UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LIV—LV—1988

ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДЛИНА ДУГИ ОДНОЙ КРИВОЙ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

Введение

В предлагаемой работе, на основе некоторых случайных процессов порожденных формулами Римана—Зигеля для $Z(t)$, $Z'(t)$, вводятся понятия статистической длины дуги, площади и объема геометрических фигур, связанных обычным образом с кривой $Z(t)$, $t \in \langle T, T+U \rangle$.

А именно, внося в аргументы косинусов в формулах Римана—Зигеля

$$Z(t) = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta_1(t) - t\ln n\} + O(T^{-1/4}), \tag{1}$$

$$Z'(t) = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{P}{n} \cdot \cos\left\{\vartheta_1(t) - t\ln n + \frac{\pi}{2}\right\} + O(T^{-1/4}\ln T), \tag{2}$$

$$t \in \langle T, T+U \rangle, \quad U \in (0, \sqrt{T}\rangle, \quad P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$$

независимые, равномерно распределенные на промежутке $\langle -\pi, \pi \rangle$ случайные величины φ_n, $n < P$, мы получаем два случайных процесса $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $t \in \langle T, T+U \rangle$ соответственно.

Из центральной предельной теоремы Ляпунова следует, что законы распределения любых сечений $\Phi_1(\bar{t})$, $\Phi_2(\bar{t})$, $\bar{t} \in \langle T, T+U \rangle$ являются асимптотически нормальными.

Интегрированием по непрерывным реализациям получаем следующие случайные процессы:

$$\Phi_3 = \Phi_3(U;\, T) - \pi \int_T^{T+U} \Phi_1^2 \,\mathrm{d}t,$$

$$\Phi_4 = \Phi_4(U;\, T) = \int_T^{T+U} |\Phi_1|\, \mathrm{d}t,$$

$$\Phi_5 = \Phi_5(U;\, T) = \int_T^{T+U} \sqrt{1 + \Phi_2^2}\, \mathrm{d}t,\ U \in (0, \sqrt{T}\rangle.$$

На основе одной формальной процедуры, связанной с вычислением математических ожиданий этих случайных процессов, определены:

(A) статистический объем тела, образованного вращением вокруг оси Ot площади

$$T \leqq t \leqq T + U, \quad 0 \leqq y \leqq |Z(t)|,$$

(B) статистическая площадь криволинейной трапеции, соответствующей кривой $|Z(t)|$, $t \in \langle T,\, T+U\rangle$,

(C) статистическая длина дуги кривой $Z(t)$, $t \in \langle T,\, T+U\rangle$.

Доказана следующая теорема (основная): статистический объем упоминавшегося тела вращения, асимптотически совпадает с объемом этого тела вращения. Эту теорему можно считать аргументом в пользу двух следующих гипотез:

$$S \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, U \sqrt{\ln T},$$

$$L \sim \frac{1}{\sqrt{6\pi}} U \ln^{3/2} T,\ T \to \infty,\ U \in \langle T^{1/6+\varepsilon}, \sqrt{T}\rangle,$$

($0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число), где S — площадь криволинейной трапеции упоминавшейся в (B) и L — длина дуги кривой упоминавшейся в (C).

Обоснованием для предлагаемого исследования является следующее обстоятельство. Длина дуги кривой $Z(t)$, $t \in \langle T,\, T+U\rangle$ выражается так:

$$L = L(U;\, T) = \int_T^{T+U} \sqrt{1 + \{Z'(t)\}^2}\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

Достаточно одного взгляда на формулы (2), (3), чтобы понять трудность вопроса об асимптотическом выражении для величины $L(U,\, T)$, при $T \to \infty$.

Главная трудность кроется, вероятно, в том, что здесь отсутствует процедура, аналогичная процедуре П. А. М. Дирака для извлечения квадратного корня из оператора

$$\sqrt{m^2c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta$$

в релятивистской теории электрона (см. [8], стр. 352, 353).

В силу этого обстоятельства, для получения предварительной информации в этом трудном вопросе, мы использовали простые свойства случайного процесса, порожденного формулой Римана—Зигеля для $Z'(t)$. Импульсом для изучения такого рода случайных процессов является анализ дискретного аналога курьезной формулы Харди и Литтлвуда (1921 г.) в нашей работе [6].

