UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LII—LIII—1987

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ $Z(t) = 0$, $Z'(t) = 0$ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

1 Постановка вопроса. Формулировка результатов

Пусть $\{\gamma\}$, $\gamma > 0$ означает возрастающую последовательность ординат нулей $\varrho = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma$ функции $\zeta(s)$, $s = \sigma + \mathrm{i}t$, (ордината кратного нуля считается один раз). Напомним ([9], стр. 94, 383), что

$$Z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right),$$

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{2}t\ln\pi + \operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{i}t\right) = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Очевидно, что $\{\gamma\}$ есть последовательность корней уравнеия $Z(t) = 0$.

Пусть, далее, $\{t_0\}$ означает последовательность значений t_0, определенная следующими условиями ([11]—[14]),

$$Z'(t_0) = 0, \quad 0 < \gamma' < t_0 < \gamma'', \quad t_0 \to \infty \tag{2}$$

где $\varrho' = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma'$, $\varrho'' = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma''$ — соседние нули функции $\zeta(s)$, лежащие на критической прямой. Ясно, что $\{t_0\}$ есть специальная последовательность корней уравнения $Z'(t) = 0$, именно исключены кратные корни уравнения $Z(t) = 0$ (если они существуют).

Далее напомним, что для вычисления значений функции $Z(t)$, Титчмарш впервые использовал формулу Римана-Зигеля (см. [5], [6]). Уточнением метода Титчмарша и продолжением вычислений занимался Лемер. При этом Лемер открыл две пары нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ фундаментальной важности — первую пару в работе [2] а вторую пару в работе [3]. Эти пары нулей естетвенно назвать парами Лемера. Заметим, что вторую пару Лемера открыл независимо и Меллер [8].

График функции $Z(t)$ в некоторой окрестности первой пары Лемера приведен в работе [2], стр. 216 и воспроизведен в прекрасной книге Эдвардса [1], стр. 178.

Вычисления значений функции $Z(t)$ показывают (см. специально график Лемера), что члены последовательности $\{t_0\}$ совершают сложные колебания относительно "положений рановесия"

$$\left\{\frac{\gamma' + \gamma''}{2}\right\}$$

Еще напомним, что, по гипотезе Римана, члены последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$ отделяют друг друга (см. например [13], Следствие 3) и t_0 — точки локальных экстремумов функции $Z(t)$*.

В предлагаемой работе мы будем изучать последовательность

$$\left\{\frac{m(t_0)}{Q(t_0)}\right\},$$

где (см. [15], (2)),

$$m(t_0) = \min\{t_0 - \gamma', \gamma'' - t_0\}, \quad Q(t_0) = \max\{t_0 - \gamma', \gamma'' - t_0\},$$

$(\gamma' < t_0 < \gamma'')$. Общий член этой последовательности характеризует асимметрию положения точки t_0 относительно промежутка (γ', γ''). В этом направлении мы получим следующий результат.

Теорема 1. По гипотезе Римана

$$\frac{m(t_0)}{Q(t_0)} > \frac{1}{t_0(\ln t_0)^2 \ln_2 t_0 \ln_3 t_0}, \tag{3}$$

где $\ln_2 t_0 = \ln\ln t_0, \ldots$.

Напомним, что в работе [15] мы получили, в предположении справедливости ослабленной гипотезы Мертенса (см. [7] и [9] стр. 375), оценку

---

* В 1988 г. автор получил формулу:

$$\int_T^{T+H} \sqrt{1+\{Z'(t)\}^2}\,dt \sim 2. \sum_{T \le t_0 \le T+H} |Z(t_0)|, \quad T \to \infty$$

$$m(t_0) > \frac{1}{\exp\left(A\dfrac{\ln^2 t_0}{\ln\ln t_0}\right)}.$$

Отсюда, в силу оценки Литтлвуда [4],

$$Q(t_0) < \gamma'' - \gamma' < \frac{A}{\ln\ln\gamma'}, \tag{4}$$

которая имеет место в предположении справедливости гипотезы Римана, получаем следующую оценку снизу:

$$\begin{gathered}\frac{m(t_0)}{Q(t_0)} > Am(t_0)\ln\,\ln t_0 > \frac{A\ln\ln t_0}{\exp\left(A\dfrac{\ln^2 t_0}{\ln\ln t_0}\right)} > \\ > \frac{1}{\exp\left(A\dfrac{\ln^2 t_0}{\ln\ln t_0}\right)} = \frac{1}{t_0^{A\frac{\ln t_0}{\ln\ln t_0}}}.\end{gathered} \tag{5}$$

Значит, имеет место теорема: по ослабленной гипотезе Мертенса имеет место оценка (5).

