UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LII—LIII—1987

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА И УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА—ФРИДМАНА II

ЯН МОЗЕР, Братислава

Введение

В работе [12], (см. также Добавления к работам [9], [10]) были применены свойства дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s = \sigma + \mathrm{i}t$, на критической прямой $\sigma = 1/2$, для построения бесконечного множества моделей сферической Вселенной, (существенную роль при этом играла гипотеза Римана о нулях функции $\zeta(s)$). Напомним, что в основные уравнения релятивистской космологии — в уравнения Эйнштейна—Фридмана:

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t) &= \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + \frac{kc^2}{R^2}, \\ \varkappa p(t) &= -\frac{2R''}{R} - \left(\frac{R'}{R}\right)^2 - \frac{kc^2}{R^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

мы подставили

$$\begin{aligned} R(t) &= \alpha(t_0)|Z(t)|, \quad t,\, t_0 \in (\gamma', \gamma''), \quad k = 1, \\ \alpha(t_0) &= \frac{c}{|Z(t_0)|}\left\{\beta\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad 1 < \beta < 2, \end{aligned} \tag{2}$$

где, (см. [16], стр. 94),

$$\begin{aligned} Z(t) &= e^{\mathrm{i}\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right), \\ \vartheta(t) &= -\frac{1}{2}t\ln\pi + \operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4} + \mathrm{i}\frac{t}{2}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что термин «уравнения Эйнштейна—Фридмана» вполне соответствует высказываниям А. Эйнштейна, (см. [18], стр. 350, 599).

Из (2) следует, что радиус Вселенной отождествляется, в основном, с функцией

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)\right|. \tag{4}$$

Бесконечное множество нулей γ функции (4) порождает бесконечное множество моделей сферической Вселенной; для всякого промежутка (γ', γ''), при достаточно большом $\gamma' > 0$, построена одна модель, (γ', γ'' — соседние нули функции (4)).

Так как

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \quad \sigma > 1, \tag{5}$$

где p пробегает все простые числа, то можно сказать, что, в построенных моделях, эволюция радиуса Вселенной определяется законом распределения простых чисел в натуральном ряду. Заметим, что функция $\zeta(s)$, определенная бесконечным произведением (5) в полуплоскости $\sigma > 1$, имеет аналитическое продолжение на всю s — плоскость, за исключением точки $s = 1$, где $\zeta(s)$ имеет простой полюс с вычетом 1.

Далее, для промежутка (γ', γ'') была в работе [12] определена физическая область $F = F(\gamma', \gamma'')$, т.е. множество таких точек $t \in (\gamma', \gamma'')$, для которых имеют место неравенства

$$0 \leqq p(t) \leqq \frac{c^2}{3} \varrho(t). \tag{6}$$

Наконец, в работе [12] была доказана следующая теорема: физическая область существует для всех промежутков (γ', γ''), начиная с достаточно большого $\gamma' > 0$.

В настоящей работе мы более подробно изучим поведение функций $\varrho(t;\ \beta)$, $p(t;\ \beta)$ в физической области $F(\gamma', \gamma'')$, а также возможность включения отрицательных давлений.

(A) В вопросе о поведении плотности вещества $\varrho(t;\ \beta)$ мы получим окончательный результат: функция $\varrho(t;\ \beta)$ имеет «правильное» поведение в физической области, т.е. $\varrho(t;\ \beta)$ достигает положительного локального минимума в точке $t_0 \in F(\gamma', \gamma'')$, являющегося, одновременно, глобальным минимумом на промежутке (γ', γ''), для всех достаточно больших $\gamma' > 0$ и любого $\beta \in (1, 2)$, (последовательность $\{t_0\}$ автор изучал в работах [8]—[11], [13]).

(B) Вопрос о поведении давления $p(t;\ \beta)$ в физической области, является более трудным. Даже в окрестности точки t_0 имеется несколько возможностей для поведения $p(t;\ \beta)$. Дело в том, что вопрос о возрастании или убывании функции $p(t;\ \beta)$ в окрестности точки t_0, связан со знаком интересной суммы

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0 - \gamma)^3}. \tag{7}$$

Знак суммы (7), в свою очередь, существенно зависит от **асимметрии** положения точки $t_0 \in (\gamma', \gamma'')$ относительно точек γ', γ'', (некоторые вопросы, связанные с этой асимметрией, автор изучал в работе [13]).

В левой окрестности замечательной второй пары нулей Лемера ([3], стр. 107)

$$\frac{1}{2} + 17\,143,\ 7\,319i\,, \quad \frac{1}{2} + 17\,143,\ 7\,673i$$

функции $\zeta(s)$, мы обнаружили конфигурацию $\bar{\gamma}' < \bar{t}_0 < \bar{\gamma}''$, обладающую нужной для нас асимметрией, где

$$\bar{t}_0 = 2\pi\bar{\tau}_0\,, \quad 2728,\ 435 < \bar{\tau}_0 < 2728,\ 445\,.$$

График функции $Z(t)$ в окрестности второй пары нулей Лемера см. в работе Меллера [7], стр. 248, (Меллер, независимо от Лемера, обнаружил вторую пару Лемера).

На основе подробного анализа конфигурации $\bar{\gamma}' < \bar{t}_0 < \bar{\gamma}''$, мы получили следующий результат, при некотором добавочном условии для β:

(а) в промежутке $(\bar{\gamma}',\ \bar{t}_0)$ существует точка положительного локального максимума функции $p(t;\ \beta)$,

(в) если $\bar{t}_1$ — ближайшая слева к t_0 точка положительного локального максимума функции $p(t;\ \beta)$, то функция

$$p(t;\ \beta)\,, \quad t \in (\bar{t}_1,\ \bar{t}_0)$$

убывает.

В силу (A), (a), (в) заметим следующее: При некотором добавочном условии для β, промежутку $(\bar{t}_1, \bar{t}_0)$, где $\bar{t}_0$ — точка положительного глобального минимума плотности вещества $\varrho(t;\ \beta)$ и $\bar{t}_1$ — ближайшая слева к $\bar{t}_0$ точка положительного локального масимума давления $p(t;\ \beta)$, соответствует «реалистическая» модель сферической Вселенной, т.е. на промежутке $(\bar{t}_1,\ \bar{t}_0)$ радиус Вселенной **возрастает** и $\varrho(t;\ \beta)$, $p(t;\ \beta)$ — **убывают**.

Особо отметим, что для доказательства свойств (а), (в) надо было вычислять значения функции $Z(t)$ в окрестности точки $\bar{t}_0 = 2\pi\bar{\tau}_0$ с помощью ЭВМ. Для этого мы применили метод Титчмарша, ([5], [6]), использующий формулу Римана—Зигеля ([16], стр. 94)

$$Z(t) = 2 \sum_{n \leqq t_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \{\vartheta(t) - t \ln n\} + O(t^{-1/4}), \quad t_1 = \sqrt{\frac{t}{2\pi}},$$

усовершенствованный Лемером, ([2], [3]). А именно, в асимптотическом выражении для остаточного члена:

$$O(t^{-1/4}) = (-1)^{m-1} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-1/4} Q(t), \quad m = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right],$$

$$Q(t) = \Phi(\vartheta_1) + \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-1/2} \Phi_1(\vartheta_1) + \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-1} \Phi_2(\vartheta_1) +$$

$$+ \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-3/2} \Phi_3(\vartheta_1) + O(t^{-2}), \quad \vartheta_1 = 1 - 2\left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - m\right),$$

использованы численные коэффициенты Лемера для полиномов $\Phi(\vartheta_1)$, $\Phi_1(\vartheta_1)$, ..., $\Phi_3(\vartheta_1)$, (см. [3], стр. 106).