1 Статистический объем тела вращения

1.1 Случайный процесс, порожденный формулой Римана—Зигеля для $Z(t)$

Напомним, что в работе [6], часть 12, исходя из формулы Римана—Зигеля (1), мы построили следующий случайный процесс (см. [6], (68), $\varrho = 0$):

$$\Phi_1(t) = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\alpha_1 + \varphi_n),$$
$$\alpha_1 = \vartheta_1(t) - t\ln n, \quad t \in \langle T, T+U \rangle, \quad U \in (0, \sqrt{T} \rangle, \tag{4}$$

где φ_n, $n < P$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на промежутке $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Далее, относительно закона распределения сечения $\Phi_1(\bar{t})$, $\bar{t} \in \langle T, T+U \rangle$, была в работе [6], пункт 12.2., доказана теорема, которую мы теперь сформулируем так.

Лемма 1. Закон распределения любого сечения $\Phi_1(\bar{t})$, $\bar{t} \in \langle T, T+U \rangle$, является асимптотически нормальным с математическим ожиданием и дисперсией равными

$$m_1 = 0, \quad D_1 \sim 2\ln P$$

соответственно, при $T \to \infty$.

Замечание 1. В связи с Леммой 1 мы в дальнейшем используем следующую асимптотическую плотность распределения любого сечения $\Phi_1(\bar{t})$, $\bar{t} \in \langle T, T+U \rangle$:

$$w_\infty(\Phi_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \ln P}} e^{-\alpha\Phi_1^2}, \quad \alpha = \frac{1}{4\ln P}. \tag{5}$$

1.2 Определение статистического объема

Рассмотрим следующий случайный процесс:

$$\Phi_3 = \Phi_3(U; T) = \pi \int_T^{T+U} \Phi_1^2(t)\,\mathrm{d}t, \quad U \in (0, \sqrt{T} \rangle \tag{6}$$

где интеграл понимается как интеграл Римана от реализаций случайного процесса $\Phi_1^2(t)$. Так как реализация случайного процесса $\Phi_1(t)$, соответствующая любой точке

$$(\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_{[P]})$$

$[P]$ — мерного куба

$$-\pi \leqq \varphi_n \leqq \pi, \quad n = 1, \ldots, [P],$$

является непрерывной функцией (см. (4)), то, использование интеграла Римана в (6) обосновано.

Для математического ожиданиа случайного процесса Φ_3 имеем:

$$M[\Phi_3] = \pi \int_T^{T+U} M[\Phi_1^2(t)]\, \mathrm{d}t, \tag{7}$$

(математическое ожидание интеграла равно интегралу от математического ожидания).

В связи с соотношением (7), (см. также (5)), мы вводим следующее.

Определение 1. Неслучайную величину

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1^2 \,.\, w_\infty(\Phi_1)\, \mathrm{d}\Phi_1 = M_\infty[\Phi_1^2(t)] \tag{8}$$

назовем асимптотическим математическим ожиданием (А. М. О.) случайного процесса $\Phi_1^2(t)$, $t \in \langle T, T+U \rangle$ и неслучайную величину

$$\pi \int_T^{T+U} M_\infty[\Phi_1^2(t)]\, \mathrm{d}t = M_\infty[\Phi_3] \tag{9}$$

назовем А. М. О. случайного процесса $\Phi_3(U; T)$, $U \in (0, \sqrt{T}\rangle$.

Замечание 2. Использование А. М. О.

$$M_\infty[\Phi_1^2(t)]$$

соответствует нашему желанию, обойти анализ поправок к плотности вероятности $w_\infty(\Phi_1)$ — вешь не нужную для наших ближайших целей.

Далее, объем тела, образованного вращением вокруг оси Ot площади

$$T \leqq t \leqq T + U, \quad 0 \leqq y \leqq |Z(t)|, \tag{10}$$

равен

$$V = V(U;\, T) = \pi \int_T^{T+U} Z^2(t)\, \mathrm{d}t. \tag{11}$$

В силу (1),

$$Z(t) = Z_1 + R_1, \quad t \in \langle T, T+U \rangle,$$

где

$$Z_1 = 2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\{\vartheta_1(t) - t\ln n\}, \quad R_1 = O(T^{-1/4}). \tag{12}$$

Так как (см. [10], стр. 109, 110)

$$Z_1(t) = O(T^{1/6}\ln T), \quad t\in\langle T, T+U\rangle,$$

то,

$$Z^2(t) = Z_1^2 + O(T^{-1/12}\ln T),$$

и, следовательно,

$$V = \pi\int_T^{T+U}\{Z_1(t)\}^2\,\mathrm{d}t + O(UT^{-1/12}\ln T). \tag{13}$$

Теперь, сравнение формул (4), (12) и (7), (13), (см. также (9)), приводит нас к определению статистического объема упоминавшегося тела вращения.

