Werk

Label: Article

Jahr: 1987

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?312901348_52-53|log7

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LII—LIII—1987

КУБИЧЕСКИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

1 Введение

В работе [9] мы получили теоремы о среднем для функции $Z^3(t)$:

$$\frac{1}{m\{G_3(x)\}}\int_{G_3(x)} Z^3(t)\,\mathrm{d}t \sim 2\frac{\sin x}{x},$$
$$\frac{1}{m\{G_4(y)\}}\int_{G_4(y)} Z^3(t)\mathrm{d}t \sim -2\frac{\sin y}{y}, \tag{1}$$

при $T\to\infty$, относительно двух бесконечных семейств несвязных множеств $G_3(x)$, $G_4(y)$, $x, y\in(0, \pi/2\rangle$, определеных для промежутка $\langle T, T+U\rangle$, при некотором U, ($m\{G_3(x)\}$ обозначает меру множества $G_3(x)$, ...). Семейства множеств $G_3(x)$, $G_4(y)$ определены с помощью семейства последовательностей $\{k_\nu(\tau)\}$, которые, в свою очередь, определены соотношениями

$$\vartheta_1[k_\nu(\tau)] = \frac{1}{3}\pi\nu + \frac{1}{3}\tau, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \tau\in\langle -\pi, \pi\rangle,$$
$$\vartheta_1(t) = \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi. \tag{2}$$

В предлагаемой работе мы обобщим теоремы о среднем (1) в двух напралениях:

(A) Прежде всего мы введем два семейства несвязных множеств $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$, $x_1<x_2$, $y_1<y_2$, $x_1, x_2, y_1, y_2\in\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, для которых имеют место следующие соотношения $G_3(-x, x) = G_3(x)$, $G_4(-y, y) = G_4(y)$, т.е. семейства множеств $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$ являются обобщениями семейств множеств $G_3(x)$, $G_4(y)$ соответственно.

(B) вместо функции $Z^3(t)$ мы будем расссматривать корреляционное произведение

$$Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3).$$

Значит, кубические теоремы о среднем (1) мы включим в 7-параметрическое семейство кубических корреляционных формул.

Например, пункту (B) соответствует следующий частый случай формул, обобщающих теоремы о среднем (1):

$$\begin{gathered}\frac{1}{m\{G_3(x)\}}\int_{G_3(x)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t \sim \\ \sim 2\frac{\sin x}{x}\cos\{(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\}, \\ \frac{1}{m\{G_4(y)}\int_{G_4(y)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t \sim \\ \sim -2\frac{\sin y}{y}\cos\{(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\},\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$P=\sqrt{\frac{T}{2\pi}},\quad \varrho_1,\varrho_2,\varrho_3=O(T^{1/48-\varepsilon}), \tag{4}$$

($0<\varepsilon$ — сколь угодно малое число).

Соотношения (3) позволяют получить такое свойство взаимной корреляции функций

$$Z(t+\varrho_1),\quad Z(t+\varrho_2),\quad Z(t+\varrho_3):$$

средние значения функций

$$Z^3(t),\quad Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)$$

асимптотически сопадают (ср. (1), (3)) при условии

$$\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3=\frac{2k\pi}{\ln P},\quad k=0,\pm1,\dots,\pm L,\quad L=O(T^{1/48-\varepsilon}\ln T),$$

(ср. (4)), в частности, асимптотически совпадают средние значения функций

$$Z^3(t),\quad Z(t)Z(t-\varrho)Z(t+\varrho).$$

Конечно, и это свойство является лишь частным случаем более общей закономерности, касающейся семейств множеств $G_3(x_1,x_2)$, $G_4(y_1,y_2)$.

Далее в работе изучаются формулы, выражающие корреляционные свойства функции $Z(t)$ и ее сдвинутого квадрата, т.е. корреляционные свойства функций

$$Z(t), \quad Z^2(t+\varrho),$$

относительно семейств множеств $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$. В этом случае мы получим пару кубических корреляционных формул, которые расщепляются на четверку асимптотических формул, которые, в свою очередь, приводят нас к теоремам о среднем типа:

$$\int_{G_3(x_1, x_2)} Z(t)Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t = \alpha \cdot \int_{G_3(x_1, x_2)} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t,$$

где

$$\alpha \sim \frac{A(x_1, x_2)}{\ln \frac{T}{2\pi}}, \quad T \to \infty .$$

Замечание 1. Именно кубические корреляционные формулы привели нас к изучению корреляционных свойств произведения

$$Z(t)\eta^2(t+\varrho), \quad \eta(t) = \sqrt{2}\cos\vartheta_1(\mathrm{t})$$

в работе [11] и к следующим оценкам снизу при $T \to \infty$:

$$m\{G_3^+(x_1, x_2)\}, \quad m\{G_3^-(x_1, x_2)\} > B(x_1, x_2)\frac{\bar{U}}{\ln T},$$

$$m\{G_4^-(y_1, y_2)\}, \quad m\{G_4^+(y_1, y_2)\} > C(y_1, y_2)\frac{\bar{U}}{\ln T},$$

для некоторого $\bar{U}$, которые очень близко подходят к оценке сверху $O(\bar{U})$, ($G_3^+(x_1, x_2)$ означает множество тех $t \in G_3(x_1, x_2)$, для которых $Z(t) > 0, \ldots$).

В работе мы также определяем для любого множества $G_3(x_1, x_2)$ равновесное множество в системе множеств $G_4(y_1, y_2)$, (по аналогии с нашей работой [10]). В этом направлении имеет место теорема, согласно которой для любого $G_3(x_1, x_2)$, кроме одного, существует в системе множеств $G_4(y_1, y_2)$ бесконечное множество (мощности континуума) равновесных множеств.

Далее в работе получена асимптотическая формула, выражающая одну из закономерностей, управляющих «хаотичностью» поведения графика функции

$$Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3), \quad t \in G_3(x_1, x_2) \cup G_4(y_1, y_2),$$

для равновесных множеств $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$. На самом деле, для всякого $G_3(x_1, x_2)$, кроме одного, получается бесконечное множество таких асимптотических формул (см. теорему о количестве равновесных множеств).

Наконец заметим, что настоящая работа продолжает анализ следствий из формулы Римана—Зигеля, с помощью дискретного метода Е. К. Титчмарша, основы которого изложены в его знаменитом мемуаре [2].

2 Обобщение кубических теорем о среднем

Напомним, что с помощью семейства последовательностей $\{k_\nu(\tau)\}$ мы определили в работе [9] два семейства несвязных множеств:

$$G_3(x) = G_3(x, T, U) = \bigcup_{T \leq k_{2\nu} \leq T+U} \{t: k_{2\nu}(-x) < t < k_{2\nu}(x)\}, \quad 0 < x \leqq \pi/2,$$
$$G_4(y) = G_4(y, T, U) = \bigcup_{T \leq k_{2\nu+1} \leq T+U} \{t: k_{2\nu+1}(-y) < t < k_{2\nu+1}(y)\}, \quad 0 < y \leqq \pi/2. \tag{5}$$

Теперь мы определим следующие два семейства несвязных множеств (ср. [10]):

$$G_3(x_1, x_2) = G_3(x_1, x_2, T, U) = \bigcup_{T \leq k_{2\nu} \leq T+U} \{t: k_{2\nu}(x_1) < t < k_{2\nu}(x_2)\},$$
$$x_1 < x_2, \quad x_1, x_2 \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle,$$
$$G_4(y_1, y_2) = G_4(y_1, y_2, T, U) = \bigcup_{T \leq k_{2\nu+1} \leq T+U} \{t: k_{2\nu+1}(y_1) < t < k_{2\nu+1}(y_2)\},$$
$$y_1 < y_2, \quad y_1, y_2 \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle. \tag{6}$$

Замечание 2. Так как

$$G_3(-x, x) = G_3(x), \quad G_4(-y, y) = G_4(y),$$

(ср. (5), (6)), то новые семейства множеств $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$, являются обобщениями семейств множеств $G_3(x)$, $G_4(y)$.