Еще напомним, что из ослабленной гипотезы Мертенса следует гипотеза Римана, ([7], стр. 23). Относительно оценок (3), (5) теперь делаем следующее

Замечание 1. В предлагаемой работе получена более точная чем (5) оценка (3), при менее жестком ограничении — в предположении справедливости гипотезы Римана.

Доказательство Теоремы 1 опирается на формулу

$$\frac{\pi}{4} \sim \sum_{\gamma} \frac{t_0}{\gamma^2 - t_0^2}, \quad t_0 \to \infty, \tag{6}$$

(см. [11], [13]). Формула (6) была получена в связи с новым доказательством формулы Римана

$$c + 2 - \ln 4\pi = \sum_{\gamma} \frac{1}{\frac{1}{4} + \gamma^2},$$

c — постоянная Эйлера, основанным на свойствах функции $Z(t)$ и гипотезе Римана, (относительно формулы Римана см. [1], стр. 67, 159, 160). При доказательстве Теоремы 1 используется то обстоятельство, что формула (6) очень «чувствительна» по отношению к малым значениям величины $m(t_0)/Q(t_0)$.

Далее мы получим результат, характеризующий убывание функции $|Z(t)|$ в некоторой окрестности точки локального максимума t_0. Справедлива следующая

Теорема 2. По гипотезе Римана, для любой возрастающей к ∞ функции $\psi(t) > 0$ существуют $T_1(\psi)$, $A > 0$ такие, что

$$|Z(t)| > \frac{|Z(t_0)|}{t_0^{\frac{A}{\psi^2(t_0)}}}, \tag{7}$$

для

$$t \in < t_0 - \frac{m(t_0)}{\psi(t_0}, \quad t_0 + \frac{m(t_0)}{\psi(t_0)} >, \quad t_0 > T_1(\psi). \tag{8}$$

Полагая в (7), (8) $\psi(t) = \sqrt{A \ln t}$, получаем

Следствие. По гипотезе Римана имеет место

$$|Z(t)| > \frac{1}{e}|Z(t_0)|,$$

для

$$t \in < t_0 - \frac{m(t_0)}{\sqrt{A \ln t_0}}, \quad t_0 + \frac{m(t_0)}{\sqrt{A \ln t_0}} >,$$

где $t_0 > T_2$.

2 Первая основная формула

Прежде всего напомним доказательство формулы (6). Так как (см. [10], стр. 37

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - 2\int_0^\infty \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2 + z^2)(e^{\pi t} - 1)} = \ln z + O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

и, по гипотезе Римана,

$$\sum_\varrho \left(\frac{1}{s - \varrho} + \frac{1}{\varrho}\right) = \sum_{\gamma > 0} \frac{1}{\frac{1}{4} + \gamma^2} + \mathrm{i}\sum_{\gamma > 0} \frac{2t}{\gamma^2 - t^2},$$

то формула Римана—Адамара (см. [9], стр. 41)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \ln 2\pi - 1 - \frac{c}{2} - \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2} + 1\right) + \sum_\varrho \left(\frac{1}{s - \varrho} + \frac{1}{\varrho}\right)$$

в случае $s = \frac{1}{2} + \mathrm{i}t$, $t \neq \gamma$, приводит нас к соотношению

$$\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right) = -\frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2\pi - 1 - \frac{1}{2}c +$$
$$+ \sum_{\gamma > 0} \frac{1}{\frac{1}{4} + \gamma^2} + O\left(\frac{1}{t}\right) + \mathrm{i}\left\{-\frac{1}{4}\pi + \sum_{\gamma > 0} \frac{2t}{\gamma^2 - t^2} + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}, \tag{9}$$

