\ \varrho_1)\} - R_3^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n<P}\bar{A}^2(n,\ M)\,.\cos\left\{(\varrho_2 - \varrho_1)\omega\ln\frac{P}{n}\right\} - R_3^2 =$$
$$= \frac{\pi}{4\ln P}\left(\frac{2}{\pi}F(\varrho_2 - \varrho_1;\ M)\ln\frac{T}{2\pi} + O\{M^2(\ln\ln T)^{1/3}\}\right) - R_3^2 =$$
$$= F(\varrho_2 - \varrho_1;\ M) + O\left(\frac{\ln\ln T}{\ln T}\right) - R_3^2 = F(\varrho_2 - \varrho_1;\ M) + o(1) =$$
$$= K(\varrho_2 - \varrho_1) + o(1); \tag{53}$$

в надлежащем месте использовано следующее свойство: $M[R_3\,.\,\Phi_1] = R_3^2$.

9. Асимптотическая стационарность случайной последовательности Φ_1

Напомним, что случайный процесс $X(t)$, $t\in(-\infty, \infty)$, называется стационарным в смысле Хинчина, если

$$\begin{gathered} M[x] = m_x = const., \\ K(\varrho_1, \varrho_2) = M[\mathring{X}(\varrho_1) . \mathring{X}(\varrho_2)] = K_0(\varrho_2 - \varrho_1), \end{gathered} \tag{54}$$

где

$$\mathring{X}(\varrho) = X(\varrho) - m_x.$$

В настоящей части мы хотим дать такое определение «стационарности», кторое соответствует духу дет. случ. посл., определенной с помощью формулы Римана—Зигеля. Предварительно сделаем следующие замечания.

(A) Так как (см. [13], стр. 94)

$$Z(t) = -2\pi^{1/4} \frac{\Xi(t)}{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \mathrm{i}\frac{t}{2}\right)\right|},$$

где $\Xi(t)$ четная функция (см. [13], стр. 23), то и $Z(t)$ является четной функцией. Это обстоятельство позволяет, вместо промежутка $(-\infty, \infty)$, рассматривать только промежуток $(0, \infty)$.

(B) Разность

$$g_{\nu+1}(\tau) - g_\nu(\tau)$$

существенно изменяется на промежутке $(0, \infty)$: от конечных положительных значений, до значений $o(1)$ при $\nu\to\infty$. Однако, для промежутка $\langle T, T+U\rangle$, (см. (7), (49)),

$$g_{\nu+1}(\tau) - g_\nu(\tau) \sim \omega = \frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}},$$

т. е. на этом промежутке, упоминавшаяся разность является почти постоянной. Значит, «точки отсчета» случайной последовательности распределены в этом промежутке почти равномерно с разностью ω.

Замечания (A), (B) приводят нас к следующему определению (ср. (54)).

Определение 1. Случайный процесс

$$X(t),\ t\in\langle T, T+V\rangle,\ V = V(T) = o(T), \tag{55}$$

где $V(T)$ возрастает к ∞ при $T \to \infty$, назовем асимптотически стационарным, если

$$M[X] = m_x + o(1),$$

$$K(\varrho_1, \varrho_2) = \bar{K}(\varrho_2 - \varrho_1) + o(1),$$

где m_x — остоянная.

Замечание 4. Аналогичное определение имеет место и для случ. посл., получающейся квантованием случ. процесса (55).

Замечание 5. В силу (52), (53), случ. посл. Φ_1 является асимптотически стационарной.

10. Асимптотическая эргодичность случайной последовательности Φ_1

Как известно, случайные процессы, для которых существует определенное соотношение между средними по множеству реализаций и средними по времени, называются эргодическими.

Мы дадим сидующее.

Определение 2. Асимптотически стационарный процесс

$$X(t),\ t \in \langle T,\ T + V \rangle,\ V = V(T) = o(T), \tag{56}$$

назовем:

(A) асимптотически эргодическим по отношению к математическому ожиданию, если

$$\frac{1}{V} \int_T^{T+V} \bar{X}(t)\,\mathrm{d}t = m_x + o(1), \tag{57}$$

для любой реализации $\bar{x}(t)$,

(B) асимптотически эргодическим по отношению к автокорреляционной функции, если

$$\frac{1}{V} \int_T^{T+V} \bar{X}(t + \varrho_1)\bar{X}(t + \varrho_2)\,\mathrm{d}t = \bar{K}(\varrho_2 - \varrho_1) + o(1), \tag{58}$$

для любой реализации $\bar{X}(t)$,

(C) асимптотически эргодическим, если имеют место соотношения (57), (58) одновременно, для любой реализации $\bar{X}(t)$.