Справедлива следующая

Теорема 1 (основная). Если

$$T^{\frac{13}{16}+2\varepsilon} \leqq U \leqq T^{\frac{7}{8}+\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 = O(T^{\frac{1}{48}-\varepsilon}), \tag{7}$$

то

$$\int_{G_3(x_1,\,x_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi}U(\sin\{x_2+(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\} - \sin\{x_1+(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\}) + O(T^{13/16+\varepsilon}), \tag{8}$$

$$\int_{G_4(y_1,\,y_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{\pi}U(\sin\{y_2+(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\} - \sin\{y_1+(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\}) + $$
$$+ O(T^{13/16+\varepsilon}),$$

($0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число), где O — оценки имеют место равномерно для ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 удовлетворяющих условию (7).

Замечание 3. Формулы (8) являются асимптотическими формулами для U удовлетворяющего условию (7), если

$$x_1 + x_2 + 2(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P \neq (2k+1)\pi,$$

$$y_1 + y_2 + 2(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P \neq (2l+1)\pi,$$

где

$$k,\, l = 0,\ \pm 1,\ \dots,\ \pm L, \quad L = O(T^{1/48-\varepsilon}\ln T).$$

Полагая в основных формулах (8) $-x_1 = x_2 = x$, $-y_1 = y_2 = y$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0$, получаем

Следствие 1.

$$\int_{G_3(x)} Z^3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}U\sin x + O(T^{13/16+\varepsilon}),$$
$$\int_{G_4(y)} Z^3(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{\pi}U\sin y + O(T^{13/16+\varepsilon}). \tag{9}$$

Замечание 4. Итак, кубические теоремы о среднем (9), полученные в работе [9], естественным образом включены в 7-параметрическое семейство кубических корреляционных формул (8).

Далее, из основных формул (8) получаем

Следствие 2. При $T \to \infty$,

$$\int_{G_3(x_1,\,x_2)} Z^3(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_{G_3(x_1,\,x_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_{G_4(y_1,\,y_2)} Z^3(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_{G_4(y_1,\,y_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t, \tag{10}$$

для

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \frac{2k\pi}{\ln P}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm L, \; L = O[T^{1/48-\varepsilon} \ln T) \qquad (11)$$

Особо отметим частый случай формул (10) при $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = \varrho$, $\varrho_3 = -\varrho$:

Следствие 3. При $T \to \infty$,

$$\int_{G_3(x_1, x_2)} Z^3(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_{G_3(x_1, x_2)} Z(t)Z(t-\varrho)Z(t+\varrho)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{G_4(y_1, y_2)} Z^3(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_{G_4(y_1, y_2)} Z(t)Z(t-\varrho)Z(t+\varrho)\,\mathrm{d}t,$$

для ϱ удовлетворяющего условию (7).

3 Корреляционные свойства функций $Z(t)$, $Z^2(t+\varrho)$

В этой части мы изучим некоторые закономерности, связанные с корреляционными свойствами функции $Z(t)$ и ее сдвинутого квадрата, т.е. с корреляционными свойствами функций

$$Z(t),\; Z^2(t+\varrho)$$

3.1. Если в основных формулах (8) положим

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho, \quad \varrho = \varrho_k(z) = \frac{2k\pi + z}{2\ln P}, \quad z \in \langle 0, \pi \rangle, \qquad (12)$$

где k удовлеторает условию (11), то получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\int_{G_3(x_1, x_2)} Z(t)Z^2[t+\varrho_k(z)]\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{\pi} U \sin\frac{x_2 - x_1}{2} \cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + z\right), \\ &\int_{G_4(y_1, y_2)} Z(t)Z^2[t+\varrho_k(z)]\,\mathrm{d}t \sim -\frac{2}{\pi} U \sin\frac{y_2 - y_1}{2} \cos\left(\frac{y_1 + y_2}{2} + z\right). \end{aligned} \qquad (13)$$

Расщеплением пары кубических корреляционных формул (13) мы получаем следующую четверку асимптотических кубических формул:

Следствие 4.

$$\begin{aligned} &\int_{G_3(x_1, x_2)} Z(t)Z^2[t+\varrho_k(0)]\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{\pi} U \sin\frac{x_2 - x_1}{2} \cos\frac{x_1 + x_2}{2}, \\ &\int_{G_3(x_1, x_2)} Z(t)Z^2[t+\varrho_k(\pi)]\,\mathrm{d}t \sim -\frac{2}{\pi} U \sin\frac{x_2 - x_1}{2} \cos\frac{x_1 + x_2}{2}, \end{aligned} \qquad (14)$$

и, аналогичным образом,

$$\int_{G_4(y_1,\,y_2)} Z(t)Z^2[t+\varrho_k(0)]\,\mathrm{d}t \sim -\frac{2}{\pi}U\sin\frac{y_2-y_1}{2}\cos\frac{y_1+y_2}{2},$$
$$\int_{G_4(y_1,\,y_2)} Z(t)Z^2[t+\varrho_k(\pi)]\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{\pi}U\sin\frac{y_2-y_1}{2}\cos\frac{y_1+y_2}{2}, \tag{15}$$

для k удовлетворяющих условию (11).

Замечание 5. Формулы (14), (15) действительно являются асимптотическими, так как (см. (6)),

$$\frac{x_2-x_1}{2},\quad \frac{x_1+x_2}{2},\quad \frac{y_2-y_1}{2},\quad \frac{y_1+y_2}{2}\in\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right).$$

3.2. Напомним основные свойства семейства последователностей $\{k_\nu(\tau)\}$, (см. [9], часть 2):

$$k_{\nu+1}(\tau)-k_\nu(\tau)=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{\ln\dfrac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{U}{T\ln^2 T}\right),$$
$$\sum_{T\leq k_\nu\leq T+U} 1=\frac{3}{2\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U^2}{T}\right)+O(1),\quad k_\nu=k_\nu(0). \tag{16}$$

Далее, из соотношений (см. (2)),

$$\vartheta_1[k_{2\nu}(x_2)]-\vartheta_1[k_{2\nu}(x_1)]=\frac{1}{3}(x_2-x_1),$$

$$\vartheta_1[k_{2\nu+1}(y_2)]-\vartheta_1[k_{2\nu+1}(y_1)]=\frac{1}{3}(y_2-y_1),$$

следуют асимптотические формулы (ср. [9], (16), (17))

$$k_{2\nu}(x_2)-k_{2\nu}(x_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x_2-x_1}{\ln\dfrac{T}{2\pi}}+O\left\{\frac{(x_2-x_1)U}{T\ln^2 T}\right\},$$
$$k_{2\nu+1}(y_2)-k_{2\nu+1}(y_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{y_2-y_1}{\ln\dfrac{T}{2\pi}}+O\left\{\frac{(y_2-y_1)U}{T\ln^2 T}\right\}. \tag{17}$$

Наконец, из (17), в силу (6), (7), (16), получаем асимптотические формулы для мер множеств $G_3(x_1,\,x_2)$, $G_4(y_1,\,y_2)$:

$$m\{G_3(x_1, x_2)\} = \frac{x_2 - x_1}{2\pi} U + O(T^{3/4+\varepsilon}),$$
$$m\{G_4(y_1, y_2)\} = \frac{y_2 - y_1}{2\pi} U + O(T^{3/4+\varepsilon}). \tag{18}$$

3.3. Справедлива следующая

Теорема 2.

$$\int_{G_3(x_1, x_2)} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t = \frac{x_2 - x_1}{2\pi} U \ln\frac{T}{2\pi} + \frac{c}{2\pi}(x_2 - x_1)U + o\{(x_2 - x_1)U\},$$
$$\int_{G_4(y_1, y_2)} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t = \frac{y_2 - y_1}{2\pi} U \ln\frac{T}{2\pi} + \frac{c}{2\pi}(y_2 - y1)\, U + o(\{(y_2 - y_1)U\}, \tag{19}$$

где o — оценки имеют место равномерно относительно $\varrho = O(T^{1/48-\varepsilon})$, ($c$ — постоянная Эйлера).