где использовано равенство

$$-\frac{1}{2} ln\left(\frac{5}{4} + \mathrm{i}\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2}\ln 2 - \mathrm{i}\frac{\pi}{4} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Далее, (см. (1), (2)),

$$0 = \frac{Z'(t_0)}{Z(t_0)} = \mathrm{i}\vartheta'(t_0) + \mathrm{i}\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t_0\right),$$

т.е.

$$\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t_0\right) = -\vartheta'(t_0) = -\frac{1}{2}\ln\frac{t_0}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \tag{10}$$

где использовано соотношение ([9], стр. 260)

$$\vartheta'(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Отделяя в (9) при $t = t_0$, действительную и мнимую части, в силу (10) получаем два соотношения (в первом переходим к пределу при $t_0 \to \infty$):

$$\sum_{0 < \gamma} \frac{1}{\frac{1}{4} + \gamma^2} = 1 + \frac{c}{2} - \frac{1}{2}\ln 4\pi, \tag{11}$$

$$\frac{\pi}{8t_0} = \sum_{0 < \gamma} \frac{1}{\gamma^2 - t_0^2} + O\left(\frac{1}{t_0^2}\right). \tag{12}$$

Замечание 2. В силу способа доказательства, формулу (12) естественно назвать формулой сопряженной с формулой Римана (11).

Далее покажем, что имеет место

Лемма 1.

$$\sum_{t_0+T<\gamma} \frac{1}{\gamma^2 - t_0^2} < A\frac{\ln T}{T}, \tag{13}$$

для

$$T = T(t_0) = t_0 \ln t_0 \ln_2 t_0 . \tag{14}$$

Доказательство. Так как ([9], стр. 208)

$$N(t+1) - N(t) < A \ln t, \tag{15}$$

($N(t)$ — число нетривиальных нулей $\beta + \mathrm{i}\gamma$ функции $\zeta(s)$, $\beta \in (0, 1)$, $\gamma \in (0, t>)$, то

$$\sum_{t_0+T<\gamma} \frac{1}{\gamma^2 - t_0^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t_0+T+n-1<\gamma \leqq t_0+T+n} \frac{1}{\gamma^2 - t_0^2} <$$

$$< A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+T-1+t_0)}{(n+T-1)(n+T-1+2t_0)} <$$

$$< A\frac{\ln(T+t_0)}{T(T+2t_0)} + A\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+T-1+t_0)}{(x+T-1)(x+T-1+2t_0)}\mathrm{d}x .$$

Используя в надлежащем месте формулу

$$\int_a^{\infty} e^{-\tau}\tau \,\mathrm{d}\tau = e^{-a}(a+1),$$

получаем

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+T-1+t_0)}{(x+T-1)(x+T-1+2t_0)}\mathrm{d}x < \int_1^{\infty} \frac{\ln(x+T-1+t_0)}{(x+T-1)(x+T-1+t_0)}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\ln(T+t_0)}^{\infty} \frac{\tau}{e^{\tau} - t_0}\mathrm{d}x = \int_{\ln(T+t_0)}^{\infty} \frac{e^{-\tau}\tau}{1 - t_0 e^{-\tau}}\mathrm{d}\tau < \frac{T+t_0}{T}\int_{\ln(T+t_0)}^{\infty} e^{-\tau}\tau \,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{T}\{\ln(T+t_0) + 1\} < A\frac{\ln T}{T},$$

и доказательство Леммы 1 закончено.

Теперь из (12), в силу (13), (14) следует

Формула 1.

$$\frac{\pi}{8t_0} = \sum_{0<\gamma<t_0+T} \frac{1}{\gamma^2 - t_0^2} + O\left(\frac{1}{t_0 \ln_2 t_0}\right),$$
$$T = T(t_0) = t_0 \ln t_0 \ln_2 t_0 . \tag{16}$$

Замечание 3. Формула (16) является основой для доказательства Теоремы 1.