Замечание 6. Аналогичное определение (с заменой интегралов соответствующими суммами) имеет место и для случ. посл. получающейся квантованием асимп. стац. случ. процесса (56).

Справедлива следующая

Теорема 3. Асимп. стац. случ. посл. Φ_1 является асимп. эргодической по отношению к математическому ожиданию.

Доказательство. Возьмем реализацию асимп. стац. случ. посл. Φ_1, соответствуюшую значению $\bar{\varphi} \in \langle -\pi, \pi \rangle$, (см. (47)):

$$\Phi_1(\bar{\varphi}) = \sum_{n<P} \bar{A}(n, M) \, . \cos\{\alpha(n, \nu, \varrho) - n\bar{\varphi}\} + o(1).$$

Имеем (см. (26)):

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \Phi_1(\bar{\varphi}) = \sum_{n<P} \bar{A}(n, M) \, . \, B(n) + o(U \ln T),$$

где (см. (14))

$$B(n) = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \cos\{2\pi\chi(\nu)\},$$

$$\chi(\nu) = \frac{1}{4}\nu - \frac{1}{2\pi} g_\nu(\tau) \ln n + \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\tau}{2} + \left(\frac{1}{2}M + \varrho\right)\omega \ln \frac{P}{n} - n\bar{\varphi}\right\}.$$

Так как (ср. 2.2.):

$$\chi'(\nu) = \frac{1}{4} - \frac{\ln n}{2 \ln \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}, \quad |\chi'(\nu)| < \frac{1}{4}, \quad \chi''(\nu) > 0,$$

$$\chi'(\nu) > \frac{A}{\ln T} \ln \frac{P}{n},$$

то (см. (14), (48) и 2.3.)

$$B(n) = O\left(\frac{\ln T}{\ln \frac{P}{n}}\right),$$

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \Phi_1(\bar{\varphi}) = O\left(\frac{M}{\sqrt{\ln T}} \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n} \ln \frac{P}{n}}\right) + o(U \ln T) =$$

$$= O\{M T^{1/4} (\ln T)^{3/2}\} + o(U \ln T) = o(U \ln T).$$

Следовательно, (см. (26)),

$$\frac{1}{Q} \cdot \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \Phi_1[g_\nu(\tau), \varrho\omega, M, \bar{\varphi}] = o(1), \tag{59}$$

равномерно для τ, ϱ, $\bar{\varphi}$ в указанных промежутках. Значит, среднее по времени (59) асимптотически совпадает со средним по множеству реализаций (52).

Далее справедлива

Теорема 4. Асимп. стац. случ. посл. Φ_1 является асимп. эргодической по отношению к автокорреляционной функции.

Доказательство. Возьмем реализацию асимп. стац. случ. посл. Φ_1, соответствующую значению $\bar{\varphi} \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и образуем сумму

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \Phi_1[\varrho_1 \omega, \bar{\varphi}] \,.\, \Phi_1[\varrho_2 \omega, \bar{\varphi}] \,.$$

Имеем, (ср. (15), (16), (47), (48)):

$$\Phi_1[\varrho_1 \omega, \bar{\varphi}] \,.\, \Phi_1[\varrho_2 \omega, \bar{\varphi}] = \bar{W}_1 + \bar{W}_2 + O\left(\frac{M^2 \bar{M} U}{\sqrt{T} \ln^2 T}\right), \tag{15'}$$

где

$$\bar{W}_1 = \frac{1}{2} \sum_{m,\, n < P} \sum \bar{A}(m, M) \bar{A}(n, M) \cos\{2\pi \bar{\beta}(\nu)\},$$

$$\bar{W}_2 = \frac{1}{2} \sum_{m,\, n < P} \sum \bar{A}(m, M) \bar{A}(n, M) \cos\{2\pi \bar{\gamma}(\nu)\}, \tag{16'}$$

$$\bar{\beta}(\nu) = \beta(\nu) + \frac{1}{2\pi}(n-m)\bar{\varphi}, \; \bar{\gamma}(\nu) = \gamma(\nu) - \frac{1}{2\pi}(m+n)\bar{\varphi}.$$

