UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LII—LIII—1987

UN NOVEAU THÉORÈME SUR LA VARIÉTÉ DE VERONESE

LANDO DEGOLI, Italy

Dans l'espace complexe linéaire S_r, rapporté aux coordonnées projectives homogènes x_i, $i = 0, 1, \ldots, r$ un système linéaire L_d, $d \geqslant r$, de quadriques linéairement indépendantes est exprimé par l'équation:

$$\sum_{q=0}^{d} \mu_q f_q = 0$$

avec μ_q nombres complexes et $f_q = \sum_{i,k=0}^{r} a_q^{ik} x_i x_k$.

Prénons en considération la matrice Jacobienne à $d + 1$ lignes et $r + 1$ colonnes

$$J = \left\| \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \right\|, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots, d, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, r.$$

En général la matrice Jacobienne égalisée à zéro représente le lieu géometrique des points de S_r conjugués entre aux-mêmes par rapport à toutes les quadriques du système. Si la matrice Jacobienne est identiquement nulle, cela signifie que tout l'espace est le lieu de points conjugués.

Si la caractéristique de la Jacobienne est r, un point générique de S_r est conjugué avec un seul point. Si la caractéristique est $r - h$, $h \geqslant 0$, un point de S_r est conjugué avec un espace S_h.

Un système L_d est dit irréductible s'il ne contient aucun système subordonné essentiel, c'est-à-dire un système $L_{g/c}$ de dimension g et caractéristique c satisfaisant aux inégalités $2 \leqslant g \leqslant d - 1$, $2 \leqslant c \leqslant m - 1$, $c \leqslant g$.

Nous avons démontré (v. [8]) le lemme suivant.

Lemme. Une condition nécessaire et suffisante pour que le système irréductible linéaire de quadriques L_d, $d \geqslant r$, ait la Jacobienne de caractéristique $r - k$, $k \geqslant 0$, est que les quadriques du système qui passent par un point quelconque de S_r possèdent en commun un S_{k+1}.

Le théorème a été démontré (v. [9]) aussi dans l'hypothèse $d < r$.

À présent nous allons démontrer un remarquable propriété de la variété de Veronese.

Théorème. La variété de Veronese est l'unique surface de S_5 qui soit base d'un système linéaire de quadriques à Jacobienne déterminés.

Démonstration. Désignons par V_2^n une surface irréductible de S_5 d'ordre n, si elle existe, qui soit base d'un système L_d, $d \geqslant 5$, de quadriques de S_5.

Toutes les quadriques de L_d sont irréductibles, autrement dit si une entre elles était réductible, la V_2^n étant irréductible serait située dans un hyperplan de S_5, c'est-à-dire dans un S_4, contre l'hypothèse qu'elle appartient à S_5.

Nous savons (v. [1]) qu'une V_k^n (variété de dimension k et d'ordre n) appartenant à S_r doit satisfaire à la relation $r \leqslant k + n - 1$.

Considérons un S_3 générique de S_5. Il n'appartient pas à aucune quadrique G de L_d, autrement dit, la quadrique G, puisqu'elle contient V_2^n et S_3, devrait avoir $n \geqslant 4$ points, l'intersection de S_3 et de V_2^n, comme points doubles. Mais telle quadrique serait réductible, ce qui n'est pas possible par la démonstration précédente.

Selon une propriété connue des systèmes linéaires (v. [4]), S_3 coupe L_d en un système linéaire de quadriques de S_3, qui ont la même dimension $d \geqslant 5$, et V_2^n en n points.

Il ne peut pas être $n \geqslant 5$, parce que les quadriques de S_3, qui ont pour base 5 ou plus points, individualisent un système linéaire de dimension $d < 5$, tandis qu'il est $d \geqslant 5$. Donc nécessairement il est $n = 4$.

Mais les surfaces irréductibles d'ordre 4 de S_5 ne sont que la surface réglée rationnelle normale et la surface de Veronese (v. [1]).

Il existe trois V_2^4 rationelles normales projectivement identiques.

1°. La V_2^4 qui a pour directrice deux coniques; ses équations canoniques sont

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_4}{x_5}$$

Elle est la base du système de quadriques

$$\mu_0(x_0x_2 - x_1^2) + \mu_1(x_0x_4 - x_1x_3) + \mu_2(x_0x_5 - x_1x_4) +$$
$$+ \mu_3(x_1x_4 - x_2x_3) + \mu_4(x_1x_5 - x_2x_4) + \mu_5(x_3x_5 - x_4^2) = 0.$$

2°. La V_2^4, qui a pour directrice une cubique de S_3 et une droite; ses équations canoniques sont

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5}$$

Elle est base du système

$$\mu_0(x_0x_2 - x_1^2) + \mu_1(x_0x_3 - x_1x_2) + \mu_2(x_0x_5 - x_1x_4) +$$
$$+ \mu_3(x_1x_3 - x_2^2) + \mu_4(x_1x_5 - x_2x_4) + \mu_5(x_2x_5 - x_3x_4) = 0.$$

3°. Le cône rationnel normal du quatrième ordre aux équations canoniques

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4}$$

qui est la base du système linéaire.

$$\mu_0(x_0x_2 - x_1^2) + \mu_1(x_0x_3 - x_1x_2) + \mu_2(x_0x_4 - x_1x_3) +$$
$$+ \mu_3(x_1x_3 - x_2^2) + \mu_4(x_1x_4 - x_2x_3) + \mu_5(x_2x_4 - x_3^2) = 0$$

La surface de Veronese est la base du système linéaire (v. [1])

$$\mu_0(x_0x_5 - x_1^2) + \mu_1(x_3x_5 - x_4^2) + \mu_2(x_0x_3 - x_2^2) +$$
$$+ \mu_3(x_1x_2 - x_0x_4) + \mu_4(x_1x_4 - x_1x_3) + \mu_5(x_2x_4 - x_1x_3) = 0.$$

On pourrait vérifier analytiquement que les systemèe linéaires de quadriques qui ont pour base les trois surfaces réglées rationnelles normales sont à Jacobienne identiquement nulle de caractéristique 5, tandis que le système linéaire qui a pour base la surface de Veronese est à Jacobienne de caractéristique 6, c'est-à-dire déterminée ou régulière. Mais nous allons démontrer ce fait en manière syntétique affirmant ce qui suit.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système irréductible L_d de S_r soit à Jacobienne de caractéristique $r - k \leqslant d$ est que par un point P de S_r ils passent ∞^k cordes de la variété base du système, constituant un S_{k+1}.