Из (19), в силу (18), получается

Следствие 5.

$$\frac{1}{m\{G_3(x_1, x_2)\}} \int_{G_3(x_1, x_2)} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t \sim$$
$$\sim \frac{1}{m\{G_4(x_1, x_2)\}} \int_{G_4(x_1, x_2)} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t \sim \ln\frac{T}{2\pi}, \tag{20}$$

при $T \to \infty$, где

$$m\{G_3(x_1, x_2)\} \sim m\{G_4(x_1, x_2)\} \sim \frac{x_2 - x_1}{2\pi} U.$$

Замечание 6. Итак, средние значения функции $Z^2(t+\varrho)$, оносительно множеств $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(x_1, x_2)$, аимптотически равных мер, асимптотически совпадают.

Интересно сравнить этот результат с результатом полученным в работе [7]:

$$\frac{1}{m\{g_1(x)\}} \int_{G_1(x)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{m\{G_2(x)\}} \int_{G_2(x)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t \sim$$
$$\sim 4\,\frac{\sin x}{x}, \quad x \in (0, \pi/2), \tag{21}$$

где

$$m\{G_1(x)\} \sim m\{G_2(x)\} \sim \frac{x}{\pi} \bar{U}.$$

Соотношение (21) выражает асимметрию в поведении функции $Z^2(t)$ относительно множеств $G_1(x)$, $G_2(x)$, асимптотически равных мер. Семейства множеств $G_1(x)$, $G_2(y)$, $x, y \in (0, \pi/2\rangle$ определены с помощью семейства последовательностей $\{g_\nu(\tau)\}$ которые, в свою очередь, определены условием

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau)] = \frac{1}{2}\pi\nu + \frac{1}{2}\tau, \quad \nu = 1, 2, \dots, \tau \in \langle -\pi, \pi\rangle,$$

(см. [5], [6]).

3.4. Так как

$$\int_{G_3(x_1, x_2)} Z(t)Z^2[t + \varrho_k(0)]\,\mathrm{d}t = \alpha^+ \cdot \int_{G_3(x_1, x_2)} Z^2[t + \varrho_k(0)]\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{G_3(x_1, x_2)} Z(t)Z^2[t + \varrho_k(\pi)]\,\mathrm{d}t = \alpha^- \cdot \int_{G_3(x_1, x_2)} Z^2[t + \varrho_k(\pi)]\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{G_4(y_1, y_2)} Z(t)Z^2[t + \varrho_k(0)]\,\mathrm{d}t = \beta^- \cdot \int_{G_4(y_1, y_2)} Z^2[t + \varrho_k(0)]\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{G_4(y_1, y_2)} Z(t)Z^2[t + \varrho_k(\varrho)]\,\mathrm{d}t = \beta^+ \cdot \int_{G_4(y_1, y_2)} Z^2[t + \varrho_k(\pi)]\,\mathrm{d}t,$$

то из (14), (15), в силу (19), получаем

Следствие 6.

$$\alpha^+ \sim \frac{2}{\ln\frac{T}{2\pi}} \cdot \frac{\sin\frac{x_2 - x_1}{2}}{\frac{x_2 - x_1}{2}} \cos\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \alpha^- \sim -\alpha^+,$$

$$\beta^- \sim -\frac{2}{\ln\frac{T}{2\pi}} \cdot \frac{\sin\frac{y_2 - y_1}{2}}{\frac{y_2 - y_1}{2}} \cos\frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \beta^+ \sim -\beta^-,$$

при $T \to \infty$.

4 Интегральное равновесье функции

$$Z(t + \varrho_1)Z(t + \varrho_2)Z(t + \varrho_3)$$

В этой части мы получим некоторые следствия из основных корреляционных формул (8) в случае, когда ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 удовлетворяют условию (11).

Именно, мы получим некоторые следствия из формул

$$\int_{G_3(x_1,\,x_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}U(\sin x_2 - \sin x_1) + O(T^{13/16+\varepsilon}),$$
$$\int_{G_4(y_1,\,y_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi}U(\sin y_2 - \sin y_1) + O(T^{13/16+\varepsilon}), \tag{22}$$

в направлении, которое указано в работе [10].

Пусть $\boldsymbol{G}_3$ обозначает семейство множеств $G_3(x_1, x_2)$ и $\boldsymbol{G}_4$ — семейство множеств $G_4(y_1, y_2)$. Очевидно, (см. (6)),

$$G_3(x_1, x_2) \cap G_4(y_1, y_2) = \emptyset,$$

для любых допустимых значений x_1, x_2, y_1, y_2.

Определение. Пусть $G_3(x_1, x_2) \in \boldsymbol{G}_3$. Множество $G_4(y_1, y_2) \in \boldsymbol{G}_4$ назовем равновесным множеством для множества $G_3(x_1, x_2)$, относительно функции

$$Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3),$$

где

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \frac{2k\pi}{\ln P}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \pm L, \quad L = O(T^{1/48-\varepsilon}\ln T), \tag{23}$$

если

$$\int_{G_3(x_1,\,x_2)\cup G_4(y_1,\,y_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t = o(U), \tag{24}$$

при $T \to \infty$.

Из (22) следует, что для любого множества $G_3(x_1, x_2) \in \boldsymbol{G}_3$, равновесными являются следующие два множества

$$G_4(x_1, x_2), \quad G_4(-x_2, -x_1) \in \boldsymbol{G}_4,$$

(см. (24)), которые мы назовем т р и в и а л ь н ы м и равновесными множествами.

Формулы (18) показывают, что меры тривиальных равновесных множеств асимптотически совпадают:

$$m\{G_3(x_1, x_2)\} \sim m\{G_4(x_1, x_2)\} \sim m\{G_4(-x_2, -x_1)\} \sim \frac{x_2 - x_1}{2\pi}U, \quad T \to \infty.$$

На вопрос о существовании нетривиальных равновесных множеств дает ответ следующая

Теорема 3. Для любого множества $G_3(x_1, x_2) \in G_3$, где $-\pi/2 < x_1 < x_2 \leqq$

$\leqq \pi/2$ или $-\pi/2 \leqq x_1 < x_2 < \pi/2$, существует бесконечное множество (мощности континуума) равновесных множеств $G_4(y_1, y_2) \in \boldsymbol{G}_4$.

Доказательство этой теоремы проходит аналогично изложенному в работе [10], конец части 4. А именно, вопрос о мощности множества равновесных множеств для $G_3(x_1, x_2)$, где x_1, x_2 удовлетворяют условию Теоремы 3, сводится к простому вопросу о мощности множества решений неопределенного тригонометрического уравнения (см. (22), (23))

$$\sin x_2 - \sin x_1 = \sin y_2 - \sin y_1,$$

относительно $y_1, y_2 \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ при данных x_1, x_2.

5 «Хаотичность» поведения положительных и отрицательных значений функции $Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)$ относительно равновесных множеств

Мы уже отмечали ([8], [10]), что вычисления значений функции $Z(t)$, связанные с регистрацией нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)$ показывают, что поведение положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ очень «хаотично» в промежутке, покрываемом вычислениями. По этом поводу см. например график функции $Z(t)$ в окрестности первой пары нулей Д. Лемера (удивительной специальной пары нулей функции $Z(t)$, лежащей в окрестности значения $t = 2\pi.\ 1114,\ 89$, обнаруженной Д. Лемером, см. [1], стр. 296, 297).

Конечно, поведение графика функции

$$Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3),$$

даже при условии (23), следует тоже считать «хаотичным», не только в промежутке покрываемом вычислениями, но и при $t \to \infty$.

В этой части мы получим одну из закономерностей, управляющих этой «хаотичностью» (по аналогии с работой [8]).