Так как добавочные члены в $\bar{\beta}(\nu)$, $\bar{\gamma}(\nu)$ не зависят от ν, то, как в пунктах 2.2., 2.3., методом ван дер Корпута, получаем оценку (ср. (48)):

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \{\bar{W}_1(m \neq n) + \bar{W}_2\} = O(M^2 \sqrt{T} \ln T). \tag{60}$$

Далее, (см. (16), (48), (53), (16')):

$$\bar{W}_1(m=n) = \frac{\pi}{4 \ln P} W_1(m=n) = K(\varrho_2 - \varrho_1) + o(1). \tag{61}$$

Теперь, из (15'), в силу (7), (26), (60), (61), получаем

$$\frac{1}{Q} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \Phi_1[\varrho_1 \omega, \bar{\varphi}] \,.\, \Phi_1[\varrho_2 \omega, \bar{\varphi}] =$$

$$= K(\varrho_2 - \varrho_1) + o(1) + O\left(\frac{M^2 \sqrt{T} \ln T}{U \ln T}\right) + O\left(\frac{M^2 \bar{M} U}{\sqrt{T} \ln^2 T}\right) =$$

$$= K(\varrho_2 - \varrho_1) + o(1). \tag{62}$$

Следовательно, среднее по времени (62) асимптотически совпадает со средним по множеству реализаций (53). Теорема 4 доказана.

Наконец, из Теорем ш, 4 получаем

Следствие 2. Асимп. стац. случ. посл. Φ_1 является асимп. эргодической.

11. Случайная последовательность, получающаяся интегрированием Φ_1 по τ

Напомним, что $\Phi_1 = \Phi_1(\tau)$ (см. (47)), представляет собой семейство случайных последовательностей. Интегррированием по неслучайному параметру τ мы можем построить новое семейство случайных последовательностей.

Пусть (см. (5), ср. [6], [10], [11])

$$G_v(x) = \{t\colon g_v(-x) < t < g_v(x)\},\ 0 < x \leqq \pi/2,\ g_v \in \langle T,\ T + U\rangle.$$

Теперь определим следуюшую систему случ. последовательностей:

$$\Phi_2(x) = \Phi_2(x,\ v,\ \varrho\omega,\ M,\ \varphi) = \int_{-x}^{x} \Phi_1\, \mathrm{d}\tau,\ g_v \in \langle T,\ T + U\rangle.$$

Однако, (сп. [11], стр. 33—34),

$$\int_{-x}^{x} \Phi_1[g_v(\tau),\ \varrho\omega,\ M,\ \varphi]\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= 2 \ln P \cdot \int_{G_v(x)} \Phi_1[t,\ \varrho\omega,\ M,\ \varphi]\, \mathrm{d}t + R_4,$$

где

$$R_4 = O\left(\frac{U}{T} \cdot \frac{MT^{1/4}}{\sqrt{\ln T}} \cdot \frac{1}{\ln T}\right) = O\left\{\frac{(\ln\ln T)^{4/3}}{T^{1/4}(\ln T)^{3/2}}\right\};$$

использована оценка

$$\Phi_1 = O\left(\frac{MT^{1/4}}{\sqrt{\ln T}}\right).$$

Следовательно:

$$\Phi_2(x) = 2 \ln P \cdot \int_{G_v(x)} \Phi_1[t,\ \varrho\omega,\ M,\ \varphi]\, \mathrm{d}t + R_4.$$

Заметим, что свойства семейства случайных последовательностей $\Phi_2(x)$ можно изучать как в случае $\Phi_1(\tau)$.

12. Асимптотически гауссовский*) случайный процесс, порожденный формулой Римана—Зигеля (заключительные замечания)

12.1. Применяя к формуле (12) подстановки

$$g_{\nu}(\tau) \to t, \ \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\tau}{2} \to \vartheta_1(t), \quad k \to 0,$$

и, отбрасывая член

$$O\left(\frac{\bar{M}U}{T^{3/4}\ln T}\right) = O\{T^{-1/4}(\ln\ln T)^{4/3}\},$$

стремящийся к 0 при $T \to \infty$, получаем:

$$\tilde{Z}(t + \varrho\omega) = 2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left\{\vartheta_1(t) - t\ln n + \varrho\omega\ln\frac{P}{n}\right\}. \tag{63}$$