(С) В дискуссиях о космологических вопросах Эйнштейновой теории тяготения, упоминается и возможность существования отрицательных давлений. По этому поводу см. например статьи акад. АН Эст. ССР, Г. И. Наана: [14], стр. 321, 324, [15], стр. 354.

Однако и в этом случае можно думать, что при данной плотности вещества $\varrho(t)$, не должны существовать отрицательные давления $p(t)$, сколь угодно большие по абсолютному значению. В этом направлении кажется естественным следующее обобщение неравенств (6):

$$|p(t)| \leqq \frac{c^2}{3} \varrho(t) \tag{8}$$

Теперь физической областью $F(\gamma', \gamma'')$ назовем множество тех точек $t \in (\gamma', \gamma'')$, которые удовлетворяют неравенству (8).

В предлагаемой работе доказано существование физической области для промежутков (γ', γ''), обладающих следующим свойством: каждый из промежутков (γ', t_0), (t_0, γ'') содержит нечетное число точек перегиба функции $Z(t)$, (некоторые закономерности распределения точек перегиба функции $Z(t)$ изучались автором в работе [10]).

С помощью метода Титчмарша—Лемера мы получили несколько промежутков (γ', γ'') обладающих упоминавшимся свойством, например $(\gamma_{482}, \gamma_{483})$, где 482 — номер нуля функции $Z(t)$, если счет вести от $\gamma_1 \doteq 14,13$, ([16], стр. 384). Весьма вероятно, что существует бесконечное множество промежутков такого рода.

Наконец заметим, что построенные в [12] и в предлагаемой работе воображаемые сферические Вселенные, в которых эволюция радиуса Вселенной определятся законом распределения простых чисел в натуральном ряду, позволяют продемонстрировать красоту свойств дзета-функции Римана, в частности, красоту свойств действительной функции $Z(t)$, порожденной функцией $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$.

1 Поведение плотности вещества (ϱt; β)

1.1. Для плотности вещества $\varrho(t;\ \beta)$ имеем следующее выражение (см. (1), (2)):

$$\frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t;\ \beta)=\frac{c^2}{\alpha^2(t_0)Z^2(t)}+\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2, \tag{9}$$

и отсюда, ($t\in(\gamma',\ \gamma'')$),

$$\frac{\varkappa c^2}{3}\frac{\mathrm{d}\varrho(t;\ \beta)}{\mathrm{d}t}=\frac{2Z'(t)}{Z(t)}\cdot\left(-\frac{Z''(t)}{Z(t)}+\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2+\frac{c^2}{\alpha^2(t_0)Z^2(t)}\right). \tag{10}$$

В силу основного соотношения ([12], (7)):

$$-\frac{Z''(t)}{Z(t)}+\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2=\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2}+O\left(\frac{1}{t}\right) \tag{11}$$

и оценки Литтлвуда ([4], стр. 237):

$$\gamma''-\gamma'<\frac{A}{\ln\ln\gamma'}, \tag{12}$$

получаем

$$\begin{gathered}-\frac{Z''(t)}{Z(t)}+\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2+\frac{c^2}{\alpha^2(t_0)Z^2(t)}=\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2}+\frac{c^2}{\alpha^2(t_0)Z^2(t)}+O\left(\frac{1}{t}\right)> \\ >\frac{1}{(\gamma''-\gamma')^2}+\frac{c^2}{\alpha^2(t_0)Z^2(t)}+O\left(\frac{1}{t}\right)>A(\ln\ln\gamma')^2+O\left(\frac{1}{t}\right)>0;\end{gathered} \tag{13}$$

для достаточно больших $\gamma'>0$. Следовательно, второй сомножитель на правой стороне соотношения (10), в силу (13), в нуль не обращается для $t\in(\gamma',\ \gamma'')$. Первый же сомножитель обращается в нуль в точке t_0, так как

$$Z'(t_0)=0,\quad t_0\in(\gamma',\ \gamma'').$$

Напомним, (см. например [9], Следствие 3), что по гипотезе Римана члены последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$ взаимно отделяются, (γ — корень уравнения $Z(t) = 0$, t_0 — корень уравнения $Z'(t) = 0$, лежащий в промежутке (γ', γ'')). Отсюда следует, что функция $\varrho(t;\ \beta)$ имеет на промежутке (γ', γ'') единственную стационарную точку t_0, для достаточно больших $\gamma' > 0$, при любом $\beta \in (1, 2)$.

1.2. Далее, из соотношения

$$\frac{\varkappa c^2}{3}\frac{d^2\varrho(t;\ \beta)}{dt^2} = -\frac{2c^2}{\alpha^2(t_0)} \cdot \frac{Z''(t)}{Z^3(t)} + 2\left(\frac{d}{dt}\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}\right)^2 +$$

$$+\frac{6c^2}{\alpha^2(t_0)} \cdot \frac{Z'^2(t)}{Z^4(t)} + 2\frac{Z'(t)}{Z(t)}\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\},$$

при $t = t_0$, получаем

$$\frac{\varkappa c^2}{3}\frac{d^2\varrho(t_0;\ \beta)}{dt^2} = \frac{2c^2}{\alpha^2(t_0)} \cdot \frac{1}{Z^2(t_0)}\left\{-\frac{Z''(t_0)}{Z(t_0)}\right\} + 2\left(\frac{d}{dt}\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}\right)^2_{t=t_0} \geqq$$

$$\geqq \frac{2c^2}{\alpha^2(t_0)Z^2(t_0)} \cdot \left\{-\frac{Z''(t_0)}{Z(t_0)}\right\} > 0, \tag{14}$$

так как (см. (11), $t = t_0$, (12)):

$$-\frac{Z''(t_0)}{Z(t_0)} = \sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right) > A(\ln\ln t_0)^2 + O\left(\frac{1}{t_0}\right) > 0,$$

для достаточно больших $t_0 > 0$.

Следовательно, в силу (14), функция $\varrho(t;\ \beta)$ имеет локальный минимум в точке t_0, и, (см. (2), (9)),

$$\frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t_0;\ \beta) = \beta\sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} > 0, \tag{15}$$

при любом $\beta \in (1, 2)$.

1.3. Так как, наконец, пределы

$$\lim_{t\to\gamma'} Z'(t), \quad \lim_{t\to\gamma''} Z'(t)$$

существуют, то, (см. (9)),

$$\lim_{t\to\gamma''-0} \varrho(t;\ \beta) = +\infty, \quad \lim_{t\to\gamma'+0} \varrho(t;\ \beta) = +\infty.$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. Если справедлива гипотеза Римана, то при любом фиксированном $\beta \in (1, 2)$, функция $\varrho(t; \beta)$ достигает в точке $t_0 \in (\gamma', \gamma'')$ положительного локального минимума, являющегося, одновременно, глобальным минимумом функции $\varrho(t; \beta)$ для $t \in (\gamma', \gamma'')$, при достаточном больших $\gamma' > 0$.