Пусть

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_3^+(x_1, x_2) &= \{t\colon t \in G_3(x_1, x_2),\quad Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3) > 0\},\\
\tilde{G}_3^-(x_1, x_2) &= \{t\colon t \in G_3(x_1, x_2),\quad Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3) < 0\},\\
\tilde{G}_3^0(x_1, x_2) &= \{t\colon t \in G_3(x_1, x_2),\quad Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3) = 0\},
\end{aligned} \tag{25}$$

аналогичный смысл имеют обозначения $\tilde{G}_4^+(y_1, y_2)$, $\tilde{G}_4^-(y_1, y_2)$, $\tilde{G}_4^0(y_1, y_2)$. Заметим, что перечисленные множества взаимно не пересекаются и,

$$m\{\tilde{G}_3^0(x_1, x_2)\} = m\{\tilde{G}_4^0(y_1, y_2)\} = 0.$$

Справедлива следующая

Теорема 4. Если $G_3(x_1, x_2) \in \boldsymbol{G}_3$, $G_4(y_1, y_2) \in \boldsymbol{G}_4$ — два равновесных множества, то

$$\int_{\tilde{G}_3^+(x_1, x_2) \cup \tilde{G}_4^+(y_1, y_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t \sim$$

$$\sim -\int_{\tilde{G}_3^-(x_1, x_2) \cup \tilde{G}_4^-(y_1, y_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t, \tag{26}$$

при $T \to \infty$ и $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ удовлетворяющих условию (23).

Замечание 7. На самом деле, по Теореме 3, для любого $G_3(x_1, x_2) \in \boldsymbol{G}_3$, где $-\pi/2 < x_1 < x_2 \leqq \pi/2$ или $-\pi/2 \leqq x_1 < x_2 < \pi/2$, имеем бесконечное множество (мощности континуума) асимптотических формул (26).

Пусть $D^+ = D^+(x_1, x_2, y_1, y_2)$ обозначает фигуру, соответствующую (обычным образом) графику функции

$$Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3), \quad t \in \tilde{G}_3^+(x_1, x_2) \cup \tilde{G}_4^+(y_1, y_2)$$

и $D^- = D^-(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — фигуру, соотвествующую графику функции

$$Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3), \quad t \in \tilde{G}_3^-(x_1, x_2) \cup \tilde{G}_4^-(y_1, y_2),$$

($\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ удовлетворяют условию (23)).

Пусть $m(D^+)$, $m(D^-)$ обозначают меры (площади) соответствующих фигур.

Замечание 8. Теорема 4 выражает следующую геометрическую закономерность в вопросе о поведении графика функции

$$Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3), \quad t \in G_3(x_1, x_2) \cup G_4(y_1, y_2),$$

где $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$ — равновесные множества:

$$m(D^+) \sim m(D^-), \quad T \to \infty.$$

Теперь мы проверим справедливость Теоремы 4. Из первой асимптотической формулы (22) следует (см. (25)) соотношение

$$0 < A(x_1, x_2)\,U < \int_{G_3(x_1, x_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \int_{\tilde{G}_3^+(x_1, x_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \int_{\tilde{G}_3^+(x_1, x_2) \cup \tilde{G}_4^+(y_1, y_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t, \tag{27}$$

($0 < A(x_1, x_2)$ — постоянная, зависящая от выбора x_1, x_2) для достаточно больших $T > 0$. Аналогичным образом получаем оценку

$$0 < B(y_1, y_2)\, U < -\int_{\tilde{G}_3^-(x_1,x_2)\cup\tilde{G}_4^-(y_1,y_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t. \quad (28)$$

Так как $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$ — равновесные множества и $\tilde{G}_3^+(x_1, x_2)$, $\tilde{G}_4^+(y_1, y_2)$, $\tilde{G}_3^-(x_1, x_2)$, $\tilde{G}_4^-(y_1, y_2)$ — взаимно не пересекаются, то (см. (24), (25))

$$o(U) = \int_{G_3(x_1,x_2)\cup G_4(y_1,y_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\tilde{G}_3^+(x_1,x_2)\cup\tilde{G}_4^+(y_1,y_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{\tilde{G}_3^-(x_1,x_2)\cup\tilde{G}_4^-(y_1,y_2)} Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t. \quad (29)$$

Теперь, из (29), в силу (27), (28), следует асимптотическая формула (26).

6 Дискретные кубические корреляционные формулы и доказательство Теоремы 1

Дискретным основанием для доказательства Теоремы 1 является следующая

Теорема 5. Если

$$T^{\frac{3}{4}+2\varepsilon} \leqq U \leqq T^{\frac{7}{8}+\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 = O(T^{\frac{1}{48}-\varepsilon}), \quad (30)$$

то

$$\begin{gathered}\sum_{T\leqq k_{2\nu}\leqq T+U} Z[k_{2\nu}(\tau)+\varrho_1]Z[k_{2\nu}(\tau)+\varrho_2]Z[k_{2\nu}(\tau)+\varrho_3] = \\ = \frac{3}{2\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\{\tau+(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\} + O(T^{13/16}), \\ \sum_{T\leqq k_{2\nu+1}\leqq T+U} Z[k_{2\nu+1}(\tau)+\varrho_1]Z[k_{2\nu+1}(\tau)+\varrho_2]Z[k_{2\nu+1}(\tau)+\varrho_3] = \\ = -\frac{3}{2\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\{\tau+(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\} + O(T^{13/16}),\end{gathered} \quad (31)$$

где O — оценки имеют место равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

При переходе от дискретных формул (31) к интегральным формулам (8), т.е. при завершении

Доказательства Теоремы 1, мы действуем как в работе [9], часть 5. Только:

(A) Вместо интеграла

$$\int_T^{T+U} |Z^3(t)|\,\mathrm{d}t,$$

мы теперь должны оценить интеграл

$$I = \int_T^{T+U} |Z(t+\varrho_1)Z(t+\varrho_2)Z(t+\varrho_3)|\,\mathrm{d}t.$$

Однако, повторное применение неравенства Коши-Буняковского, приводит нас к нужной оценке

$$I \leqq \left(\int_T^{T+U} Z^2(t+\varrho_1)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_T^{T+U} Z^4(t+\varrho_2)\,\mathrm{d}t \cdot \int_T^{T+U} Z^4(t+\varrho_3)\,\mathrm{d}t\right)^{1/4} <$$

$$< A\sqrt{UT}\ln^{5/2} T;$$

использованы оценки ([3], стр. 109, 142, 147)

$$\begin{gathered} Z(t) = O(t^{1/6}\ln t), \\ \int_T^{T+U} Z^2(t+\varrho_1)\,\mathrm{d}t = \int_T^{T+U} Z^2(t)\,\mathrm{d}t + O(|\varrho| \cdot T^{1/3}\ln^2 T) < AU\ln T, \\ \int_T^{T+U} Z^4(t+\varrho_i)\,\mathrm{d}t < \int_T^{2T} Z^4\ (t+\varrho_i)\,\mathrm{d}t = \int_T^{2T} Z^4(t)\,\mathrm{d}t + \\ + O(|\varrho_i| T^{2/3}\ln^4 T) < AT\ln^4 T, \quad i = 2, 3. \end{gathered} \tag{32}$$

(B) Вместо интеграла

$$\int_{-x}^{x} \cos\tau\,\mathrm{d}\tau = 2\sin x,$$

мы теперь имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} \cos\{\tau + (\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\,ln\,P\}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \sin\{x_2 + (\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\} - \sin\{x_1 + (\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\}.$$

7 Дискретные квадратичные формулы и доказательство Теоремы 2

Дискретным основанием для доказательства Теоремы 2 является следующая

Теорема 6. Если U удовлетворяет условию (30), то

$$\begin{aligned}\sum_{T \leqq k_{2\nu} \leqq T+U} Z^2[k_{2\nu}(\tau)+\varrho] &= \frac{3}{4\pi} U \ln^2 \frac{T}{2\pi} + \\ &+ \frac{3c}{4\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + o(U \ln T) + O(T^{13/16}), \\ \sum_{T \leqq k_{2\nu+1} \leqq T+U} Z^2[k_{2\nu+1}(\tau)+\varrho] &= \frac{3}{4\pi} U \ln^2 \frac{T}{2\pi} + \\ &+ \frac{3c}{4\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + o(U \ln T) + O(T^{13/16}),\end{aligned} \tag{33}$$

где O, o — оценки имеют место равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