Пусть, далее, φ_n, $n < P$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные в промежутке $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Внося теперь в аргумент косинуса в (63) слагаемое φ_n, мы получаем следующий случайный процесс, порожденный формулой Римана—Зигеля:

$$\Phi_3(t) = \Phi_3(t, \varrho\omega; \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots) =$$

$$= 2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\alpha_1 + \varphi_n), \quad t \in \langle T, T+U\rangle, \tag{64}$$

где

$$\alpha_1 = \alpha_1(n, t, \varrho) = \vartheta_1(t) - t\ln n + \varrho\omega\ln\frac{P}{n}.$$

12.2. Справедлива следующая

Теорема 5. Закон распределения любого сечения $\Phi_3(\bar{t})$, $\bar{t} \in \langle T, T+U\rangle$ случайного процесса (64), является асимптотически нормальным при достаточно больших $T > 0$.

Доказательство. Воспользуемся центральной предельной теоремой А. М. Ляпунова.

Пусть $\bar{t} \in \langle T, T+U\rangle$ и

$$\Phi_3(\bar{t}) = \sum_{n<P} X_n, \ X_n = \frac{2}{\sqrt{n}}\cos(\bar{\alpha}_1 + \varphi_n), \ \bar{\alpha}_1 = \alpha_1(n, \bar{t}, \varrho).$$

*) Доказана лишь гауссовость одномерного распределения.

Прежде всего, математические ожидания и дисперсии независимых случайных величин X_n равны

$$M[X_n] = 0,\ D[X_n] = M[(X_n - M[X_n])^2] = \frac{2}{n}$$

соответственно, и,

$$M[|X_n - M[X_n]|^3] = M[|X_n|^3] \leqq \frac{8}{n^{3/2}},$$

$$\sum_{n<P} M[|X_n|^3] < 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = A,$$

($0 < A$ — абсолютная постоянная).

Далее, по формуле Эйлера

$$\sum_{n<P} \frac{1}{n} = \ln P + c + O\left(\frac{1}{P}\right),$$

(c — постоянная Эйлера):

$$\sum_{n<P} D[X_n] = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{n} \sim 2 \ln P, \quad P \to \infty.$$

Следовательно, ($P \to \infty \Leftrightarrow T \to \infty$),

$$B_P = \left\{\sum_{n<P} D[X_n]\right\}^{1/2} \sim \sqrt{2 \ln P},$$

и,

$$\frac{1}{B_P^3} \cdot \sum_{n<P} M[|X_n|^3] < \frac{A}{(\ln P)^{3/2}} \to 0, \quad P \to \infty,$$

т. е. условие Ляпунова выполнено.

12.3. Наконец заметим, что изучение выбросов асимптотически гауссовского процесса (64), с помощью метода С. О. Райса (см. [17]), нужно считать интересной задачей, так как такое изучение может пролить свет на статистические свойства самой функции $Z(t)$. Мы имеем в виду такие важные статистические характеристики случайного процесса $\Phi_3(t)$ как: среднее число выбросов за данный уровень, средняя длительность выброса, среднее время пребывания выше заданного уровня, среднее число максимумов и их распределение и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: The zeros of Riemann's zeta-function on critical line, Math. Zs., 10(1921), 283—317.
2. Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, Quart. J. Math. IV, 5 (1934), 98—108.
3. Мозер, Ян: О законе Грама в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 32 (1977), 107—113.
4. Мозер, Ян: Об одной автокорреляционной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., 37 (1980), 121—133.
5. Мозер, Ян: Об одной квазиортогональной системе векторов в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., 38 (1981), 87—97.
6. Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана—Зигеля, Acta Arith., 42 (1982), 1—10.
7. Мозер, Ян: Об одной лемме Харди—Литтлвуда в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., 42—43 (1983), 7—26.
8. Мозер, Ян: Улучшение теоремы Харди—Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, Acta Math. Univ. Comen., 42—43 (1983), 41—49.
9. Мозер, Ян: Об одной теореме А. Сельберга в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., 42—43 (1983), 65—72.
10. Мозер, Ян: Некоторые следствия из формулы Римана—Зигеля, Труды Мат. инст. АН СССР, 1984, т. 163, 183—186.
11. Мозер, Ян: Новые теоремы о среднем в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., 46—47 (1985), 21—40.
12. Мозер, Ян: Задача Харди—Литтлвуда и гипотеза Линделефа, Acta Math. Univ. Comen., 46—47 (1985), 49—62.
13. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва ИИЛ, 1953.
14. Уиттекер, Э. Т.—Ватсон, Дж. Н.: Курс современного анализа, I, ГИФМЛ, Москва 1963.
15. Бендат, Дж.—Пирсол, А.: Измерение и анализ случайных процессов, Москва «Мир», 1974.
16. Мидлтон, Д. Введение в статистическую теорию связи, Москва, «Советское радио», 1961.
17. Rice, S. O.: Mathematical analysis of random noise, Bell System Tech. J., 23, 24 (1944, 1945).