3 Доказательство Теоремы 1

Пусть существует $\bar{t}_0$ такое, что (ср. (3)),

$$K(\bar{t}_0) = \frac{Q(\bar{t}_0)}{m(\bar{t}_0)} \geqq \bar{t}_0 (\ln \bar{t}_0)^2 \ln_2 \bar{t}_0 \ln_3 \bar{t}_0 . \tag{17}$$

(A) Сначала предположим, что

$$\bar{t}_0 - \bar{\gamma}' = K(\bar{t}_0)(\bar{\gamma}'' - \bar{t}_0) . \tag{18}$$

В силу (16) существует $A > 0$ такое, что

$$\frac{A}{\bar{t}_0} > \sum_{0 < \gamma \leqq \bar{t}_0 + \bar{T}} \frac{1}{\gamma^2 - \bar{t}_0^2}, \tag{19}$$

где $\bar{T} = T(\bar{t}_0)$, см. (16). Далее $\left(\bar{\gamma}' < \bar{\mathrm{t}}_0 < \bar{\gamma}'', \mathrm{n}(\gamma) \right.$ обозначает кратность нуля $\left. \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma \right)$,

$$\sum_{0 < \gamma \leqq \bar{t}_0 + \bar{T}} \frac{1}{\gamma^2 - \bar{t}_0^2} = \sum_{0 < \gamma \leqq \bar{\gamma}'} \frac{1}{\gamma^2 - \bar{t}_0^2} + \frac{n(\bar{\gamma}'')}{(\bar{\gamma}'')^2 - \bar{t}_0^2} +$$

$$+ \sum_{\bar{\gamma}'' < \gamma \leqq \bar{t}_0 + \bar{T}} \frac{1}{\gamma^2 - \bar{t}_0^2} > \sum_{0 < \gamma \leqq \bar{\gamma}'} \frac{1}{\gamma^2 - t_0^2} + \frac{1}{(\bar{\gamma}'')^2 - \bar{t}_0^2} . \tag{20}$$

Теперь, используя в надлежащем месте оценку

$$N(t) < At \ln t , \tag{21}$$

([9], стр. 212), получаем

$$\sum_{0 < \gamma \leqq \bar{\gamma}'} \frac{1}{\gamma^2 - \bar{t}_0^2} = \sum_{0 < \gamma < \bar{t}_0} \frac{1}{\gamma^2 - \bar{t}_0^2} =$$

$$= - \sum_{0 < \gamma < \bar{t}_0} \frac{1}{(\bar{t}_0 - \gamma)(\gamma + \bar{t}_0)} > - \frac{1}{\bar{t}_0 - \bar{\gamma}'} \sum_{0 < \gamma < \bar{t}_0} \frac{1}{\gamma + \bar{t}_0} >$$

$$> - \frac{1}{\bar{t}_0(\bar{t}_0 - \bar{\gamma}')} \sum_{0 < \gamma < \bar{t}_0} 1 > - \frac{1}{\bar{t}_0(\bar{t}_0 - \bar{\gamma}')} A \bar{t}_0 \ln \bar{t}_0 = - A \frac{\ln \bar{t}_0}{\bar{t}_0 - \bar{\gamma}'}, \tag{22}$$

и, в силу (18),

$$\frac{1}{(\bar\gamma'')^2-\bar t_0^2}=\frac{1}{(\bar\gamma''-\bar t_0)(\bar\gamma''+\bar t_0)}>\frac{1}{2\bar\gamma''(\bar\gamma''-\bar t_0)}>A\frac{K(\bar t_0)}{\bar t_0(\bar t_0-\bar\gamma')}. \tag{23}$$

Следовательно, из (20), в силу (4), (17), (22), (23) получаем

$$\sum_{0<\gamma\leqq\bar t_0+\bar T}\frac{1}{\gamma^2-\bar t_0^2}>\frac{A}{\bar t_0-\bar\gamma'}\left\{\frac{K(\bar t_0)}{\bar t_0}-\ln\bar t_0\right\}>$$

$$>\frac{A}{\bar\gamma''-\bar\gamma'}(\ln\bar t_0)^2\ln_2\bar t_0\ln_3\bar t_0>A(\ln\bar t_0)^2(\ln_2\bar t_0)^2\ln_3\bar t_0 \tag{24}$$

и, (см. (19), (24)),

$$\frac{1}{\bar t_0}>A(\ln\bar t_0)^2(\ln_2\bar t_0)^2\ln_3\bar t_0,$$

что противоречиво.