В этой части мы завершим

Доказатетьство Теоремы 2 с помощью дискретных формул (33). Если $k_{2\nu} \in \langle T, T+U \rangle$, то

$$\left(\frac{dk_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} = 3\vartheta_1'[k_{2\nu}(\tau)] = \frac{3}{2} \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U}{T}\right) > 0,$$

(см. (2)). Так как

$$\begin{aligned}&\int_{x_1}^{x_2} Z^2[k_{2\nu}(\tau)+\varrho]\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} Z^2[k_{2\nu}(\tau)+\varrho] \left(\frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} \cdot \frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{3}{2} \ln \frac{T}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} Z^2[k_{2\nu}(\tau)+\varrho] \frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \\ &+ O\left(\frac{U}{T} \int_{x_1}^{x_2} Z^2[k_{2\nu}(\tau)+\varrho] \frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau\right) = \\ &= \frac{3}{2} \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \int_{k_{2\nu}(x_1)}^{k_{2\nu}(x_2)} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t + O\left(\frac{U}{T} \int_{k_{2\nu}(x_1)}^{k_{2\nu}(x_2)} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t\right),\end{aligned}$$

то, интегрируя первое соотношение в (33) по τ в промежутке $\langle x_1, x_2\rangle$, получаем (см. (6))

$$\frac{3}{2}\ln\frac{T}{2\pi}\int_{G_3(x_1,x_2)} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t + O\left(\frac{U}{T}\int_{G_3(x_1,x_2)} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{3}{4\pi}(x_2-x_1)\,U\ln^2\frac{T}{2\pi} + \frac{3c}{4\pi}(x_2-x_1)\,U\ln\frac{T}{2\pi} + o\{(x_2-x_1)\,U\ln T\}. \quad (34)$$

Далее заметим, что мера множества $G_3(x_1, x_2)\setminus\langle T, T+U\rangle$ имеет оценку

$$O\left(\frac{1}{\ln T}\right),$$

(см. (17)). Следовательно, (см. (32) и условие $\varrho = O(T^{1/48-\varepsilon})$),

$$\int_{G_3(x_1,x_2)} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t < AT^{1/3}\ln T + \int_T^{T+U} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t =$$

$$= AT^{1/3}\ln T + \int_{T+\varrho}^{T+U+\varrho} Z^2(t)\,\mathrm{d}t < AT^{1/3}\ln T + AU\ln T < AU\ln T,$$

и, (см. (30)),

$$O\left(\frac{U}{T}\int_{G_3(x_1,x_2)} Z^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t\right) = O(T^{1/4-\varepsilon}\ln T) = o(U\ln T).$$

Теперь из (34) следует первая формула в (19). Аналогичным образом получается и вторая формула.

Следующие части работы содержат доказательство дискретных корреляционных формул (31), (33).

8 Преобразование формулы Римана—Зигеля

Исходим из формулы Римана—Зигеля ([3], стр. 94, 383):

$$Z(t) = 2\sum_{n\leq t_1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\{\vartheta(t) - t\ln n\} + O(t^{-1/4}), \quad t_1 = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \quad (35)$$

где

$$Z(t) = e^{\mathrm{i}\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right),$$

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{2}t\ln\pi + \operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right) = \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Так как (см. (2))

$$\vartheta(t) = \vartheta_1(t) + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

то формулу (35) напишем так

$$Z(t) = 2 \sum_{n \leqq t_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta_1(t) - t \ln n\} + O(t^{-1/4}).$$

Далее, так как для $t \in \langle T, T + U \rangle$ имеет место, (см. (2)),

$$\vartheta_1(t + \varrho) = \vartheta_1(t) + \vartheta_1'(t)\varrho + O\left(\frac{\varrho^2}{T}\right),$$

то

$$Z(t + \varrho) = 2 \sum_{n \leqq \bar{t}_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta_1(t) + \varrho\vartheta_1'(t) - (t + \varrho)\ln n\} +$$

$$+ O(T^{-1/4}) + O(\varrho^2 T^{-3/4}) =$$

$$= 2 \sum_{n \leqq \bar{t}_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta_1(t) + \varrho \ln P - (t + \varrho)\ln n + \varrho\alpha(t)\} + O(T^{-1/4}), \quad (36)$$

где

$$\bar{t}_1 = \sqrt{\frac{t + \varrho}{2\pi}}, \quad P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}},$$

$$\alpha(t) = \vartheta_1'(t) - \ln P = \frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}\ln\frac{T}{2\pi} = O\left(\frac{U}{T}\right). \quad (37)$$

Заметим, что для

$$U \leqq T^{7/8 + \varepsilon/2}, \quad \varrho = O(T^{1/48 - \varepsilon})$$

имеет место

$$\cos\{\vartheta_1(t) + \varrho \ln P + \varrho\alpha(t)\} = \cos\{\vartheta_1(t) + \varrho \ln P\} + O(|\varrho|\alpha(t)),$$

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T + U} \varrho\alpha[k_\nu(\tau)] = O\left(|\varrho| \cdot \frac{U}{T} \cdot U \ln T\right) = O(T^{13/16}), \quad (38)$$

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\alpha[k_\nu(\tau)]}{\mathrm{d}\nu} = \varrho\vartheta_1''[k_\nu(\tau)] \cdot \frac{\mathrm{d}k_\nu(\tau)}{\mathrm{d}\nu} = O(T^{-47/48}) = o(1);$$

последняя оценка показывает, что члены аналогичные $\varrho\alpha(t)$, не играют ни какой роли при оценках соответствующих внутренних сумм по методу ван дер Корпута.

Далее, так как

$$\bar{t}_1 - t_1 = O\left\{\left|\sqrt{\frac{t+\varrho}{2\pi}} - \sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right|\right\} = O\left(\frac{|\varrho|}{\sqrt{T}}\right),$$

(см. (35), (37)), то в промежуток $\langle \bar{t}_1, t_1 \rangle$ (или $t_1, \bar{t}_1\rangle$) входит не более одного целого числа. Следовательно, для суммы входящей в (36) получаем выражение:

$$\sum_{n \leqq \bar{t}_1} = \sum_{n \leqq t_1} + O(T^{-1/4}). \tag{39}$$

Теперь, из (36), в силу (39), получаем следующую формулу

$$Z(t+\varrho) = 2\sum_{n \leqq t_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta_1(t) + \varrho \ln P - (t+\varrho)\ln n + \varrho\alpha(t)\} + O(T^{-1/4}). \tag{40}$$

Так как, в силу (2),

$$k_\nu(\tau) - k_\nu = O\left(\frac{1}{\ln k_\nu}\right), \quad \tau \in \langle -\pi, \pi\rangle,$$

то

$$\sqrt{\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}} - \sqrt{\frac{k_\nu}{2\pi}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{T}\ln T}\right), \quad k_\nu \in \langle T, T+U\rangle.$$

Значит, в промежуток $\langle k_\nu(\tau), k_\nu\rangle$ (или $\langle k_\nu, k_\nu(\tau)\rangle$) входит не более одного целого числа, и,

$$\sum_{n \leqq \bar{t}_2} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n \leqq \bar{t}_3} \frac{1}{\sqrt{n}} + O(T^{-1/4}),$$

где

$$\sqrt{\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}} = \bar{t}_2, \quad \sqrt{\frac{k_\nu}{2\pi}} = \bar{t}_3.$$

Следовательно, полагая в (40) $t = k_\nu(\tau)$, получаем преобразованную формулу Римана—Зигеля:

$$Z[k_\nu(\tau) + \varrho] =$$

$$= 2\sum_{n \leqq \bar{t}_3} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left\{\frac{1}{3}\pi\nu + \frac{1}{3}\tau + \varrho\ln P - [k_\nu(\tau) + \varrho]\ln n + \varrho\alpha[k_\nu(\tau)]\right\} +$$

$$+ O(T^{-1/4}), \quad \bar{t}_3 = \sqrt{\frac{k_\nu}{2\pi}}, \tag{41}$$

для

$$k_\nu \in \langle T, T+U \rangle, \quad U \leqq T^{7/8+\varepsilon/2}, \quad \varrho = O(T^{1/48-\varepsilon}). \tag{42}$$