1.4. Сравним значения $\varrho(t_0; \beta)$, $p(t_0; \beta)$. Так как (см. (1), (2))

$$\varkappa p(t_0; \beta) = (2 - \beta) \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0 - \gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \tag{16}$$

то, (см. (15), (16)),

$$\frac{\frac{c^2}{3} \varrho(t_0; \beta)}{p(t_0; \beta)} \sim \frac{\beta}{2 - \beta}, \quad t_0 \to \infty, \quad \beta \in (1, 2). \tag{17}$$

Так как в случае $\beta = 1 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число,

$$\frac{\beta}{2 - \beta} = 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

то, в силу (17), делаем

Замечание 1. Для значений β близких к 1, построенные модели сферической Вселенной достигают для $t = t_0$ почти максимальное допустимое давление при соответствующей плотности вещества.

2 Поведение давления $p(t; \beta)$

2.1. Давление $p(t; \beta)$выражается следующей формулой (см. (1), (2), (11)):

$$\varkappa p(t;\beta) = 2 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t - \gamma)^2} - 3 \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 -$$

$$- \beta \left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0 - \gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad 1 < \beta < 2. \tag{18}$$

Если для остаточного члена введем обозначение

$$O\left(\frac{1}{t}\right) = U_1(t), \tag{19}$$

то из (18) получаем ($Z'(t_0) = 0$):

$$\varkappa \frac{\mathrm{d}p(t_0; \beta)}{\mathrm{d}t} = -4 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0 - \gamma)^3} + \frac{\mathrm{d}U_1(t_0)}{\mathrm{d}t}. \tag{20}$$

Как уже было отмечено во Введении (см. пункт (B)), в левой окрестности второй пары нулей Лемера мы обнаружили конфигурацию $\bar{\gamma}' < \bar{t}_0 < \bar{\gamma}''$, где

$$\begin{gathered} \bar{t}_0 = 2\pi\bar{\tau}_0, \quad 2728,435 < \bar{\tau}_0 < 2728,445 \\ 2\pi \cdot 2728,402 < \bar{\gamma}' < 2\pi \cdot 2728,404 \\ 2\pi \cdot 2728,5183 < \bar{\gamma}'' < 2\pi \cdot 2728,5184 . \end{gathered} \tag{21}$$

Расположение $\bar{t}_0$ относительно $\bar{\gamma}'$, $\bar{\gamma}''$ обладает нужной для нас асимметрией:

$$\frac{\bar{\gamma}'' - \bar{t}_0}{\bar{t}_0 - \bar{\gamma}'} > 1,7 .$$

Для оценок величин

$$\varkappa p(\bar{t}_0; \beta), \quad \varkappa \frac{\mathrm{d}p(\bar{t}_0; \beta)}{\mathrm{d}t}$$

(см. (18)—(20)), снизу и сверху соответственно, нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения:

Лемма A.

$$|U_1(t)| < 10^{-7}, \quad t \geqq 1,7 \cdot 10^4 . \tag{22}$$

Лемма B.

$$\left|\frac{\mathrm{d}U_1(\bar{t}_0)}{\mathrm{d}t}\right| < 10^{-11} . \tag{23}$$

Лемма C.

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(\bar{t} - \gamma)^3} > 30 . \tag{24}$$

Оценки (22)—(24) мы докажем в следующих частях работы.

2.2. Теперь мы получим некоторые следствия из (22)—(24). Прежде всего, (см. (21)),

$$\begin{gathered} 0 < \bar{t}_0 - \bar{\gamma}' < 2\pi(2728,445 - 2728,402) = 2\pi \cdot 0,043 \\ 0 < \bar{\gamma}'' - \bar{t}_0 < 2\pi(2728,5184 - 2728,435) = 2\pi \cdot 0,0834 . \end{gathered} \tag{25}$$

Далее, из (18), (19), $t = t_0$, в силу (22), (25), получаем

$$\varkappa p(\bar{t}_0; \beta) = (2 - \beta) \sum_{\gamma} \frac{1}{(\bar{t}_0 - \gamma)^2} + U_1(\bar{t}_0) >$$

$$> (2-\beta)\left\{\frac{1}{(\bar{t}_0-\bar{\gamma}')^2}+\frac{1}{(\bar{\gamma}''-\bar{t}_0)^2}\right\}-10^{-7}>$$

$$>\frac{2-\beta}{4\pi^2}\left\{\frac{1}{0{,}043^2}+\frac{1}{0{,}084^2}\right\}-10^{-7}>$$

$$>\frac{2-\beta}{4\pi^2}\cdot 679-10^{-7}.$$

Теперь, условие

$$p(t_0;\ \beta)>0$$

приводит нас к следующему условию для β:

$$2-10^{-8}>\beta.$$

Итак, из Леммы А получаем

Следствие 1.

$$p(\bar{t}_0,\ \beta)>0 \tag{26}$$

для $\beta\in(1,\ 2-10^{-8})$.

Далее, из (20), в силу (23), (24), получаем:

$$\varkappa\frac{\mathrm{d}p(\bar{t}_0;\ \beta)}{\mathrm{d}t}<-118,\quad \beta\in(1,\ 2). \tag{27}$$

Итак, из Леммы В и С имеем

Следствие 2. Существует $\varepsilon>0$ такое, что функция

$$p(t;\ \beta),\quad t\in\langle\bar{t}_0-\varepsilon,\ \bar{t}_0\rangle$$

убывает для любого фиксированного $\beta\in(1,\ 2)$.

Напомним еще, что имеет место (см. [12], (19) (20)):

$$\lim_{t\to\bar{\gamma}'+0}p(t;\ \beta)=-\infty, \tag{28}$$

для любого фиксированного $\beta\in(1,\ 2)$.

Теперь, из (26)—(28), следует

Теорема 2. Для

$$1<\beta<2-10^{-8} \tag{29}$$

имеет место:

(а) в промежутке $(\bar{\gamma}',\ \bar{t}_0)$ существует точка положительного локального максимума функции $p(t;\ \beta)$, (в) если $\bar{t}_1$ — ближайшая слева к $\bar{t}_0$ точка положительного локального максимума функции $p(t;\,\beta)$, то функция

$$p(t;\,\beta), \quad t\in(\bar{t}_1,\,\bar{t}_0),$$

убывает.

2.3. Напомним, что остаточный член в формуле для $\varkappa p(t;\,\beta)$ (см. (18), (19)), совпадает с остаточным членом в основной формуле (11):

$$-\frac{Z''(t)}{Z(t)}+\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2=\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2}+U_1(t), \tag{30}$$

ведь остаточный член в (18) получается из (1), второе соотношение, после подстановки (2), исключением члена

$$-\frac{Z''(t)}{Z(t)}$$

с помощью (11).