Определение 2. Величину

$$M_\infty[\Phi_3],$$

при любом фиксированном $U\in(0, \sqrt{T}\rangle$, назовем статистическим объемом тела вращения, образованного упоминавшимся вращением площади (10).

1.3 Асимптотическое равенство между статистическим объемом и объемом тела вращения

Справедлива

Теорема 1 (основная). Имеет место:

$$M_\infty[\Phi_3] \sim V(U;\, T) \sim \pi U\ln T, \tag{14}$$

для

$$T^{5/12}\ln^2 T \leqq U \leqq \sqrt{T},$$

при $T\to\infty$, т.е. статистический объем упоминавшегося тела вращения асимптотически равен его объему.

Доказательство. В силу формулы

$$\int_0^\infty x^\gamma e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right), \tag{15}$$

при $\gamma = 2$, получаем (см. (5), (8))

$$M_\infty[\Phi_1^2(t)] = \frac{1}{\sqrt{\pi \ln P}} \cdot \frac{1}{2}(4\ln P)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2\ln P \sim \ln T,$$

и, (см. (9)):

$$M_\infty[\Phi_3] \sim \pi U \ln T, \tag{16}$$

при любом фиксированном $U \in (0, \sqrt{T}\rangle$. Далее, в силу формулы Харди —Литтлвуда—Ингама, с оценкой Титчмарша для остаточного члена, (см. [10], стр. 142, 145),

$$\int_T^{T+U} Z^2(t)\,\mathrm{d}t = U\ln^2\frac{T}{2\pi} + 2cU + O(T^{5/12}\ln^2 T), \tag{17}$$

где c — постоянная Эйлера, из (11), следует:

$$V(U;\, T) \sim \pi U \ln T, \tag{18}$$

при любом фиксированном $U \in \langle T^{5/12}\ln^2 T, T\rangle$. Теперь, из (16), (18), следует (14).

2 Статистическая площадь криволинейной трапеции

2.1 Определение статистической площади

Рассмотрим следующий случайный процесс:

$$\Phi_4 = \Phi_4(U;\, T) = \int_T^{T+U} |\Phi_1|\,\mathrm{d}t, \quad U \in (0, \sqrt{T}\rangle.$$

Будем действовать как в пункте 1.2. Для математического ожидания случайного процесса Φ_4 имеем:

$$M[\Phi_4] = \int_T^{T+U} M[|\Phi_1|]\,\mathrm{d}t, \tag{19}$$

и, аналогично случаю (8), (9), вводим А. М. О.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1| w_\infty(\Phi_1)\,\mathrm{d}\Phi_1 = M_\infty[|\Phi_1|],$$

$$\int_T^{T+U} M_\infty[|\Phi_1|]\,\mathrm{d}t = M_\infty[\Phi_4].$$

Далее, площадь криволинейной трапеции, соответствующей кривой $|Z(t)|$, $t \in \langle T, T+U\rangle$, выражается так:

$$S = S(U;\, T) = \int_T^{T+U} |Z(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

Так как, (см. (12)),

$$\int_T^{T+U} \big||Z| - |Z_1|\big|\,\mathrm{d}t \leqq \int_T^{T+U} |Z - Z_1|\,\mathrm{d}t = O(UR_1) = O(UT^{-1/4}),$$

то:

$$S = \int_T^{T+U} |Z_1|\,\mathrm{d}t + O(UT^{-1/4}). \tag{21}$$

Теперь, сравнение формул (4), (12) и (19), (21) приводит нас к определению статистической площади криволинейной трапеции.

Определение 3. Величину

$$M_\infty[\Phi_4],$$

при любом фиксированном $U \in (0, \sqrt{T}\rangle$, назовем статистической площадью криволинейной трапеции, соответствующей обычным образом кривой $|Z(t)|$, $t \in \langle T, T + U\rangle$.