(B) Предположим, что

$$\bar\gamma''-\bar t_0=K(\bar t_0)(\bar t_0-\bar\gamma'). \tag{25}$$

В силу (16) существует $A>0$ такое, что

$$\frac{A}{\bar t_0}<\sum_{0<\gamma\leqq\bar t_0+\bar T}\frac{1}{\gamma^2-\bar t_0^2}. \tag{26}$$

Далее действуем как в случае (A) с той лишь разницей, что соответствующие величины будем оценивать сверху. В результате получаются следующие соотношения:

в силу (14), (21),

$$\sum_{0<\gamma\leqq\bar t_0+\bar T}1<A\bar T\ln\bar T<A\bar t_0(\ln\bar t_0)^2\ln_2\bar t_0, \tag{27}$$

в силу (25),

$$\sum_{0<\gamma\leqq\bar\gamma'}\frac{1}{\gamma^2-\bar t_0^2}<\frac{1}{(\bar\gamma')^2-\bar t_0^2}=-\frac{K(\bar t_0)}{(\bar\gamma'+\bar t_0)(\bar\gamma''-\bar t_0)}<-A\frac{K(\bar t_0)}{\bar t_0(\bar\gamma''-\bar t_0)},$$

наконец, (см. (27)),

$$\sum_{\bar\gamma''<\gamma\leqq\bar t_0+\bar T}\frac{1}{\gamma^2-\bar t_0^2}<\frac{1}{(\bar\gamma'')^2-\bar t_0^2}\sum_{\bar\gamma''<\gamma\leqq\bar t_0+\bar T}1<A\frac{(\ln\bar t_0)^2\ln_2\bar t_0}{\bar\gamma''-\bar t_0}.$$

Следовательно,

$$\sum_{0<\gamma\leqq\bar t_0+\bar T}\frac{1}{\gamma^2-\bar t_0^2}=\left\{\sum_{0<\gamma\leqq\bar\gamma'}+\sum_{\bar\gamma''<\gamma\leqq\bar t_0+\bar T}\right\}\frac{1}{\gamma^2-\bar t_0^2}<$$

$$< \frac{A}{\bar{\gamma}'' - \bar{t}_0}\left\{-\frac{K(\bar{t}_0)}{\bar{t}_0} + (\ln \bar{t}_0)^2 \ln_2 \bar{t}_0\right\}. \tag{28}$$

Теперь из (26), в силу (17), (28), следует

$$\frac{1}{\bar{t}_0} < \frac{A}{\bar{\gamma}'' - \bar{t}_0}(-\ln_3 \bar{t}_0 + 1)(\ln \bar{t}_0)^2 \ln_2 \bar{t}_0 < 0,$$

что противоречиво.

4 Вторая основная формула

Пусть

$$I(\bar{t}_0) = < \bar{t}_0 - \frac{1}{2}m(\bar{t}_0), \quad t_0 + \frac{1}{2}m(\bar{t}_0) > . \tag{29}$$

В этой части мы покажем, что в предположении справедливости гипотезы Римана, имеет место

Формула 2.

$$\frac{Z(\bar{t}_0)}{Z(t)} = \exp\left\{(t - t_0)^2 \sum_\gamma \frac{1}{(t_0 - \gamma)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2}\left(\frac{t - t_0}{t_0 - \gamma}\right)^k + \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{(t - t_0)^2}{t_0}\right), \quad t \in I(t_0). \right. \tag{30}$$

Доказательство. Так как

$$\left|\frac{t - t_0}{t_0 - \gamma}\right| \leqq \frac{|t - t_0|}{m(t_0)} \leqq \frac{1}{2}, \tag{31}$$

для $t \in I(t_0)$ и всех γ, то

$$\frac{1}{t - \gamma} = \frac{1}{(t_0 - \gamma)\left(1 + \frac{t - t_0}{t_0 - \gamma}\right)} = \frac{1}{t_0 - \gamma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{t - t_0}{t_0 - \gamma}\right)^k. \tag{32}$$

Далее, по гипотезе Римана, имеет место ([14]), (7))

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = -(t - t_0) \sum_\gamma \frac{1}{(t_0 - \gamma)(t - \gamma)} + O\left(\frac{|t - t_0|}{t_0}\right),$$

для $t \in I(t_0)$, т.е. (см. (32))

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = -\sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t-t_0)^{k+1}}{(t_0-\gamma)^k} + O\left(\frac{|t-t_0|}{t_0}\right). \tag{33}$$

Наконец, интегрируя соотношение (33) в пределах t_0 и $t \in I(t_0)$, (напомним, что бесконечные ряды в соотношения (32), (33) равномерно сходятся в промежутке $I(t_0)$), получаем формулу

$$\ln \frac{Z(t_0)}{Z(t)} = \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} \cdot \frac{(t-t_0)^{k+2}}{(t_0-\gamma)^k} + O\left\{\frac{(t-t_0)^2}{t_0}\right\},$$

т.е. (30).