Soit V' la variété base du système L_d de caractéristique $r - k \leqslant d$.

D'après le Lemme les quadriques, qui passent par un point P de S_r, ont en commun un S_{k+1}, et forment un système L_{d-1}.

Une quadriques de L_d, qui n'appartient pas à L_{d-1} coupe S_{k+1} selon une quadrique G_k de S_{k+1} qui appartient à toutes les quadriques de L_d et, par conséquent, à la variété V.

Mais une droite générique qui masse par P et qui gît dans S_{k+1} entrecoupe G_k en deux point qui appartiennent à V. Donc cette droite est une corde de V.

Il en résulte que ∞^k cordes passent par P. Vice versa, si ∞^k cordes de V, constituant un S_{k+1}, passent par un point générique P de S_r, chacune d'elles aura deux point R, T sur V et, par conséquent, sur toutes les quadriques du système.

Si Q est la conjugué de P par rapport à R et T, il résultera le conjugué de P par rapport à toutes les quadriques de L_d.

Puisqu'on peut répéter la démonstration pour chacune des ∞^k cordes, P résultera le conjugué de ∞^k points, qui constituent une variété à k dimensions.

Celle-ci ne peut pas être qu'un S_k. En effet, cette variété doit résulter d'intersection des hyperplans polaires de P par rapport à chacune quadrique de L_d.

Donc un point P a pour conjugué un S_k et la Jacobienne aura la caractéristique $r - k$.

On sait (v. [2]) que les cordes de la surface réglée rationnelle normale de S_5 remplissent tout l'espace. Par un point générique de S_5 il passe une seule de ces cordes.

Il s'ensuit, vu le Théorème, que le système linéaire, qui a pour base la réglée rationnelle normale, possède la Jacobienne de caractéristique 5 c'est-à-dire indéterminée ou irrégulière.

Au contraire, les cordes de la surfaces de Veronese ne remplissent pas tout l'espace (v. [1], et [2]) et, par conséquent, la Jacobienne de son système linéaire n'est pas identiquement nulle. Elle est donc déterminée.

Donc la surface de Veronese est l'unique surface de S_5 qui jouit de cette propriété, ce qu'il fallait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bertini, E.: Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi. Messina (1923).
2. Palatini, G.: Sule superficie algebriche i cui $S_h(h + 1)$ secanti non riempiono lo spazio ambiente. R. Acc. di Torino, 41 (1906). 634—640.
3. Bonferroni, G.: Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare. R. Acc. Scienze di Torino vol. 50, (1914—15) 425—438.
4. Terracini, A.: Aclune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà. R. Acc. Science di Torino. 51 (1916), 55 (1919—20). 695—714 e 480—500.
5. Muracchini, L.: Sulle varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria. (parte II), Riv. Mat. Università di Parma, 3, (1952), 75—89.
6. Degoli, L.: Sui sistemi lineari di quadriche a jacobiana identicamente nulla di caratteristica $\leqslant r$. Acc. Scienze di Bologna Rend. 10 (1963). 224—234.
7. Degoli, L.: Sulle varietà V_6 i cui spazi angenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria. Atti Sem. Mat. e Fis. Università di Modena. 16 (1967).
8. Degoli, L.: Un théorème sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indéterminée. Institut Mathématique — Beograd 33 (47), 1983, 63—67.
9. Degoli, L.: Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla. Collectanea Methematica 33 (1982) 125—138.
10. Degoli, L.: Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle. Demonstrtio Mathematica. 16 (1983) 725—734.
11. Degoli, L.: Alcuni teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla. Mathematica. 26 (4), 1, (1984) 33—43 Cluj—Napoca.
12. Degoli, L.: Un teorema sui sistemi lineari di quadriche riducibili ed irriducibili. Analele Stiintifice ale Universitatii „Al. I. Cuza" 31—3—(1985) 221—228. Iasi.
13. Degoli, L.: Un théorème sur les variétes bases des systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indéterminée. Communications. A. L. 34 (1985) Ankara.

Adresse:
Prof. Lando Degoli
Via Berengario № 82/C
41012 CARPI (Modena) Italy

Received: 26. 6. 1986

SÚHRN

NOVÁ VETA O VERONESEHO VARIETE

Lando Degoli, Taliansko

Nech $L_d (d \geqq 5)$ je lineárny systém nadkvadrík v komplexnom projektívnom priestore a nech hodnosť jacobiánu systému sa rovná 5. V práci sa dokazuje, že jedinou možnou bázou systému je Veroneseho varieta priestoru S_5.

РЕЗЮМЕ

НОВАЯ ТЕОРЕМА О МНОГООБРАЗИИ ВЕРОНЕЗЕ

Ландо Деголи, Итали

Пусть $L_d (d \geq 5)$ линейная система гиперповерхностей второго порядка в комплексном проективном пространстве и пусть ранг матрицы Якоби линейной системы равен 5. В статье показано, что единственным возможным базисным многообраем линейной системы является многообразие Веронезе пространства S_5.