2.2 Статистическая площадь удовлетворяет основному неравенству

Прежде всего, (см. (17)),

$$\int_T^{T+U} |Z(t)|\,\mathrm{d}t \leqq \sqrt{U}\left\{\int_T^{T+U} Z^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} < (1+\varepsilon)U\sqrt{\ln T},$$

где $0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число. Далее, Рамахандра доказал следующую оценку снизу (см. [12]):

$$\int_T^{T+U} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)\right| \mathrm{d}t = \int_T^{T+U} |Z(t)|\,\mathrm{d}t > AU(\ln T)^{1/4}, \quad U \in \langle T^\varepsilon, T\rangle.$$

Следовательно, площадь S криволинейной трапеции (см. (20)), должна удовлетворять следующему основному неравенству:

$$AU(\ln T)^{1/4} < S < (1+\varepsilon)U\sqrt{\ln T}, \quad U \in \langle T^\varepsilon, \sqrt{T}\rangle. \tag{22}$$

Справедлива

Теорема 2.

$$AU(\ln T)^{1/4} < M_\infty[\Phi_4] < (1+\varepsilon)U\sqrt{\ln T}, \quad U \in \langle T^\varepsilon, \sqrt{T}\rangle, \tag{23}$$

при $T \to \infty$, т. е. статистическая площадь криволинейной трапеции удовлетворяет основному неравенству (22).

Доказательство. Так как, из формулы (15) при $\gamma = 1$, получаем (см. (5))

$$\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha} = 2\ln P,$$

то:

$$M_\infty[\Phi_4] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}U\sqrt{\ln P} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}U\sqrt{\ln T}, \tag{24}$$

и, следовательно, $M_\infty[\Phi_4]$ удовлетворяет неравенству (23) при $T\to\infty$. Теорема 2 доказана.

Относительно связи между площадью и статистической площадью соответствующим криволинейной трапеции (ср. (22)—(24)), мы сформулируем следующее предположение.

Гипотеза 1.

$$S = S(U;\,T) \sim M_\infty[\Phi_4] \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}U\sqrt{\ln T}, \quad U\in\langle T^{1/6+\varepsilon}, \sqrt{T}\rangle,$$

при $T\to\infty$.

Замечание 3. Теоремы 1, 2 мы считаем аргументом в пользу этой гипотезы.

Замечание 4. Ограничение $U \geqq T^{1/6+\varepsilon}$ соответствует предположению, что поведение величины $S(U;\,T)$ при таких значениях U можно считать «установившимся».

Б связи с этим замечанием напомним, что для малых U существуют значительные флюктуации в поведении величины $S(U;\,T)$; по этому поводу см. например поведение графика функции $Z(t)$ в окрестности первой пары нулей Д. Лемера (см. [11], стр. 296, 297).

2.3 *Площади фигур, соответствующих положительным и отрицательным участкам графика функции* $Z(t)$, $t\in\langle T, T+H\rangle$

В работе [5] мы доказали следующую теорему:

$$\int_{G_1^{(+)}(x)\cup G_2^{(+)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t \sim -\int_{G_1^{(-)}(x)\cup G_2^{(-)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t, \tag{25}$$

при $T\to\infty$, где (см. [3], ср. [4]),

$$G_1(x) = \bigcup_{T\leqq t_{2\nu}\leqq T+H}\{t\colon t_{2\nu}(-x) < t < t_{2\nu}(x)\}, \quad x\in(0,\,\pi/2\rangle,$$

$$G_2(y) = \bigcup_{T\leqq t_{2\nu+1}\leqq T+H}\{t\colon t_{2\nu+1}(-y) < t < t_{2\nu+1}(y)\}, \quad y\in(0,\,\pi/2\rangle,$$

$$H = T^{1/6}\psi^2\ln^5 T,$$

($\psi = \psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к ∞ функция), и,

$$G_1^{(+)}(x) = \{t\colon t \in G_1(x),\ Z(t) > 0\}, \ldots .$$

Пусть, далее,

$$\bar{G}_1^{(+)} = G_1^{(+)}\left(\frac{\pi}{2}\right), \ldots ;$$

напомним, что

$$\operatorname{mes}\{\bar{G}_1^{(+)} \cup \bar{G}_1^{(-)} \cup \bar{G}_2^{(+)} \cup \bar{G}_2^{(-)}\} \sim H.$$

Теперь, из (25), получаем

Следствие. По Гипотезе 1:

$$\int_{\bar{G}_1^{(+)} \cup \bar{G}_2^{(+)}} Z(t)\,\mathrm{d}t \sim -\int_{\bar{G}_1^{(-)} \cup \bar{G}_2^{(-)}} Z(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} H\sqrt{\ln T},\ T \to \infty.$$

3 Статистическая длина дуги кривой $Z(t)$, $t \in \langle T, T+U \rangle$

3.1 Случайный процесс, порожденный формулой Римана—Зигеля для $Z'(t)$

В работе [2], стр. 81, была получена следующая формула:

$$Z'(t) = -2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{P}{n} \cdot \sin(\vartheta - t\ln n) + O(T^{-1/4}\ln T),$$

$$t \in \langle T, T+U \rangle, \quad U \in (0, \sqrt{T}\rangle.$$

Так как (см. [10], стр. 383)

$$\vartheta = \vartheta(t) = \vartheta_1(t) + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad \vartheta_1(t) = \frac{1}{2} t \ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi$$