В случае $t\in(\bar{\gamma}',\,\bar{\gamma}'')$, т.е. в окрестности точки $\bar{t}_0$, мы должны несколько изменить доказательство неравенства (13). В силу (21) и Леммы А, имеем:

$$\begin{aligned}-\frac{Z''(t)}{Z(t)}&+\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2+\frac{c^2}{\alpha^2(\bar{t}_0)Z^2(t)}=\\ &=\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2}+\frac{c^2}{\alpha^2(\bar{t}_0)Z^2(t)}+U_1(t)>\\ &>\frac{1}{(t-\bar{\gamma}')^2}-|U_1(t)|>\frac{1}{(\bar{\gamma}''-\bar{\gamma}')^2}-10^{-7}>\\ &>\frac{1}{4\pi^2\cdot 0{,}12^2}-10^{-7}>\frac{68}{4\pi^2}-10^{-7}>0.\end{aligned} \tag{13$'$}$$

Аналогичным образом доказывается неравенство (ср. (14)):

$$\frac{\varkappa c^2}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\varrho(\bar{t}_0,\,\beta)}{\mathrm{d}t^2}>0, \quad \beta\in(1,\,2) \tag{14$'$}$$

Итак, имеет место (ср. Теорему 1)

Замечание 2. Функция $\varrho(t;\beta)$ достигает в точке $\bar{t}_0\in(\bar{\gamma}',\,\bar{\gamma}'')$ положительного локального минимума, являющегося, одновременно, глобальным минимумом функции $\varrho(t;\,\beta)$, $t\in(\bar{\gamma}',\,\bar{\gamma}'')$ для любого фиксированного $\beta\in(1,\,2)$.

Теперь, из Теоремы 2 и Замечания 2, получаем

Следствие 3. Если $\beta\in(1,\,2-10^{-8})$, то промежутку $(\bar{t}_1,\,\bar{t}_0)$, где $\bar{t}_0$ — точка положительного глобального минимума плотности вещества $\varrho(t;\,\beta)$ и $\bar{t}_1$

— ближайшая слева к $\bar{t}_0$ точка положительного локального масимума давления $p(t;\ \beta)$, соответствует «реалистическая» модель сферической Вселенной, т.е. на промежутке $(\bar{t}_1,\bar{t}_0)$ радиус Вселенной возрастает и $\varrho(t;\beta)$, $p(t;\ \beta)$ — убывают.

Весьма вероятно, что существует бесконечное множество «реалистических» моделей сферической Вселенной.

Наконец заметим, что для полного доказательства Теоремы 2, Замечания 2 и Следствия 3, мы должны доказать Леммы A, B, C.

3 Доказательство Леммы A и B

3.1. В этом пункте мы получим явное выражение для остаточного члена $U_1(t)$ в основной формуле (30).

Прежде всего из (3) получаем

$$\frac{\zeta''}{\zeta}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)-\left\{\zeta''\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right\}^2=-\,\mathrm{i}\vartheta''-\frac{Z''(t)}{Z(t)}+\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2, \tag{31}$$

где

$$\zeta'=\frac{\mathrm{d}\zeta(s)}{\mathrm{d}s},\quad Z'=\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Далее, из формулы ([16], стр. 41)

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=b-\frac{1}{s-1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)+\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right),$$

$\Bigl(\varrho=\delta+\mathrm{i}\gamma,\ \delta\in(0,\ 1)$ — нетривиальные нули функции $\zeta(s)$; в случае справедливости гипотезы Римана: $\varrho=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\gamma\Bigr)$, следует

$$\frac{\zeta''}{\zeta}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)-\left\{\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right\}^2=\sum_{\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2}+U_2(t), \tag{32}$$

где

$$U_2(t)=\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right),\quad s=\frac{1}{2}+\mathrm{i}t. \tag{33}$$

Теперь, по известной формуле ([17], стр. 173),

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,\mathrm{d}u}{(u-z)^2}$$

$$\varphi(u) = \int_0^u \left([v] - v + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}v\,, \tag{34}$$

в случае $z = \frac{s}{2} + 1$, получаем:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\ln \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{2(s+2)^2} + \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,\mathrm{d}u}{\left(u + \frac{s}{2} + 1\right)^4},$$

т.е. (см. (33))

$$U_2(t) = -\frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{2(s+2)^2} - \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{s}{2}+1\right)^4},$$

$$s = \frac{1}{2} + \mathrm{i}t\,. \tag{35}$$

Сравнивая (31), (32) и отделяя действительную часть в получившемся соотношении, мы приходим к формуле

$$-\frac{Z''(t)}{Z(t)} + \left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 = \sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} + \mathrm{Re}\{U_2(t)\}\,. \tag{36}$$

Следовательно, (см. (30), (36)),

$$U_1(t) = \mathrm{Re}\{U_2(t)\}\,. \tag{37}$$

3.2. В настоящем пункте мы завершим

Доказательство Леммы А. Из (37), в силу (35), получаем:

$$U_1(t) = -\frac{5}{4}\frac{1}{\frac{25}{4}+t^2} + \frac{\frac{1}{4}-t^2}{\left(\frac{1}{4}+t^2\right)^2} - \frac{\frac{25}{4}-t^2}{2\left(\frac{25}{4}+t^2\right)^2} -$$

$$-\frac{3}{2}\cdot \mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{5}{4}+\mathrm{i}\frac{t}{2}\right)^4}\right\} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4\,. \tag{38}$$

Очевидно, ($t > 1$),

$$|V_1| < \frac{5}{4t^2}, \quad |V_2| < \frac{5}{4t^2}, \quad |V_3| < \frac{29}{4t^2}. \tag{39}$$

Так как

$$\int_0^1 \left([v] - v + \frac{1}{2}\right) dv = 0, \quad \int_0^{1/2} \left([v] - v + \frac{1}{2}\right) dv = \frac{1}{8},$$

и функция $[v] - v + 1/2$ имеет период 1, то, (см. (34)),

$$|\varphi(u)| \leqq \frac{1}{8}. \tag{40}$$

Далее, так как,

$$\left|\left(u + \frac{5}{4} + i\frac{t}{2}\right)^4\right| = \left[\left(u + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{t^2}{4}\right]^2 \geqq \frac{t^2}{4}\left(u + \frac{5}{4}\right)^2, \tag{41}$$

то, см. (38), (41), $t > 1$),

$$|V_4| < \frac{3}{4t^2} \int_0^\infty \frac{du}{\left(u + \frac{5}{4}\right)^2} = \frac{3}{5t^2}. \tag{42}$$

Следовательно, (см. (38), (39), (42)),

$$|U_1(t)| < \frac{11}{t^2}, \quad t > 1. \tag{43}$$

Отсюда следует оценка

$$|U_1(t)| < 10^{-7}, \quad t \geqq 1{,}7 \cdot 10^4.$$

т.е. (22).