Адрес автора:

Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступило: 27. 6. 1986

SUMMARY

HARDY-LITTLEWOOD'S CURIOUS FORMULA AND SOME RANDOM PROCESSES GENERATED BY RIEMANN-SIEGEL'S FORMULA

Ján Moser, Bratislava

The Hardy-Littlewood's curious formula from 1921 suggests the idea of researching the autocorrelated function $F(\bar{\varrho}; M)$, $\bar{\varrho} = \varrho_2 - \varrho_1$ of the sequence

$$\Phi[g_v(\tau), \varrho\omega, M] = \sum_{k=0}^{M} Z[g_v(\tau) + (k + \varrho)\omega], \; g_v \in \langle T, T + V \rangle, \; \omega = \frac{\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}},$$

(where ϱ, M, U are given). The following result is proved:

(a) the graph of $F(\bar{\varrho}; M)$, $\bar{\varrho} \in \langle -M, M \rangle$ is a somewhat deformated isosceles triangel, $\sim \pi M$ in heigh for $T \to \infty$, (certain Kronecker's formula is used in the proof),

(b) if $|\bar{\varrho}|$ is sufficiently large then: $F(\bar{\varrho}; M) = O\left(\frac{1}{|\bar{\varrho}|}\right)$.

The behaviour of $F(\bar{\varrho}; M)$ reminds the behaviour of the autocorrelated functions of some random processes in the radiotechnic. As a consequence is, on the basis of the Riemann—Siegel's formula, a determinated random sequence defined and its asymptotic ergodicity proved. Moreover an asymptotic Gaussian process is constructed. An analysis of the upwards excursion problems by Rice method (1944, 1945) may be performed. The last may be usefull when the statistic properties of the function $Z(t)$ itself are studied.

SÚHRN

HARDYHO-LITTLEWOODOV KURIÓZNY VZOREC A NIEKTORÉ NÁHODNÉ PROCESY, GENEROVANÉ RIEMANNOVÝM—SIEGELOVÝM VZORCOM

Ján Moser, Bratislava

Hardyho—Littlewoodov kuriózny vzorec z r. 1921 privádza k myšlienke študovať autokorelačnú funkciu $F(\bar{\varrho}; M)$, $\bar{\varrho} = \varrho_2 - \varrho_1$, postupnosti

$$\Phi[g_v(\tau), \varrho\omega, M] = \sum_{k=0}^{M} Z[g_v(\tau) + (k + \varrho)\omega], \; g_v \in \langle T, T + U \rangle, \; \omega = \frac{\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}},$$

pri odpovedajúcich ϱ, M, U. V práci je dokázaný nasledovný výsledok:

(a) grafom funkcie $F(\bar{\varrho}; M)$, $\bar{\varrho} \in \langle -M, M \rangle$ je trochu deformovaný rovnoramenný trojuholník s výškou $\sim \pi M$ pri $T \to \infty$, (pri dôkaze je použitý istý Kroneckerov vzorec),

(b) pre veľké $|\bar{\varrho}|$ platí: $F(\bar{\varrho}; M) = O\left(\frac{1}{|\bar{\varrho}|}\right)$.

Priebeh funkcie $F(\bar{\varrho}; M)$ pripomína priebeh autokorelačných funkcií niektorých náhodných procesov, vyskytujúcich sa v rádiotechnike. V dôsledku toho je v práci, na základe Riemannovho —Siegelovho vzorca, definovaná istá determinovaná náhodná postupnosť a dokázaná jej asymptotická ergodičnosť. Okrem toho je zostrojený aj jeden asymptotický gaussovský proces. Analýza úloh typu výstupov (upwards excursion) takého náhodného procesu Riceovou metódou (1944, 1945), môže hrať úlohu pri štúdiu štatistických vlastností samotnej funkcie $Z(t)$.