то,

$$Z'(t) = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{P}{n} \cdot \cos\left\{\vartheta_1(t) - t\ln n + \frac{\pi}{2}\right\} + O(T^{-1/4}\ln T),$$

$$t \in \langle T, T+U \rangle, \quad U \in (0, \sqrt{T}\rangle.$$

Эта формула порождает следующий случайный процесс(ср. (4)):

$$\Phi_2(t) = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{P}{n} \cdot \cos(\alpha_2 + \varphi_n),$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2},\ t \in \langle T, T+U \rangle,\ U \in (0, \sqrt{T}\rangle. \tag{26}$$

3.2 *Закон распределения любого сечения случайного процесса $\Phi_2(t)$*

Справедлива

Лемма 2. Закон распределения любого сечения $\Phi_2(\bar{t})$, $\bar{t} \in \langle T, T + U \rangle$ является асимптотически нормальным с математическим ожиданием и дисперсией раввными

$$m_2 = 0, \quad D_2 \sim \frac{2}{3} \ln^3 P$$

соответственно, при $T \to \infty$.

Доказательство. В силу (26) имеем:

$$\Phi_2(\bar{t}) = \sum_{n < P} X_n, \quad X_n = \frac{2}{\sqrt{n}} \ln \frac{P}{n} \cos(\alpha_2 + \varphi_n).$$

Так как φ_n, $n < P$ — независимые случайные величины, то независимыми являютсл и величины X_n. Далее, так как φ_n, $n < P$ — равномерно распределены на промежутке $\langle -\pi, \pi \rangle$, то для математических ожиданий и дисперсий, получаем:

$$M[X_n] = 0, \quad D[X_n] = \frac{2}{n} \ln^2 \frac{P}{n},$$

и, следовательно,

$$m_2 = \sum_{n < P} M[X_n] = 0, \quad D_2 = \sum_{n < P} D[X_n] = 2 \sum_{n < P} \frac{1}{n} \ln^2 \frac{P}{n}.$$

Выражение для дисперсии D_2 получим с помощью формулы Эйлера —Маклорена ([10], стр. 19) для функции

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln^2 \frac{P}{x}, \quad x \in \langle 1, P \rangle.$$

Так как

$$f'(x) = O\left(\frac{\ln^2 P}{x^2}\right), \quad f(1), f(P) = O(1),$$

то,

$$\sum_{n < P} f(n) = \int_1^P \ln^2 \frac{P}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} + O\left(\ln^2 P \cdot \int_1^P \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right) + O(1) = \frac{1}{3} \ln^3 P + O(\ln^2 P),$$

и, следовательно,

$$D_2 \sim \frac{2}{3} \ln^3 P, \quad T \to \infty.$$

Теперь проверим выполнение условия в центральной предельной теореме Ляпунова. Прежде всего получим оценку для суммы абсолютных центральных моментов третьего порядка. Имеем,

$$M[|X_n - M[X_n]|^3] = M[|X_n|^3] =$$

$$= \frac{8}{n^{3/2}} \ln^3 \frac{P}{n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3(\alpha_1 + \varphi_n)| \, d\varphi_n < \frac{8}{n^{3/2}} \ln^3 \frac{P}{n},$$

и, следовательно,

$$\sum_{n<P} M[|X_n|^3] \leqq 8 \sum_{n<P} \frac{1}{n^{3/2}} \ln^3 \frac{P}{n} < 8 \ln^3 P \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = A \ln^3 P.$$

Наконец, ($P \to \infty \Leftrightarrow T \to \infty$), так как

$$B_P = D_2^{1/2} \sim \sqrt{\frac{2}{3}} \ln^{3/2} P,$$

то

$$\frac{1}{B_P^3} \cdot \sum_{n<P} M[|X_n|^3] < A \frac{\ln^3 P}{\ln^{9/2} P} = \frac{A}{\ln^{3/2} P} \to 0, \quad P \to \infty,$$

т.е. условие Ляпунова выполнено.

Замечание 5. В связи с Леммой 2, мы в дальнейшем используем следующую асимптотическую плотность распределения любого сечения $\Phi_2(\bar{t})$, $\bar{t} \in \langle T, T+U \rangle$:

$$w_\infty(\Phi_2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{1}{\ln^{3/2} P} e^{-\beta\Phi_2^2}, \quad \beta = \frac{3}{4 \ln^3 P}. \tag{27}$$

3.3 Определение статистической длины дуги кривой $Z(t)$, $t \in \langle T, T+U \rangle$.