3.3. В этом пункте мы завершим

Доказательство Леммы B. В силу (37) имеем:

$$\frac{dU_1(t)}{dt} = \mathrm{Re}\left\{ i \left.\frac{dU_2}{ds}\right|_{s=\frac{1}{2}+it} \right\} = -\,\mathrm{Im}\left\{ \left.\frac{dU_2}{ds}\right|_{s=\frac{1}{2}+it} \right\}. \tag{44}$$

Так как (см. (35))

$$\frac{dU_2}{ds} = \frac{1}{2(s+2)^2} - \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s+2)^3} + 3\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{\left(u + \frac{s}{2} + 1\right)^5},$$

то (см. (44)):

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{5t}{\left(\frac{25}{4}+t^2\right)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3t-4t^3}{\left(\frac{1}{4}+t^2\right)^3} - \frac{1}{4}\frac{75t-4t^3}{\left(\frac{25}{4}+t^2\right)^3} -$$

$$-\,3\cdot\mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{5}{4}+\mathrm{i}\frac{t}{2}\right)^5}\right\} = V_5 + V_6 + V_7 + V_8\,. \tag{45}$$

Очевидно, ($t > 1$),

$$|V_5| < \frac{5}{2t^3}, \quad |V_6| < \frac{7}{2t^3}, \quad |V_7| < \frac{79}{4t^3}. \tag{46}$$

Далее, так как,

$$\left|\left(u+\frac{5}{4}+\mathrm{i}\frac{t}{2}\right)^5\right| = \left[\left(u+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}\cdot\left[\left(u+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}\right] \geqq$$

$$\geqq \frac{t^3}{8}\left(u+\frac{5}{4}\right)^2, \tag{47}$$

то, (см. (40), (45), (47)),

$$|V_8| < \frac{3}{t^3}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{12}{5t^3}. \tag{48}$$

Следовательно, (см. (45), (46), (48)),

$$\left|\frac{\mathrm{d}U_1(t)}{\mathrm{d}t}\right| < \frac{30}{t^3}, \quad t > 1\,. \tag{49}$$

Отсюда следует оценка

$$\left|\frac{\mathrm{d}U_1(t)}{\mathrm{d}t}\right| < 10^{-11}, \quad t > 1{,}7\cdot 10^{-4},$$

т.е. (23).

4 Доказательство Леммы C

Доказательство Леммы C опирается на ряд вспомогательных утверждений.

4.1. Известно, что

$$N(t) = L(t) + R(t), \quad t > 0, \tag{50}$$

(см. [16], стр. 208), где

$$L(t) = \frac{1}{2\pi} t \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} + \frac{7}{8},$$

и $N(t)$ означает число нулей функции $\zeta(\sigma + i\tau)$, лежащих в прямоугольнике $0 < \sigma < 1$, $0 < \tau \leqq t$. Баклунд доказал следующую оценку:

$$|R(t)| < 0{,}137 \ln t + 0{,}443 \ln \ln t + 4{,}350, \quad t \geqq 2, \tag{51}$$

(см. [1], стр. 355, 375). Справедлива

Лемма 1.

$$N(t+1) - N(t) < 14{,}25 \ln t, \quad t \geqq 2. \tag{52}$$

Доказательство. Так как

$$L(t+1) - L(t) < \frac{1}{2\pi} \ln \frac{t+1}{2\pi},$$

то, (см. (50), (51)),

$$\begin{aligned} N(t+1) - N(t) = L(t+1) - L(t) + R(t+1) - R(t) \leqq \\ \leqq L(t+1) - L(t) + |R(t)| + |R(t+1)| < \\ < \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} + 0{,}274 \right) \frac{\ln(t+1)}{\ln t} + 0{,}886 \frac{\ln \ln (t+1)}{\ln t} + \frac{1}{\ln t} \left(8{,}7 - \frac{\ln 2\pi}{2\pi} \right) \right\} \ln t < \\ < \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} + 0{,}274 \right) \left(1 + \frac{1}{2 \ln 2} \right) + 0{,}886 + \frac{8{,}7}{\ln 2} \right\} \ln t < 14{,}25 \ln t, \quad t \geqq 2, \end{aligned}$$

т.е. (52).

Использованые значения:

$$\ln 2 > 0{,}69, \quad \frac{1}{\pi} < 0{,}32.$$

Заметим еще, что значение 14,25 можно понизить, но для наших целей оно совершенно достаточно.

4.2. В дальнейшем изложении нам понадобятся следующие оценки:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m-1)^3} < \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{m^3}, \tag{53}$$

$$\sum_{n=[t_0]+1}^{\infty} \frac{\ln(n+m-1)}{(n+m-1)^3} < \frac{7}{4}\frac{\ln([t_0]+m)}{[t_0]^2}, \quad t_0 > 1, \tag{54}$$

где m — натуральное число.

Действительно. Для суммы в (53) имеем:

$$\frac{1}{m^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+m-1)^3} < \frac{1}{m^3} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+m-1)^3} = \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{m^3}.$$

Далее, так как функция

$$\frac{\ln t}{t^3}$$

убывает при $t \geqq 2$, то для суммы в (54) имеем:

$$\frac{\ln([t_0]+m)}{([t_0]+m)^3} + \sum_{n=[t_0]+2}^{\infty} \frac{\ln(n+m-1)}{(n+m-1)^3} <$$

$$< \frac{\ln([t_0]+m)}{([t_0]+m)^3} + \int_{[t_0]+1}^{\infty} \frac{\ln(x+m-1)}{(x+m-1)^3} dx <$$

$$< \frac{\ln([t_0]+m)}{([t_0]+m)^3} + \frac{\ln([t_0]+m)}{2([t_0]+m)^2} + \frac{1}{4([t_0]+m)^2},$$

отсюда следует оценка (54).

4.3. Справедлива следующая

Лемма 2.

$$\left|\sum_{\gamma > t_0+m} \frac{1}{(t_0-\gamma)^3}\right| < 14{,}25\left\{\left(\frac{1}{2m^2} + \frac{1}{m^3}\right)(\ln(t_0+m) + \ln 4) + \right.$$

$$\left. + 1{,}75 \frac{\ln(t_0+m)}{[t_0]^2}\right\}, \quad t_0 \geqq 1. \tag{55}$$

Доказательство. В силу (52),

$$\left|\sum_{\gamma > t_0+m} \frac{1}{(t_0-\gamma)^3}\right| = \sum_{\gamma > t_0+m} \frac{1}{(\gamma-t_0)^3} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t_0+m+n-1 < \gamma \leqq t_0+m+n} \frac{1}{(\gamma-t_0)^3} < 14{,}25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(t_0+m+n-1)}{(m+n-1)^3}. \tag{56}$$

Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(t_0+m+n-1)}{(m+n-1)^3} = \sum_{n=1}^{[t_0]} + \sum_{n=[t_0]+1}^{\infty} <$$

$$< \ln(2t_0+m-1)\cdot \sum_{n=1}^{[t_0]} \frac{1}{(n+m-1)^3} + \sum_{n=[t_0]+1}^{\infty} \frac{\ln(2n+m-1)}{(n+m-1)^3} <$$

$$< \ln\{2(t_0+m-1)\}\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m-1)^3} + \sum_{n=[t_0]+1}^{\infty} \frac{\ln(n+m-1)+\ln 2}{(n+m-1)^3} <$$

$$< \ln\{4(t_0+m-1)\}\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m-1)^3} + \sum_{n=[t_0]+1}^{\infty} \frac{\ln(n+m-1)}{(n+m-1)^3}. \qquad (57)$$

Теперь, из (56), в силу (53), (54), (57), следует (55).