9 Некоторые суммы, порожденные формулой Римана—Зигеля

(A) Положим

$$\begin{gathered} Z[k_\nu(\tau)+\varrho_1] = S_3 + R_3, \quad Z[k_\nu(\tau)+\varrho_2] = S_4 + R_4, \\ Z[k_\nu(\tau)+\varrho_3] = S_5 + R_5, \end{gathered} \tag{43}$$

где (см. (41)):

$$\begin{aligned} & S_3 = 2\sum_{m \leqq \bar{t}_3} \frac{1}{\sqrt{m}} \cos\varphi_1, \\ & \varphi_1 = \frac{1}{3}\pi\nu - k_\nu(\tau)\ln m + \varrho_1 \ln\frac{P}{m} + \frac{1}{3}\tau + \varrho_1 \alpha[k_\nu(\tau)], \\ & S_4 = 2\sum_{n \leqq t_3} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\varphi_2, \\ & \varphi_2 = \frac{1}{3}\pi\nu - k_\nu(\tau)\ln n + \varrho_2 \ln\frac{P}{n} + \frac{1}{3}\tau + \varrho_2 \alpha[k_\nu(\tau)], \\ & S_5 = 2\sum_{p \leqq \bar{t}_3} \frac{1}{\sqrt{p}} \cos\varphi_3, \\ & \varphi_3 = \frac{1}{3}\pi\nu - k_\nu(\tau)\ln p + \varrho_3 \ln\frac{P}{p} + \frac{1}{3}\tau + \varrho_3 \alpha[k_\nu(\tau)], \\ & R_3,\ R_4,\ R_5 = O(T^{-1/4}). \end{aligned} \tag{44}$$

Далее,

$$Z[k_\nu(\tau)+\varrho_1] Z[k_\nu(\tau)+\varrho_2] Z[k_\nu(\tau)+\varrho_3] = S_6 + R_6, \tag{45}$$

где, (ср. [9], (27), (30), (32)),

$$S_6 = S_{61} + S_{62} + S_{63} + S_{64},$$

$$S_{6i} = 2\sum\sum\sum_{m,n,p \leqq t_3} \frac{1}{\sqrt{mnp}} \cos\{2\pi\Phi_{1i}(\nu)\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\Phi_{11}(\nu) = \frac{\nu}{6} - \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}\ln\frac{mn}{p} + \frac{\varrho_1}{2\pi}\ln\frac{P}{m} + \frac{\varrho_2}{2\pi}\ln\frac{P}{n} -$$

$$- \frac{\varrho_3}{2\pi} \ln \frac{P}{p} + \frac{\tau}{6\pi} + \frac{1}{2\pi} (\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3) \alpha[k_\nu(\tau)] ,$$

$$\Phi_{12}(\nu) = \frac{\nu}{6} - \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi} \ln \frac{mp}{n} + \frac{\varrho_1}{2\pi} \ln \frac{P}{m} - \frac{\varrho_2}{2\pi} \ln \frac{P}{n} +$$

$$+ \frac{\varrho_3}{2\pi} \ln \frac{P}{p} + \frac{\tau}{6\pi} + \frac{1}{2\pi} (\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3) \alpha[k_\nu(\tau)] ,$$

$$\Phi_{13}(\nu) = \frac{\nu}{6} - \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi} \ln \frac{np}{m} - \frac{\varrho_1}{2\pi} \ln \frac{P}{m} + \frac{\varrho_2}{2\pi} \ln \frac{P}{n} +$$

$$+ \frac{\varrho_3}{2\pi} \ln \frac{P}{p} + \frac{\tau}{6\pi} + \frac{1}{2\pi} (-\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) \alpha[k_\nu(\tau)] ,$$

$$S_{64} = 2 \sum\sum\sum_{m,n,p \leqq t_3} \frac{1}{\sqrt{mnp}} \cos\{2\pi\Phi_{21}(\nu)\} ,$$

$$\Phi_{21}(\nu) = \frac{\nu}{2} - \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi} \ln(mnp) + \frac{\varrho_1}{2\pi} \ln \frac{P}{m} + \frac{\varrho_2}{2\pi} \ln \frac{P}{n} +$$

$$+ \frac{\varrho_3}{2\pi} \ln \frac{P}{p} + \frac{\tau}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) \alpha[k_\nu(\tau)] ,$$

и, (см. (43)—(45)),

$$R_6 = (S_3S_4 + S_3S_5 + S_4S_5)O(t^{-1/4}) + (S_3 + S_4 + S_6)O(T^{-1/2}) =$$

$$= O\{T^{-1/4}(|Z[k_\nu(\tau) + \varrho_1]Z[k_\nu(\tau) + \varrho_2])| +$$

$$+ |Z[k_\nu(\tau) + \varrho_1]Z[k_\nu(\tau) + \varrho_3]| + |Z[k_\nu(\tau) + \varrho_2]Z[k_\nu(\tau) + \varrho_3]|)\} +$$

$$+ O\{T^{-1/2}(|Z[k_\nu(\tau) + \varrho_1]| + |Z[k_\nu(\tau) + \varrho_2]| + |Z[k_\nu(\tau) + \varrho_3]|)\} + O(T^{-3/4}) .$$

(B) В силу (43)—(45) мы получаем следующие соотношения:

$$(-1)^\nu Z[k_\nu(\tau) + \varrho_1]Z[k_\nu(\tau) + \varrho_2]Z[k_\nu(\tau) + \varrho_3] = S_7 + R_7 , \tag{46}$$

где, (ср. [9], (36), (40)),

$$S_7 = S_{71} + S_{72} + S_{73} + S_{74} ,$$

$$S_{7i} = 2 \sum\sum\sum_{m,n,p \leqq t_3} \frac{1}{\sqrt{mnp}} \cos\{2\pi\Phi_{4i}(\nu)\} , \quad i = 1, 2, 3$$

$$\Phi_{41}(\nu) = \frac{\nu}{3} + \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi} \ln \frac{mn}{p} - \frac{\varrho_1}{2\pi} \ln \frac{P}{m} - \frac{\varrho_2}{2\pi} \ln \frac{P}{n} +$$

$$+\frac{\varrho_3}{2\pi}\ln\frac{P}{p}-\frac{\tau}{6\pi}+\frac{1}{2\pi}(-\varrho_1-\varrho_2+\varrho_3)\alpha[k_\nu(\tau)],$$

$$\Phi_{42}(\nu)=\frac{\nu}{3}+\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}\ln\frac{mp}{n}-\frac{\varrho_1}{2\pi}\ln\frac{P}{m}+\frac{\varrho_2}{2\pi}\ln\frac{P}{n}-$$

$$-\frac{\varrho_3}{2\pi}\ln\frac{P}{p}-\frac{\tau}{6\pi}+\frac{1}{2\pi}(-\varrho_1+\varrho_2-\varrho_3)\alpha[k_\nu(\tau)], \tag{47}$$

$$\Phi_{43}(\nu)=\frac{\nu}{3}+\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}\ln\frac{np}{m}+\frac{\varrho_1}{2\pi}\ln\frac{P}{m}-\frac{\varrho_2}{2\pi}\ln\frac{P}{n}-$$

$$-\frac{\varrho_3}{2\pi}\ln\frac{P}{p}-\frac{\tau}{6\pi}+\frac{1}{2\pi}(\varrho_1-\varrho_2-\varrho_3)\alpha[k_\nu(\tau)],$$

$$S_{74}=2\sum\sum\sum_{m,n,p\leqq t_3}\frac{1}{\sqrt{mnp}}\cos\{2\pi\Phi_{31}(\nu)\},$$

$$\Phi_{31}(\nu)=\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}\ln(mnp)-\frac{\varrho_1}{2\pi}\ln\frac{P}{m}-\frac{\varrho_2}{2\pi}\ln\frac{P}{n}-$$

$$-\frac{\varrho_3}{2\pi}\ln\frac{P}{p}-\frac{\tau}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\alpha[k_\nu(\tau)],$$