Рассмотрим случайный процесс:

$$\Phi_5 = \Phi_5(U; T) = \int_T^{T+U} \sqrt{1 + \{\Phi_2(t)\}^2} \, dt, \quad U \in (0, \sqrt{T}\rangle.$$

Будем действовать как в пункте 1.2. Для математического ожидания случайного процесса Φ_5 имеем

$$M[\Phi_5] = \int_T^{T+U} M[\sqrt{1 + \Phi_2^2}] \, dt \tag{28}$$

и, аналогично случаю (8), (9), вводим А. М. О., (см. (27)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1+\Phi_2^2}\, w_\infty(\Phi_2)\, \mathrm{d}\Phi_2 = M_\infty[\sqrt{1+\Phi_2^2}] \tag{29}$$

$$\int_T^{T+U} M_\infty[\sqrt{1+\Phi_2^2}]\, \mathrm{d}t = M_\infty[\Phi_5]. \tag{30}$$

Далее, длина дуги кривой $Z(t)$, $t \in \langle T, T+U \rangle$ выражается так:

$$L = L(U;\, T) = \int_T^{T+U} \sqrt{1+\{Z'(t)\}^2}\, \mathrm{d}t. \tag{31}$$

В силу (2),

$$Z'(t) = Z_2 + R_2, \quad t \in \langle T, T+U \rangle,$$

где

$$Z_2 = 2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{P}{n} \cos\left\{\vartheta_1(t) - t\ln n + \frac{\pi}{2}\right\}, \tag{32}$$

$$R_2 = O(T^{-1/4}\ln T).$$

Так как

$$\ln\frac{P}{n} = O(\ln P), \quad \ln\frac{P}{n-1} > \ln\frac{P}{n}, \quad 2 \leqq n < P,$$

то, способом [10], стр. 109, 110, получаем оценку

$$Z_2 = O(T^{1/6}\ln^2 T).$$

Значит,

$$\{Z'(t)\}^2 = Z_2^2 + O(T^{-1/12}\ln^3 T),$$

и,

$$\sqrt{1+\{Z'(t)\}^2} = \sqrt{1+Z_2^2}\cdot\left\{1 + O\left(\frac{T^{-1/12}\ln^3 T}{1+Z_2^2}\right)\right\} = \sqrt{1+Z_2^2} + O(T^{-1/12}\ln^3 T).$$

Следовательно,

$$L = \int_T^{T+U} \sqrt{1+Z_2^2}\, \mathrm{d}t + O(UT^{-1/12}\ln^3 T). \tag{33}$$

Теперь, сравнение формул (26), (32) и (28), (33), приводит нас к определению статистической длины дуги кривой.

Определение 4. Величину

$$M_\infty[\Phi_5],$$

при любом фиксурованном $U \in (0, \sqrt{T}\rangle$, назовем статистической длиной дуги кривой $Z(t)$, $t \in \langle T, T+U \rangle$.

3.4 Лемма, касающаяся $M_\infty[\sqrt{1+\Phi_2^2}]$; использование формулы Шлефли и модифицированных функций Бесселя

Справедлива
Лемма 3.

$$M_\infty[\sqrt{1+\Phi_2^2}] = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \ln^{3/2} T + O\left(\frac{\ln\ln T}{\ln^{3/2} T}\right), \tag{34}$$

при $T \to \infty$.

Доказательство. В силу (27), (29),

$$M_\infty[\sqrt{1+\Phi_2^2}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\ln^{3/2} P} \cdot F(\beta), \tag{35}$$

где

$$F(\beta) = \int_0^\infty \sqrt{1+x^2}\, e^{-\beta x^2} dx, \quad \beta = \frac{3}{4\ln^3 P}. \tag{36}$$

Мы должны получить асимптотическую формулу для $F(\beta)$ при малых β, $(P \to \infty)$.