4.4. Справедлива следующая

Лемма 3.

$$\sum_{\gamma<0} \frac{1}{(t_0-\gamma)^3} < 40\frac{\ln 3t_0}{[t_0]^2}, \quad t_0 \geqq 15. \qquad (58)$$

Доказательство. Напомним, что если $\frac{1}{2}+i\gamma$ есть нуль функции $\zeta(s)$, то $\frac{1}{2}-i\gamma$ тоже нуль этой функции. Далее, первый нуль функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ имеет значение $\gamma \doteq 14{,}13$, (см. например, [16], стр. 384). Следовательно,

$$N(-t-1)-N(-t)-N(t+1)-N(t) < 14{,}25\ln t, \quad t>14.$$

Теперь,

$$\sum_{\gamma<0} \frac{1}{(t_0-\gamma)^3} = \sum_{n=14}^{\infty} \sum_{-n-1\leqq\gamma<-n} \frac{1}{(t_0-\gamma)^3} <$$

$$< \sum_{n=14}^{\infty} \frac{1}{(t_0+n)^3} \cdot \sum_{-n-1\leqq\gamma<-n} 1 < 14{,}25 \sum_{n=14}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+t_0)^3}. \qquad (59)$$

Далее,

$$\sum_{n=14}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+t_0)^3} = \sum_{n=14}^{[t_0]} + \sum_{n=[t_0]+1}^{\infty}, \qquad (60)$$

где

$$\sum_{n=14}^{[t_0]} < \frac{[t_0]+14}{[t_0]^3}\cdot \ln[t_0] < \frac{\ln[t_0]}{[t_0]^2}, \qquad (61)$$

и, (см. (54)), $m - 1 \to [t_0]$,

$$\sum_{n=[t_0]+1}^{\infty} < \sum_{n=[t_0]+1}^{\infty} \frac{\ln(n+[t_0])}{(n+[t_0])^3} < 1{,}75 \frac{\ln(2[t_0]+1)}{[t_0]^2}. \tag{62}$$

Наконец, из (59), в силу (60)—(62), следует (58).

4.5. Справедлива следующая

Лемма 4.

$$\sum_{0<\gamma<t_0-m} \frac{1}{(t_0-\gamma)^3} < 14{,}25\left(\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{m^3}\right)\ln t_0, \quad [t_0] > m + 14. \tag{63}$$

Доказательство. В силу (52) имеем

$$\sum_{0<\gamma<t_0-m} \frac{1}{(t_0-\gamma)^3} = \sum_{k=0}^{\bar{K}} \sum_{t_0-m-k-1 \leqq \gamma < t_0-m-k} \frac{1}{(t_0-\gamma)^3} <$$

$$< 14{,}25 \sum_{k=0}^{\bar{K}} \frac{\ln(t_0-m-k-1)}{(m+k)^3} < 14{,}25 \ln t_0 \cdot \sum_{k=0}^{\bar{K}} \frac{1}{(m+k)^3}, \tag{64}$$

где $\bar{K} = [t_0] - m - 14$. Теперь, из (64), в силу (53), $k \to n - 1$, следует (63).

4.6. Заметим, что (см. (21))

$$1{,}7 \cdot 10^4 < \bar{t}_0 < 1{,}8 \cdot 10^4$$

Пусть, далее, $m = 10$. Используем следующие неравенства:

$$\ln(\bar{t}_0 + 10) < \ln \bar{t}_0 + \frac{10}{\bar{t}_0},$$

$$\ln(1{,}8 \cdot 10^4) < 9{,}8, \quad \ln 3 < 1{,}1, \quad \ln 4 < 1{,}4.$$

Теперь:

из Леммы 2 получаем

Следствие 4.

$$\left|\sum_{\gamma > \bar{t}_0 + 10} \frac{1}{(\bar{t}_0-\gamma)^3}\right| < 1, \tag{65}$$

из Леммы 3 получаем

Следствие 5.

$$\sum_{\gamma<0} \frac{1}{(\bar{t}_0-\gamma)^3} < 10^{-5}, \tag{66}$$

из Леммы 4 получаем

Следствие 6.

$$\sum_{0<\gamma<\bar{t}_0-10} \frac{1}{(\bar{t}_0-\gamma)^3} < 0{,}84. \tag{67}$$

Наконец, в силу (65)—(67), справедлива

Лемма 5.

$$\left|\sum_{|\gamma-\bar{t}_0|>10}\frac{1}{(\bar{t}_0-\gamma)^3}\right|<2. \tag{68}$$

4.7. В настоящем пункте мы получим оценку снизу для величины

$$\Delta(\bar{t}_0)=\sum_{|\gamma-\bar{t}_0|\leq 10}\frac{1}{(\bar{t}_0-\gamma)^3},$$

и завершим доказательство Леммы С.

В промежутке $\langle\bar{t}_0-10,\ \bar{t}_0+10\rangle$, (относительно t_0 см. (21)), лежит 26 нулей функции $Z(t)$. Они расположены относительно $\bar{t}_0$ так:

$$\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_{12}<\bar{t}_0<\gamma_{13}<\ldots<\gamma_{26};\quad \frac{5}{\pi}\doteq 1{,}59\ 15.$$

Заметим, что в конфигурации (21):

$$\bar{\gamma}'=\gamma_{12},\quad \bar{\gamma}=\gamma_{13}.$$

Так как $\bar{t}_0=2\pi\bar{\tau}_0$, то

$$\Delta(\bar{t}_0)=\frac{1}{8\pi^3}\sum_{k=1}^{26}\frac{1}{\left(\bar{\tau}_0-\dfrac{\gamma_k}{2\pi}\right)^3},$$

Смысл обозначений в нижеприведенной Таблице таков:

$$(\gamma_*)_k<\frac{\gamma_k}{2\pi}<(\gamma^*)_k,$$

где, конечно, номер k не ёсть инстинный номер нуля γ функции $Z(t)$. Мы получили, методом Титчмарша—Лемера, с помощью ЭВМ, следующие значения:

k	$(\gamma_*)_k$	$(\gamma^*)_k$
1	2726,93	2726,95
2	2727,05	2727,07
3	2727,23	2727,25
4	2727,31	2727,33
5	2727,43	2727,45
6	2727,53	2727,55
7	2727,63	2727,65
8	2727,768	2727,770
9	2727,928	2727,930
10	2728,040	2728,042

11	2728,204	2728,206
12	2728,402	2728,404
13	2728,5183	2728,5184
14	2728,5239	2728,5240
15	2728,678	2728,680
16	2728,802	2728,804
17	2728,976	2728,978
18	2729,086	2729,088
19	2729,208	2729,210
20	2729,296	2729,298
21	2729,38	2729,40
22	2729,60	2729,62
23	2729,68	2729,70
24	2729,90	2729,92
25	2729,98	2730,00
26	2730,11	2730,13

К этой Таблице еще присоединим неравенство (см. (21))

$$\bar{\tau}_0 < (\bar{\tau}_0)^* = 2728,445 \tag{69}$$

Заметим, что

$$(\gamma^*)_k < (\gamma_*)_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, 25,$$

т.е. промежутки

$$\langle(\gamma_*)_k, (\gamma^*)_k\rangle, \quad k = 1, \ldots, 26,$$

отделяющие значения $\gamma_k/2\pi$, взаимно непересекаются.