5 Доказательство Теоремы 2

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение. Справедлива следующая

Лемма 2.

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} < \frac{A \ln t_0}{m^2(t_0)}, \tag{34}$$

для всех достаточно больших положительных t_0.

Доказательство. Прежде всего обычным способом ([9], стр. 216) получаем оценку

$$\sum_{|\gamma-t_0|>1} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} < A \ln t_0 .$$

Так как (см. (4))

$$A \ln t_0 = \frac{\ln t_0}{m^2(t_0)} A m^2(t_0) < \frac{\ln t_0}{m^2(t_0)} A(\gamma'' - \gamma')^2 < \frac{\ln t_0}{m^2(t_0)},$$

то

$$\sum_{|\gamma-t_0|>1} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} < \frac{\ln t_0}{m^2(t_0)}. \tag{35}$$

Далее, в силу (15),

$$\sum_{|t-\gamma|\leqq 1} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} < \frac{1}{m^2(t_0)} \sum_{t_0-1\leqq\gamma\leqq t_0+1} 1 < \frac{A \ln t_0}{m^2(t_0)}. \tag{36}$$

Следовательно, в силу (35), (36) получаем оценку (34).

Теперь мы завершим

Доказательство Теоремы 2. Прежде всего

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+2}\left(\frac{t-t_0}{t_0-\gamma}\right)^k < \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{5}{6}, \tag{37}$$

для $t\in I(t_0)$. Далее мы преобразуем остаточный член в формуле (30), (см. (4))

$$\left|O\left\{\frac{(t-t_0)^2}{t_0}\right\}\right| < A\frac{(t-t_0)^2}{t_0} = A\frac{m^2(t_0)}{t_0\ln t_0}\cdot(t-t_0)^2\frac{\ln t_0}{m^2(t_0)} <$$

$$< A\frac{(\gamma''-\gamma')^2}{t_0\ln t_0}\cdot(t-t_0)^2\frac{\ln t_0}{m^2(t_0)} < (t-t_0)^2\frac{\ln t_0}{m^2(t_0)}. \tag{38}$$

Полагая в формуле (30)

$$t = t_0 \pm \frac{m(t_0)}{\psi(t_0)}, \quad \psi(t_0)\geqq 2,$$

в силу (34), (37), (38) получаем оценку

$$\frac{Z(t_0)}{Z\left(t_0\pm\frac{m(t_0)}{\psi(t_0)}\right)} < \exp\left\{A\frac{\ln t_0}{\psi^2(t_0)}\right\} = t^{\frac{A}{\psi^2(t_0)}} \tag{39}$$

Однако, по гипотезе Римана, функция $|Z(t)|$ возрастает в промежутке

$$\left\langle t_0 - \frac{m(t_0)}{\psi(t_0)}, t_0\right)$$

и убывает в промежутке

$$\left(t_0, t_0 + \frac{m(t_0)}{\psi(t_0)}\right\rangle,$$

(см., например, [13], Следствие 3), т.е.

$$|Z(t)| \geqq \left|Z\left(t_0\pm\frac{m(t_0)}{\psi(t_0)}\right)\right|, \tag{40}$$

для

$$t\in\left\langle t_0 - \frac{m(t_0)}{\psi(t_0)}, \quad t_0 + \frac{m(t_0)}{\psi(t_0)}\right\rangle. \tag{41}$$