Прежде всего, после подстановки $x = \operatorname{sh} t$ получаем:

$$F(\beta) = \int_0^\infty \operatorname{ch}^2 t \,.\, e^{-\beta \operatorname{sh}^2 t} dt =$$
$$= \frac{1}{2} e^{\frac{\beta}{2}} \cdot \int_0^\infty (\operatorname{ch} 2t + 1) e^{-\frac{\beta}{2}\operatorname{ch} 2t} dt =$$
$$= \frac{1}{4} e^{\frac{\beta}{2}} \cdot \int_0^\infty (\operatorname{ch} t + 1) e^{-\frac{\beta}{2}\operatorname{ch} t} dt.$$

По формуле Шлефли (см. [7], стр. 201, 206)

$$\int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} \nu t \, dt = K_\nu(z), \quad \operatorname{Re}\{z\} > 0,$$

где $K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода, имеем:

$$F(\beta) = \frac{1}{4} e^{\frac{\beta}{2}} \left\{ K_0\left(\frac{\beta}{2}\right) + K_1\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\}. \tag{37}$$

Далее, воспользуемся представлением функций $K_0(z)$, $K_1(z)$ бесконечными рядами. Имеем (см. [7], стр. 96)

$$K_0(z) = -I_0(z) \,.\, \ln \frac{z}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} \Psi(m+1),$$

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2m}} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!} \left\{\ln \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \Psi(m+1) - \frac{1}{2} \Psi(n+m+1)\right\},$$

где ([7], стр. 91)

$$I_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

и (см. [9], стр. 20, 21)

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = -c - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+1}\right),$$

(c — постоянная Эйлера).

Замечание 6. Любопытно отметить, что ряд, выражающий $K_0(z)$, рассматривал Риман в мемуаре: «К теории цветных колец Нобили», (см. [1], стр. 421).

Так как

$$\Psi(m+1), \quad \Psi(m+2) = O(1), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

и (см. (36))

$$\frac{\beta}{2} = \frac{3}{8 \ln^3 P}, \quad \ln \frac{\beta}{4} = -3 \ln\ln P + O(1),$$

$$I_0\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\ln^6 P}\right),$$

то,

$$K_0\left(\frac{\beta}{2}\right) = 3 \ln\ln P + O(1),$$

$$K_1\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2}{\beta} + O(\beta \ln \beta) = \frac{8}{3} \ln^3 P + O\left(\frac{\ln\ln P}{\ln^3 P}\right).$$

Следовательно, (см. (37)):

$$F(\beta) = \frac{2}{3} \ln^3 P + O(\ln\ln P),$$

и, отсюда (см. (35)), следует (34).

3.5 Гипотеза относительно длины дуги рквивой $Z(t)$, $t \in \langle T, T+U \rangle$

Из (30), в силу (34), получаем следующее выражение для статистической длины дуги кривой:

$$M_\infty[\Phi_5] \sim \frac{1}{\sqrt{6\pi}} U \ln^{3/2} T, \quad T \to \infty.$$

Относительно связи между длиной дуги кривой и статистической длиной дуги кривой, мы сформулируем следующее предположение.

Гипотеза 2.

$$L = L(U;\ T) \sim M_\infty[\Phi_5] \sim \frac{1}{\sqrt{6\pi}} U \ln^{3/2} T,$$

$$U \in \langle T^{1/6+\varepsilon}, \sqrt{T} \rangle,$$

при $T \to \infty$.

Ограничение $U \geqq T^{1/6+\varepsilon}$ соответствует Замечанию 4 и сказанному после него (с заменой $S(U;\ T) \to L(U,\ T)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Риман, Б.: Сочинения, ОГИЗ, Москва—Ленинград 1948.
2. Мозер, Ян: О корнях уравнения $Z'(t) = 0$, Acta Arith., 40 (1981), 79—89.
3. Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана—Зигеля, Acta Arith., 42 (1982), 1—10.
4. Мозер, Ян: Некоторые следствия из формулы Римана—Зигеля, Труды Мат. инст. АН СССР, (1984), т. 163, стр. 183—186.
5. Мозер, Ян: О поведении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., 46—47 (1985), 41—48.
6. Мозер, Ян: Курьезная формула Харди—Литтлвуда и некоторые случайные процессы, порожденные формулой Римана—Зигеля, Acta Math. Univ. Comen., (в редакции).
7. Ватсон, Г. Н.: Теория бесселевых функций, ИИЛ. Москва 1949.
8. Дирак, П. А. М.: Принципы квантовой механики, ГИФМЛ, Москва 1960.
9. Уиттекер, Э. Т.—Ватсон, Дж. Н.: Курс современного анализа, II, ГИФМЛ, Москва 1963.

10. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, ИИЛ, Москва 1953.
11. Lehmer, D. H.: On the roots of the Riemann zeta-function, Acta Math., 95 (1956), 291—298).
12. Ramachandra, K.: Some remarks on the mean-value of the Riemann zeta-function and other Dirichlet series, II, Hardy-Ramanujan J., 3 (1980), 1—24.