Так как

$$0 < \bar{\tau}_0 - \frac{\gamma_k}{2\pi} < (\bar{\tau}_0)^* - (\gamma_*)_k, \quad k = 1, \ldots, 12,$$

$$\frac{\gamma_k}{2\pi} - \bar{\tau}_0 > (\gamma_*)_k - (\bar{\tau}_0)^* > 0, \quad k = 13, \ldots, 26,$$

то

$$\Delta(\bar{t}_0) > \frac{1}{8\pi^3}\left(\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\{(\bar{\tau}_0)^* - (\gamma_*)_k\}^3} - \sum_{k=13}^{26} \frac{1}{\{(\gamma_*)_k - (\bar{\tau}_0)^*\}^3}\right).$$

Используя Таблицу и (69), получаем следующую оценку.

Лемма 6.

$$\Delta(\bar{t}_0) > 32. \tag{70}$$

Теперь мы завершим

Доказательство Леммы С. Так как

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(\bar{t}_0 - \gamma)^3} = \sum_{|\gamma - \bar{t}_0| \leqq 10} + \sum_{|\gamma - \bar{t}_0| > 10},$$

то отсюда, в силу (68), (70), следует (24).

5 Отрицательные давления

5.1. Как мы уже упоминали во Введении, пункт (С), в дискусиях о космологических вопросах Эйнштейновой теории тяготения, иногда выступает отрицательное давление. В настоящем пункте мы попробуем дать определение физической области в случае, когда допускаются и отрицательные давления.

Напомним, что в случае неотрицательных давлений, физическая область, принадлежащая промежутку (γ', γ''), была определена (см. [12]) как множество таких $t \in (\gamma', \gamma'')$, для которых удовлетворяются неравенства (см. (6))

$$0 \leqq p(t) \leqq \frac{c^2}{3} \varrho(t).$$

Эти неравенства равносильны следующим:

$$\begin{gathered} E(t) = \frac{\varkappa c^2}{3} \varrho(t) - \varkappa p(t) \geqq 0, \\ p(t) \geqq 0. \end{gathered} \tag{71}$$

Можно думать, что и отрицателное давление $p(t)$, при данной плотности вещества $\varrho(t)$, не может быть произвольно большим по абсолютному значению. В этом направлении наиболее простым является следующее обобщение неравенств (6):

Гипотеза.

$$|p(t)| \leqq \frac{c^2}{3} \varrho(t). \tag{72}$$

Неравенство (72) равносильно следующей системе:

$$\begin{gathered} E_1(t) = \frac{\varkappa c^2}{3} \varrho(t) - \varkappa p(t) \geqq 0, \\ E_2(t) = \frac{\varkappa c^2}{3} \varrho(t) + \varkappa p(t) \geqq 0. \end{gathered} \tag{73}$$

Заметим, что линейные комбинации функций $\varrho(t)$, $p(t)$, входящие в систему (73), более симметричны чем линейные комбинации в (71).

Из (73), в силу (2), получаем:

$$E_1(t) = -2\sum_\gamma \frac{1}{(t-\gamma)^2} + 4\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 + 2\beta\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2 \sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{74}$$

$$E_2(t) = -\frac{2Z''(t)}{Z(t)}. \tag{75}$$

Определение. Пусть

$$\begin{aligned} F_1 &= \{t\colon E_1(t) \geqq 0,\ t\in(\gamma', \gamma'')\}, \\ F_2 &= \{t\colon E_2(t) \geqq 0,\ t\in(\gamma', \gamma'')\}. \end{aligned} \tag{76}$$

Тогда множество $F(\gamma', \gamma'') = F_1 \cap F_2$ назовем физической областью, принадлежащей помежутку (γ', γ'').

5.2. Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть справедлива гипотеза Римана и помежуток (γ', γ''), где $0 < \gamma'$ — достаточно большое число, обладает следующим свойством: каждый из промежутков (γ', t_0), (t_0, γ'') содержит нечетное число точек перегиба функции $Z(t)$. Тогда в промежутке (γ', γ'') существует физическая область.

Доказательство. Итак, пусть

$$t'_k \in (\gamma', t_0),\ k = 1, \ldots, 2p+1,\ t''_l \in (t_0, \gamma''),\ l = 1, \ldots, 2q+1;$$

$$t'_1 > t'_2 > \ldots,\ t''_1 < t''_2 < \ldots$$

точки перегиба функции $Z(t)$, $t\in(\gamma', \gamma'')$. Тогда

$$Z''(t'_k) = Z''(t''_l) = 0,$$

и $Z''(t)$ меняет знак в точках t'_k, t''_l. В силу (11), $t = t_0$,

$$-\frac{Z''(t_0)}{Z(t_0)} = \sum_\gamma \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right) > 0, \tag{77}$$

для достаточно больших $t_0 > 0$. Далее, в силу предположения и (77), промежутки

$$(\gamma', t'_{2p+1}),\quad (t'_1, t''_1),\quad (t''_{2q+1}, \gamma'')$$

не содержат точку перегиба функции $Z(t)$. Следовательно, по непрерывности функции

$$\frac{Z''(t)}{Z(t)},\quad t\in(\gamma', \gamma''),$$

получаем ($Z(t)$ сохраняет знак для $t \in (\gamma', \gamma'')$):

$$\begin{aligned} &-\frac{Z''(t)}{Z(t)} \geqq 0, \quad t \in \langle t_1', t_1'' \rangle \\ &-\frac{Z''(t)}{Z(t)} < 0, \quad t \in (\gamma', t_{2p+1}') \cup (t_{2q+1}'', \gamma'') = \Omega(t). \end{aligned} \tag{78}$$

Теперь, из (78), в силу (75), получаем:

$$\mathrm{E}_2(\mathrm{t}) \geqq 0, \quad \mathrm{t} \in \langle \mathrm{t}_1', \mathrm{t}_1'' \rangle, \quad \mathrm{E}_2(\mathrm{t}) < 0, \quad \mathrm{t} \in \Omega(\mathrm{t}). \tag{79}$$

Значит, в силу (76), $\Omega(t) \not\subset F_2$ и, следовательно, $\Omega(t) \not\subset F(\gamma', \gamma'')$. Нечетное число точек перегиба в промежутках $(\gamma', t_0, (t_0), \gamma'')$ нам нужно для исключения некоторой правой окрестности γ' и некоторой левой окрестности γ'' из физической области.

Далее покажем что $F(\gamma', \gamma'') \neq \emptyset$. В силу (79) достаточно доказать, что $F_1 \neq \emptyset$. Из (74), при $t = t_0$, получаем:

$$E_1(t_0) = 2(\beta - 1)\sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0 - \gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right) > 0.$$

для достаточно больших $t_0 > 0$. По непрерывности $E_1(t)$ существует $\delta(t_0) > 0$ такое, что

$$E_1(t) > 0, \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Следовательно, $F_1 \neq 0$.