Значит, из (39)—(41) следует (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Edwards, H. M.: Riemann's Zeta Function, Academic Press, New York and London, 1974.
2. Lehmer, D. H.: On the roots of the Riemann zeta-function, Acta Math., 95 (1956), 291—298.
3. Lehmer, D. H.: Extended computation of the Riemann zeta-function, Mathematica, 3 (1956), 102—108.
4. Littlewood, J. E.: Two notes on the Riemann zeta-function, Proc. Cambr. Phil. Soc., 22 (1924), 234—242.
5.—6. Titchmarsh, E. C.: The zeros of the Riemann zeta-function, Proc. Royal Soc. (A), 151 (1935), 234—255, 157 (1936), 261—263.
7. Titchmarsh, E. C.: Some properties of the Riemann zeta-function, Quart. J. Math., 14 (1943), 16—26.
8. Меллер, Н. А.: О вычислениях, связанных с проверкой гипотезы Римана, ДАН СССР. 1958, т. 123, № 2.
9. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва, ИИЛ, 1953.
10. Уиттекер, Э. Т.—Ватсон, Дж. Н.: Курс современного анализа, т. II, ГИФМЛ, Москва 1963.
11. Мозер, Ян: Некоторые следствия из гипотезы Римана, Acta F.R.N. Univ. Comen. Mathematica, 29 (1974), 111—118.
12. Мозер, Ян: Об одном новом следствии из гипотезы Римана, Acta Arith., 25 (1974), 307—311.
13. Мозер, Ян: Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой, Acta Arith., 26 (1974), 33—39.
14. Мозер, Ян: О точках перегиба функции $Z(t)$, Acta Arith., 28 (1975), 89—99.
15. Мозер, Ян: О некоторых оценках снизу для расстояний соседних нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, Acta Math. Univ. Comen., 44—45 (1984), 75—80.

Адрес автора:
Ján Moser
Katedra mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакию 16. 9. 1986

SÚHRN

O ROZLOŽENÍ KOREŇOV ROVNÍC $Z(t) = 0$, $Z'(t) = 0$ V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

V práci je skúmaná postupnosť $\{m(t_0)/Q(t_0)\}$, kde $m(t_0) = \min(t_0 - \gamma', \gamma'' - t_0)$, $Q(t_0) = \max(t_0 - \gamma', \gamma'' - t_0)$, $\{\gamma\}$ je rastúca postupnosť koreňov rovnice $Z(t) = 0$, $\gamma' < t_0 < \gamma''$. Výpočty hodnôt známej funkcie $Z(t)$ ukazujú (Titchmarsh, Lehmer), že členy postupnosti $\{t_0\}$ zložitým spôsobom oscilujú okolo rovnovážnych bodov $\{(\gamma' + \gamma'')/2\}$. Veličina $m(t_0)/Q(t_0)$

charakterizuje asymetriu polohy bodu t_0 v intervale (γ', γ''). V práci je dokázaná veta: z Riemannovej hypotézy vyplýva, že

$$\frac{m(t_0)}{Q(t_0)} > \frac{1}{t_0(\ln t_0)^2 \ln_2 t_0 \ln_3 t_0},$$

kde $\ln_2 t_0 = \ln \ln t_0, \ldots$.

SUMMARY

ON THE DISTRIBUTION OF THE ROOTS OF THE EQUATIONS $Z(t) = 0$, $Z'(t) = 0$ IN THE THEORY OF THE RIEMAN ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

In the paper the sequence $\{m(t_0)/Q(t_0)\}$ where $m(t_0) = \min(t_0 - \gamma', \gamma'' - t_0)$, $Q(t_0) = \max(t_0 - \gamma', \gamma'' - t_0)$ is examined. Here $\{\gamma\}$ is an increasing sequence of the roots of $Z(t) = 0$, $\{t_0\}$ is an increasing sequence of the roots of $Z'(t) = 0$, $\gamma' < t_0 < \gamma''$. The calculations of the values of the known function $Z(t)$ (Titchmarsh, Lehmer) show, that the members of $\{t_0\}$ ocilate in a complicated manner around the equilibrial points $\{(\gamma' + \gamma'')/2\}$. The quantity $m(t_0)/Q(t_0)$ characterizes the asymetry of the position of the point t_0 in the interval (γ', γ''). The following theorem is proved: the Riemann hypothesis implies

$$\frac{m(t_0)}{Q(t_0)} > \frac{1}{t_0(\ln t_0)^2 \ln_2 t_0 \ln_3 t_0},$$

where $\ln_2 t_0 = \ln \ln t_0, \ldots$.