Адрес автора:

Ján MOSER
Katedra mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступило: 16. 12. 1986

SÚHRN

LJAPUNOVOVA VETA A ŠTATISTICKÁ DĹŽKA JEDNEJ KRIVKY V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

Na základe Riemannovho—Siegelovho vzorca pre $Z(t)$ je definovaný istý náhodný proces $\Phi_1(t)$, $t \in \langle T, T + U \rangle$, $U \in (0, \sqrt{T} \rangle$. Podľa Ljapunovovej centrálnej limitnej vety, je distribučná funkcia ľubovoľného rezu $\Phi_1(\bar{t})$, $\bar{t} \in \langle T, T + U \rangle$ asymptoticky normálna. Integrovaním Φ_1^2 na intervale $\langle T, T + U \rangle$, dostaneme nový náhodný proces Φ_3 (integrál sa chápe ako Riemannov integrál po spojitých realizáciách procesu Φ_1^2). Definovaný je pojem asymptotickej strednej hodnoty $M_\infty[\Phi_3]$. Porovnanie vzťahu pre $M_\infty[[\Phi_3]$ so vzťahom pre objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy $T \leqq t \leqq T + U$, $0 \leqq y \leqq |Z(t)|$ okolo osi Ot, nás privádza k definícii: $M_\infty[\Phi_3]$ = štatistický objem spomenutého rotačného telesa, pre ľubovoľné pevné $U \in (0, \sqrt{T} \rangle$. Dokázaná je veta (základná): štatistický objem spomenutého rotačného telesa sa asymptoticky rovná (pri $T \to \infty$) objemu tohto telesa pre $U \in \langle T^{5/12} \ln^2 T, \sqrt{T} \rangle$. Analogické procedúry, ako pri dôkaze vety, nás privádzajú k nasledujúcim hypotézam:

$$S \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, U \sqrt{\ln T}, \quad L \sim \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\, U \ln^{3/2} T, \quad T \to \infty,$$

pre $U \in \langle T^{1/6+\varepsilon}, \sqrt{T} \rangle$, ($0 < \varepsilon$-ľubovoľne malé číslo), kde S je plošný obsah krivočiareho lichobežníka, zodpovedajúceho grafu funkcie $|Z((t)|$, $t \in \langle T, T + U \rangle$ a L je dĺžka krivky $Z(t)$, $t \in \langle T, T + U \rangle$.

SUMMARY

LJAPUNOV'S THEOREM AND THE STATISTICAL LENGHTH OF A CURVE IN THE THEORY OF RIEMANN ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

On the basis of Riemann—Siegel formula for $Z(t)$, certain random process $\Phi_1(t)$, $t \in \langle T, T + U \rangle$; $U \in (0, \sqrt{T} \rangle$ is defined. According to Ljapunov central limit theorem, the distribution function of any section $\Phi_1(\bar{t})$, $\bar{t} \in \langle T, T + U \rangle$ is asymptotically normal. Integrating Φ_1^2 over $\langle T, T + U \rangle$, we obtain a new random process Φ_3, (the considered integral is the Riemann integral over continuous realizations of the process Φ_1^2). The notion of the asymptotic mean-value $M_\infty[\Phi_3]$

is defined. A comparison of $M_\infty[\Phi_3]$ with the formula for the volume of solid of revolution of the rotating surface $T \leqq t \leqq T+U$, $0 \leqq y \leqq |Z(t)|$ about the axis Ot, suggests the following definition: $M_\infty[\Phi_3]$ = statistical volume of the mentioned solid of revolution for any given $U \in (0, \sqrt{T}\rangle$. The (fundamental) theorem is claims: the statistical volume of the considered solid of revolution is asymptotically equal (for $T \to \infty$) to the volume of this body for $U \in \langle T^{5/12} \ln^2 T, \sqrt{T}\rangle$. Analogical procedures to those used in the proof of Theorem lead to the following hypothesis:

$$S \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} U \sqrt{\ln T}, \quad L \sim \frac{1}{\sqrt{6\pi}} U \ln^{3/2} T, \quad T \to \infty,$$

for $U \in \langle T^{1/6+\varepsilon}, \sqrt{T}\rangle$, ($0 < \varepsilon$-arbitrary number) where S is the area of the trapezoid formed by the graph of $|Z(t)|$, $t \in \langle T, T+U\rangle$ and L is the arc lenghth of the curve $Z(t)$, $t \in \langle T, T+U\rangle$.