5.3. В этом пункте мы отметим, что существуют промежутки (γ', γ''), обладающие следующим свойством: каждый из промежутков (γ', t_0), (t_0, γ'') содержит единственную точку перегиба функции $Z(t)$.

А именно, пользуясь методом Титчмарша—Лемера и ЭВМ для вычисления значений функции $Z(t)$, мы обнаружили, что этим свойством обладают, например, следующие промежутки:

$$(\gamma_{126}, \gamma_{127}), \quad (\gamma_{183}, \gamma_{184}), \quad (\gamma_{256}, \gamma_{257}),$$

$$(\gamma_{353}, \gamma_{354}), \quad (\gamma_{379}, \gamma_{380}), \quad (\gamma_{482}, \gamma_{483}),$$

где γ_k означает k-тый нуль функции $Z(t)$, если счет вести от $\gamma_1 \doteq 14{,}13$.

Замечание 3. Весьма вероятно, что существует бесконечное множество промежутков (γ', γ''), для которых каждый из промежутков (γ', t_0), (t_0, γ'') содержит единственную точку перегиба функции $Z(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Backlund, R.: Über die Nullstellen der Riemannschen Zeta-funktion, Acta Math., 41 (1918), 345—375.

2. Lehmer, D. H.: On the roots of the Riemann zeta-function, Acta Math., 95 (1956), 291—298.
3. Lehmer, D. H.: Extended computation of the Riemann zeta-function, Mathematica, 3 (1956), 102—108.
4. Littlewood, J. E.: Two notes on the Riemann zeta-function, Proc. Cambr. Phil. Soc., 22 (1924), 234—242.
5.—6. Titchmarsh, E. C.: The zeros of the Riemann zeta-function, Proc. Royal Soc. (A), 151 (1935), 234—255, 157 (1936), 261—263.
7. Меллер, Н. А.: О вычислениях, связанных с проверкой гипотезы Римана, ДАН СССР, (1958), т. 123 №2, 246—248.
8. Мозер, Ян: Об одном новом следствии из гипотезы Римана, Acta Arith., 25 (1974), 307-311.
9. Мозер, Ян: Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой, Acta Arith., 26 (1974), 33—39.
10. Мозер, Ян: О точках перегиба функции $Z(t)$, Acta Arith., 28 (1975), 89—99.
11. Мозер, Ян: О некоторых оценках снизу для расстояний соседних нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, Acta Math. Univ. Comen., 44—45 (1984), 75—80.
12. Мозер, Ян: Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна—Фридмана, Acta Math. Univ. Comen. 44—45 (1984), 115—125.
13. Мозер, Ян: О распределении корней уравнений $Z(t)=0$, $Z'(t)=0$, в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., (в редакции).
14. Наан, Г. И.: О современном состоянии космологической науки, стр. 277—329. В сб. «Вопросы космогонии», т. 6, Изд. АН СССР, Москва 1958.
15. Наан, Г. И.: Проблемы и тенденции релятивистской космологии, стр. 339—375, см. «Эйнштейновский сборник 1966», Изд. Наука, Москва 1966.
16. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, ИИЛ, Москва 1953.
17. Титчмарш, Е. К.: Теория функций, ГИТТЛ, Москва, Ленинград 1951.
18. Эйнштейн, А.: Собрание научных трудов, т. 2, Изд. Наука, Москва 1966.

Адрес автора:
Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 16. 9. 1986

SÚHRN

RIEMANNOVA DZETA-FUNKCIA A EINSTEINOVE—FRIEDMANNOVE ROVNICE II

J. Moser, Bratislava

V práci sa skúma priebeh funkcií $\varrho(t;\beta)$, $p(t;\beta)$ (hustota a tlak), vo fyzikálnych oblastiach $F(\gamma',\gamma'')$ nekonečnej množiny modelov sférického Vesmíru, zostrojenej v práci [12]. O $\varrho(t;\beta)$ je dokázané: ak platí Riemannova hypotéza, tak pre dostatočne veľké $\gamma'>0$ a ľubovoľné pevné $\beta\in(1,2)$ funkcia $\varrho(t;\beta)$ má v bode $t_0\in F(\gamma',\gamma'')$ kladné lokálne minimum, ktoré je aj globálnym minimom pri $t\in(\gamma',\gamma'')$, (t_0 je jediný koreň rovnice $Z(t)=0$ v intervale (γ',γ'')). Priebeh funkcie $p(t;\beta)$ je veľmi zložitý. Ale v ľavom okolí druhej Lehmerovej dvojice nulových bodov funkcie $Z(t)$,

[3], je v práci, pre ľubovoľné pevné $\beta \in (1, 2 - 10^{-8})$, zostrojený interval $I = (\bar{t}_1, \bar{t}_0)$, ($\bar{t}_0 = 2\pi \cdot 2728{,}44$ je bod kladného globálneho minima funkcie $\varrho(t; \beta)$ a $\bar{t}_1$ je najbližší zľava k $\bar{t}_0$ bod kladného lokálneho maxima funkcie $p(t; \beta)$), na ktorom je $p(t; \beta)$ klesajúca funkcia. Teda na I je zostrojený „realistický" model sférického Vesmíru s nenulovým tlakom, t. j. na I polomer Vesmíru rastie a $\varrho(t; \beta)$, $p(t; \beta)$ — klesajú.

SUMMARY

RIEMANN'S ZETA-FUNCTION AND THE EINSTEIN—FRIEDMANN'S EQUATIONS II

J. Moser, Bratislava

In the paper the behaviour of functions $\varrho(t; \beta)$, $p(t; \beta)$, (density and pressure) is studied. The domain of the functions are the physical regions $F(\gamma', \gamma'')$ of the infinite set of models of spherical Universe, constructed in the paper [12]. Concerning $\varrho(t; \beta)$ the following is proved. Under the Riemann hypothesis, for sufficiently large $\gamma' > 0$ and for any fixed $\beta \in (1, 2)$ the function $\varrho(t; \beta)$ assumes at a point $t_0 \in (\gamma', \gamma'')$ positive local minimum which is also the global minimum if $t \in (\gamma', \gamma'')$, ($t_0$ is the unique root of the equation $Z(t) = 0$ in the interval (γ', γ'')). The shape of the function $p(t; \beta)$ is very complicated. But in the left neighbourhood of the second Lehmer paire of zeros of $Z(t)$, for any $\beta \in (1, 2 - 10^{-8})$ an interval $I = (\bar{t}_1, \bar{t}_0)$ is constructed on whic $p(t; \beta)$ is decreasing, ($\bar{t}_0 \doteq 2\pi \cdot 2728{,}44$ is the point of the positive global minimum of the function $\varrho(t; \beta)$ and $\bar{t}_1$ is the nearest point from the left side where $p(t; \beta)$ assumes local maximum). Thus on I a "realistic" model of the spherical Universe with non zero pressure is constructed, i.e. on I the radius of the Universe increases and $\varrho(t; \beta)$, $p(t; \beta)$ decrease.