$$R_7=(-1)^\nu R_6=O\{|R_6|\}.$$

(C) Полагая в (36) $t=k_\nu(\tau)+\varrho$, (см. также последнее преобразование в части 8), получаем соотношение

$$Z^2[k_\nu(\tau)+\varrho]=2S_8+2S_9+R_8, \tag{48}$$

где, (ср. [9], (44), (48)),

$$S_8=\sum\sum_{m,n\leqq t_3}\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\{2\pi\Phi_{51}(\nu)\},$$

$$\Phi_{51}(\nu)=\frac{1}{\pi}\vartheta_1[k_\nu(\tau)+\varrho]-\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}\ln(mn)-\frac{\varrho}{2\pi}\ln(mn)+\frac{1}{\pi}\varrho\alpha[k_\nu(\tau)],$$

$$S_9=\sum\sum_{m,n\leqq t_3}\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\{2\pi\Phi_{61}(\nu)\},$$

$$\Phi_{61}(\nu)=\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}\ln\frac{m}{n}+\frac{\varrho}{2\pi}\ln\frac{m}{n}, \tag{49}$$

$$R_8=O(t^{-1/12}\ln t);$$

в остаточном члене R_8 использована оценка из (32).

10 Вспомогательные утверждения

Прежде всего мы сделаем следующие подстановки:
(А) в соотношениях [9], (27)—(29),

$$\Phi_1(\nu) \to \Phi_{1i}(\nu), \quad V_1 \to V_1^i, \quad W_1 \to W_1^i,$$

(В) в соотношениях [9], (32)—(34),

$$\Phi_2(\nu) \to \Phi_{21}(\nu), \quad V_2 \to \bar{V}_2, \quad W_2 \to \bar{W}_2.$$

После этого просто убеждаемся в том, что имеют место следующие аналоги Лемм 1, 2 из работы [9].

Лемма $\bar{1}$. Если $U \leqq T^{7/8+\varepsilon/2}$, то

$$W_1^i = O(T^{3/4+\varepsilon}), \quad i = 1, 2, 3$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

Лемма $\bar{2}$. Если $U \leqq T^{7/8+\varepsilon/2}$, то

$$\bar{W}_2 = O(T^{3/4}\ln^{5/2} T),$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

Далее, сравнивая соотношения (47) и [9], (36)—(40), получаем аналоги Лемм 3, 4 из работы [9].

Лемма $\bar{3}$. Если $U \leqq T^{7/8+\varepsilon/2}$, то

$$\bar{W}_3 = O(T^{3/4}\ln T),$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

Лемма $\bar{4}$. Если $U \leqq T^{7/8+\varepsilon/2}$, то

$$W_4^i = O(T^{3/4}),$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

Наконец, сравнивая сооотношения (49) и [9], (44), (48), получаем аналоги Лемм 5, 6 из работы [9].

Лемма $\bar{5}$. Если $U \leqq T$, то

$$\bar{W}_5 = O(\sqrt{T}\ln^{5/2} T), \tag{50}$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

Лемма $\bar{6}$. Если $U \leqq T$, то

$$\bar{W}_6 = O(\sqrt{T}\ln^2 T), \tag{51}$$

равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

К доказательству Лемы $\bar{5}$ еще заметим следующее:

$$\Phi'_{51}(\nu) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial \vartheta_1[k_\nu(\tau)+\varrho]}{\partial[k_\nu(\tau)+\varrho]}\cdot\frac{\mathrm{d}k_\nu(\tau)}{\mathrm{d}\nu} - \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}k_\nu(\tau)}{\mathrm{d}\nu}\ln(mn) + o(1) =$$

$$= \frac{1}{3\ln\dfrac{k_\nu(\tau)}{2\pi}}\ln\frac{\dfrac{k_\nu(\tau)+\varrho}{2\pi}}{mn} + o(1) < \frac{1}{3} + o(1). \qquad (52)$$

Отсюда следует оценка

$$|\Phi'_{51}(\nu)| < \frac{1}{2},$$

как в 12-ой части работы [9].

11 Основные вспомогательные утверждения

Полагая в соотношении (c — постоянная Эйлера)

$$\sum_{1 \leqq n \leqq X}\frac{1}{n} = \ln X + c + O\left(\frac{1}{X}\right),$$

$X = \bar{t}_3$ (см. (41)), и, принимая во внимание, что

$$\bar{t}_3 - P = \sqrt{\frac{k_\nu}{2\pi}} - \sqrt{\frac{T}{2\pi}} = O\left(\frac{U}{\sqrt{T}}\right), \quad k_\nu \in \langle T, T+U\rangle,$$

получаем

$$\sum_{1 \leqq n \leqq \bar{t}_3}\frac{1}{n} = \sum_{1 \leqq n < P}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{P}\cdot\frac{U}{\sqrt{T}}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{T}{2\pi} + c + O\left(\frac{U}{T}\right). \qquad (53)$$

Теперь, в силу (16), (48)—(53), имеем

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} Z^2[k_\nu(\tau)+\varrho] = 2\bar{W}_5 + 2\bar{W}_6 +$$

$$+ 2\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} 1 \cdot \sum_{n \leqq \bar{t}_3}\frac{1}{n} + O(T^{-1/12}\ln T\cdot U\ln T) + O(T^{13/16}) =$$

$$= \frac{3}{2\pi}U\ln^2\frac{T}{2\pi} + \frac{3c}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U^2}{T}\ln T\right) + O(T^{13/16}) =$$

$$= \frac{3}{2\pi}U\ln^2\frac{T}{2\pi} + \frac{3c}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi} + O(T^{13/16}),$$

для $U \leqq T^{7/8+\varepsilon/2}$. Следовательно, имеет место

Лемма $\overline{\text{B}}$. Если

$$T^{3/4+2\varepsilon} \leqq U \leqq T^{7/8+\varepsilon/2},$$

то

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} Z^2[k_\nu(\tau) + \varrho] =$$

$$= \frac{3}{2\pi} U \ln^2 \frac{T}{2\pi} + \frac{3c}{\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + o(U \ln T) + O(T^{13/16}),$$

где o, O — оценки имеют место равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

Далее, из (43), (44), в силу Леммы $\bar{1}$ и $\bar{2}$, получаем соотношение

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} Z[k_\nu(\tau) + \varrho_1] Z[k_\nu(\tau) + \varrho_2] Z[k_\nu(\tau) + \varrho_3] =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{3} W_1^i + 2\bar{W}_2 + R_8 = O(T^{3/4+\varepsilon}) + R_8,$$

где

$$R_8 = \sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} R_6. \tag{54}$$

Однако, по Лемме $\overline{\text{B}}$, например, (см. (16), (41)),

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} |Z[k_\nu(\tau) + \varrho_1]| = O\left\{\sqrt{U \ln T}\left(\sum_{k_\nu} Z^2[k_\nu(\tau) + \varrho_1]\right)^{1/2}\right\} = O(U \ln^{3/2} T),$$

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} |Z[k_\nu(\tau) + \varrho_1] Z[k_\nu(\tau) + \varrho_2]| =$$

$$= O\left\{\left(\sum_{k_\nu} Z^2[k_\nu(\tau) + \varrho_1]\right)^{1/2} \left(\sum_{k_\nu} Z^2[k_\nu(\tau) + \varrho_2]\right)^{1/2}\right\} = O(U \ln^2 T).$$

Значит, (см. (45), (54)),

$$\begin{aligned} R_8 &= O(T^{-1/4} U \ln^2 T) + O(T^{-1/2} U \ln^{3/2} T) + O(T^{-3/4} U \ln T) = \\ &= O(T^{-1/4} U \ln^2 T) = O(T^{3/4+\varepsilon}), \end{aligned} \tag{55}$$

при условии

$$U \leqq \frac{T^{1+\varepsilon}}{\ln^2 T}.$$

Следовательно, имеет место, (ср. [9], (20)),

Лемма $\overline{\text{А}}$. Если $U \leqq T^{7/8+\varepsilon/2}$, то оценка

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} Z[k_\nu(\tau)+\varrho_1]Z[k_\nu(\tau)+\varrho_2]Z[k_\nu(\tau)+\varrho_3] = O(T^{13/16}),$$

имеет место равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

Из (46), (47), в силу Лемм $\overline{3}$, $\overline{4}$ и (16), получаем соотношение

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu Z[k_\nu(\tau)+\varrho_1]Z[k_\nu(\tau)+\varrho_2]Z[k_\nu(\tau)+\varrho_3] =$$

$$= 2\bar{W}_2 + 2\sum_{i=1}^{3} W_4^i + 2\cos\{\tau + (\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\}\cdot$$

$$\cdot \sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} 1 + O(T^{3/4+\varepsilon}) + O(T^{13/16}) =$$

$$= \frac{3}{\pi} U \ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\{\tau + (\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\} + O(T^{13/16}),$$

так как

$$\frac{U^2}{T} \leqq T^{3/4+\varepsilon},$$

для $U \leqq T^{7/8+\varepsilon/2}$. Конечно, оценка

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} R_7 = O(T^{3/4+\varepsilon}),$$

получается как в (55), (ср. последнее соотношение в (47)). Следовательно, имеет место

Лемма $\overline{\text{Б}}$. Если $U \leqq T^{7/8+\varepsilon/2}$, то

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu Z[k_\nu(\tau)+\varrho_1]Z[k_\nu(\tau)+\varrho_2]Z[k_\nu(\tau)+\varrho_3] =$$

$$= \frac{3}{\pi} U \ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\{\tau + (\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\ln P\} + O(T^{13/16}),$$

где O — оценки имеют место равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и ϱ_1, ϱ_2, $\varrho_3 = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

Нам нужна еще следующая

Лемма Г. Если

$$T^{3/4+2\varepsilon} \leqq U \leqq T^{7/8+\varepsilon/2},$$

то

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu Z^2[k_\nu(\tau)+\varrho] = o(U\ln T) + O(T^{13/16}),$$

где O, o — оценка имеет место равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho = O(T^{1/48-\varepsilon})$.

Действительно. В силу (48),

$$(-1)^\nu Z^2[k_\nu(\tau) + \varrho] = 2(-1)^\nu S_8 + 2(-1)^\nu S_9 + (-1)^\nu R_8,$$

и (см. (16), (49), (53), [9], (45), (46), (48)—(50), $(-1)^\nu S_9(m = n) = (-1)^\nu$),

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu Z^2[k_\nu(\tau) + \varrho] =$$

$$= 2\bar{\bar{W}}_5 + 2\bar{\bar{W}}_6 + 2 \sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu \cdot \sum_{n \leqq \bar{t}_3} \frac{1}{n} + O(T^{13/16}) +$$

$$+ O(T^{-1/2} \ln T \cdot U \ln T) = o(U \ln T) + O(T^{13/16}), \tag{56}$$

где $\bar{\bar{W}}_5$ есть сумма типа [9], (46), соответствующая функции

$$\tilde{\Phi}_{51} = \Phi_{51} + \frac{\nu}{2}$$

и $\bar{\bar{W}}_6$ — сумма типа [9], (50), соответствующая функции

$$\tilde{\Phi}_{61} = \Phi_{61} + \frac{\nu}{2},$$

(относительно Φ_{51}, Φ_{61} см. (49)). Так как (см. (52))

$$|\tilde{\Phi}'_{51}| < \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + o(1) < \frac{11}{12} < 1$$

и (см. (49) и [9], часть 13)

$$|\tilde{\Phi}'_{61}| < \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + o(1) < \frac{5}{6} < 1,$$

то, аналогично случаям (50), (51), имеют место оценки

$$\bar{\bar{W}}_5 = O(\sqrt{T} \ln^{5/2} T), \quad \bar{\bar{W}}_6 = O(\sqrt{T} \ln^2 T),$$

которые были использованы в соотношении (56).

Наконец заметим, что из Леммы $\overline{\text{А}}$ и $\overline{\text{Б}}$ следует Теорема 5 а из Леммы $\overline{\text{В}}$ и Г следует Теорема 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lehmer, D. H.: On the roots of the Riemann Zeta-function, Acta Math., 95 (1956), 291—298.

2. Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, Quart. J. Math., 5 (1934), 98—105.
3. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, ИИЛ, Москва 1953.
4. Мозер, Ян: Об одной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 31—43.
5. Мозер, Ян: Об одной теореме А. Сельберга в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., 42—43, (1983), 65—72.
6. Мозер, Ян: Некоторые следствия из формулы Римана—Зигеля Труды Мат. института АН СССР, (1984), т. 163, 183—186.
7. Мозер, Ян: Новые теоремы о среднем в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 46—47, (1985), 21—40.
8. Мозер, Ян: О поведении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 46—47, (1985), 41—48.
9. Мозер, Ян: Кубические теоремы о среднем в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 50—51 (1987), 133—163.
10. Мозер, Ян: Об интегральном равновесии функции $Z(t)$ в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 50—51 (1987), 165—175.
11. Мозер, Ян: О мерах некоторых множеств на критической прямой, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 50—51 (1987), 177—194.

Адрес автора:
Ján Moser
Kat. mat. analýzy MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 16. 9. 1986

SÚHRN

KUBICKÉ KORELAČNÉ VZORCE V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

V tejto práci sú vety o strednej hodnote pre funkciu $Z^3(t)$ (dokázaná v práci [9]), vložené do 7-parametrického systému kubických korelačných formúl:

$$\int_{G_3(x_1, x_2)} Z(t + \varrho_1)Z(t + \varrho_2)Z(t + \varrho_3)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi} U(\sin\{x_2 + (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)\ln P\} - \sin\{x_1 + (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)\ln P\}) + O(T^{13/16 + \varepsilon}),$$

$$\int_{G_4(y_1, y_2)} Z(t + \varrho_1)Z(t + \varrho_2)Z(t + \varrho_3)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{\pi} U(\sin\{y_2 + (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)\ln P\} - \sin\{y_1 + (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)\ln P\}) + O(T^{13/16 + \varepsilon}),$$

kde $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$ sú dva systémy nesúvislých množín, $U \in \langle T^{13/16 + 2\varepsilon}, T^{7/8 + \varepsilon/2}\rangle$, ϱ_1, ϱ_2, $\varrho_3 = O(T^{1/48 - \varepsilon})$, $0 < \varepsilon$ je dostatočne malé číslo. Na základe týchto vzorcov je v práci študovaná

integrálna rovnováha funkcie $Z(t + \varrho_1)Z(t + \varrho_2)Z(t + \varrho_3)$ a chovanie sa kladných a záporných hodnôt tejto funkcie na rovnovážnych množinách.

SUMMARY

CUBICAL CORRELATION FORMULAS IN THE THEORY OF RIEMANN ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

In the present paper the mean value theorems for the function $Z^3(t)$ (proved in [9]) are embedded into the following system with 7 parameters

$$\int_{G_3(x_1, x_2)} Z(t + \varrho_1)Z(t + \varrho_2)Z(t + \varrho_3)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi} U(\sin\{x_2 + (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)\ln P\} - \sin\{x_1 + (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)\ln P\}) + O(T^{13/16 + \varepsilon}),$$

$$\int_{G_4(y_1, y_2)} Z(t + \varrho_1)Z(t + \varrho_2)Z(t + \varrho_3)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{\pi} U(\sin\{y_2 + (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)\ln P\} - \sin\{y_1 + (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)\ln P\}) + O(T^{13/16 + \varepsilon}),$$

where $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$ are two collections of disconnected sets, $U \in \langle T^{13/16 + 2\varepsilon}, T^{7/8 + \varepsilon/2}\rangle$, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 = O(T^{1/48 - \varepsilon})$, ε is a positive number. On the basis of the above formulas the integral equilibrium of the function $Z(t + \varrho_1)Z(t + \varrho_2)Z(t + \varrho_3)$ and the behaviour of the positive and negative values of the last, on the equilibrium sets, is studied.