UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
LII—LIII—1987

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

ВЛАДИМИР ЧЕСАЛИН, Братислава

1. Даная работа посвящена изучению корректности задачи Коши для некоторых классов дифференциально-операторных уравнений высших порядков в гильбертовых пространствах. Как известно, задача Коши для двучленного уравнения вида $u_t^{(m)} + Au = f(t)$ с неограниченным оператором A некорректна при $m > 2$. В связи с этим последнее уравнение обычно рассматривается с условиями отличными от условий Коши. Так, например, в работах [4—7] изучались двуточечные граничные задачи для таких и более общих уравнений. Однако, при рассмотрении полного уравнения, т.е. содержащего младшие производные, ситуация может быть существенно изменена. Если корни характеристического полинома, соответствующего такому дифференциальному оператору, располагаются по одну сторону мнимой числовой оси, то задача Коши оказывается корректной (см., например, работу [3]).

Теперь переходим к точным формулировкам и доказательствам.

2. На ограниченном интервале $(0, T)$ переменной t рассмотрим задачу Коши

$$Lu \equiv \sum_{k=-n}^{m} A_k D^k u = f(t) \tag{1}$$

$$D^l u|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant l < m \tag{2}$$

Здесь $u(t)$ и $f(t)$ — функции переменной t со значениями в гильбертовом пространстве H, скалярное произведение и норму в котором обозначим $(\cdot,\cdot)_0$ и $|\cdot|_0$ соответственно; $D^k u = \dfrac{d^k u}{dt^k}$ при $k \geqslant 0$ и $D^k u = \displaystyle\int_0^t \frac{(t-\tau)^{-k-1}}{(-k-1)!} u(\tau) d\tau$ при $k < 0$; A_k — линейные операторы в H, удовлетворяющие следующим условиям

Условие 1. Пересечение областей определения $\mathscr{D}(A_k)$ операторов A_k плотно в H и операторы A_k являются симметрическими $(-n \leq k \leq m)$.

Условие 2. Оператор A_m (либо $-A_m$) — является положительно определенным ($|(A_m v,\ v)_0| \geqslant \varrho |v|_0^2$), каждый оператор $A_k(-n \leq k < m)$ является либо строго положительным, либо строго отрицательным, т. е. удовлетворяет неравенству $(A_k v, v)_0 > 0$ либо $(A_k v, v)_0 < 0$ $\forall v \in \bigcap_{k=-n}^{m} \mathscr{D}(A_k)$, $v \neq 0$ и выполняются неравенства

$$(A_k^+ v, v)_0 \leqslant a_k (A_m^+ v, v)_0, \quad \forall v \in \bigcap_{k=-n}^{m} \mathscr{D}(A_k), \tag{3}$$

где $a_k > 0$ не зависят от v и $A_k^+ = A_k$ при положительном A_k и $A_k^+ = -A_k$ при отрицательном A_k (если A_k — самосопряженный оператор, то $A_k^+ = |A_k|$, где $|\cdot|$ — абсолютная величина оператора [2]).

3. В этом пункте для оператора L установим двустороннюю априорную оценку и вытекающие из нее следствия. Отнесем к области определения $\mathscr{D}(L)$ оператора L функции $u \in L_{2,\varphi}((0,\ T),\ H)$, имеющие производные $D^k u$ до порядка m и $D^m u \in L_{2,\varphi}((0,\ T),\ H)$, $u \in \bigcap_{k=-n}^{m} \mathscr{D}(A_k)$, $A_k D^k u \in L_{2,\varphi}((0,\ T),\ H)(-n \leq k \leq m)$ и удовлетворяющие условиям (2), $\varphi(t) = (T - t)^{m+n}$ — весовая функция. Методом математической индукции для любой функции $u \in \mathscr{D}(L)$ устанавливается справедливость неравенств

$$\int_0^\tau (\tau\text{-}t)^l (A_k^+ D^i u,\ D^i u)_0 \, dt \leqslant \frac{2^{2j-2i}}{\{(l+j-i)!\}^2} \int_0^\tau (\tau - t)^{l+2j-2i} (A_k^+ D^j u,\ D^j u)_0 \, dt, \tag{4}$$

$-n \leq i \leq j \leq m$, $-n \leq k \leq m$, $l \geqslant 0$. Оператор L будем рассматривать действующим из гильбертова пространства E в гильбертово пространство F, которые получены пополнением множества $\mathscr{D}(L)$ по норме

$$\|u\|_E = \left\{ \int_0^T \sum_{i=0}^{m+n} (T - t)^{m+n-i} (A_{m-i}^+ D^{m-i} u,\ D^{m-i} u)_0 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

и соответственно $L_{2,\varphi}((0,\ T),\ H)$ по норме

$$\|f\|_F = \sup_{\substack{v \in E \\ v \neq 0}} \frac{\left| \int_0^T \varphi(t) (f D^m v)_0 \, dt \right|}{\|v\|_E} \leq \frac{\left\{ \int_0^T \varphi |f|_0^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}}}{\varrho}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1 и 2. Тогда для любой функции $u \in \mathscr{D}(L)$ выполняются неравенства

$$c_1\|u\|_E \le \|Lu\|_F \le c_2\|u\|_E, \tag{5}$$

где постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ — не зависят от u.

Доказательство теоремы 1. Сначала оценим $\|Lu\|_F$ снизу. Для этого интегрированием по частям получим следующее равенство

$$\begin{gathered}2Re\int_0^\tau (\tau-t)^{m+n}(Lu, D^m u)_0\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau \Bigg\{\sum_{i=0}^{\left[\frac{m+n}{2}\right]}\sum_{j=0}^{i} a(m+\\ + n, 2i-2j)\,\beta_j(2i)\,(\tau-t)^{m+n-2i-2j}(A_{m-2i}D^{m-2i+j}u, D^{m-2i+j}u)_0 +\\ + \sum_{i=0}^{\left[\frac{m+n-1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{i} a(m+n, 2i+1-2j)\,\alpha_j(2i+1)\,(\tau-\\ - t)^{m+n-2i-1+2j}(A_{m-2i-1}D^{m-2i-1+j}u, D^{m-2i-1+j}u)_0\Bigg\}\mathrm{d}t\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $a(k,l) = k(k-1)\ldots(k-l+1)$, $1 \le l \le k$, $a(k,0) = 1$; $[\cdot]$ — целая часть числа; $\alpha_j(2i+1) = \gamma_j(2i+1)$ и $\beta_j(2i) = \gamma_j(2i)$, где

$$\begin{gathered}\gamma_j(s) = -c_s^j + \sum_{l=2}^{j}(-1)^l \sum_{l-1\le k_1+\ldots+k_{l-1}\le j-1} c_s^{k_1}\cdot c_{s-2k_1}^{k_2}\ldots c_{s-2k_1-\ldots-2k_{l-2}}^{k_{l-1}} \times\\ \times c_{s-2k_1-\ldots-2k_{l-1}}^{j-k_1-\ldots-k_{l-1}}, \qquad 1 \le j \le \left[\frac{s}{2}\right].\end{gathered}$$

При $j = 1$ вторая сумма по l отсутствует, а при $j = 0$ полагаем $\gamma_0(s) = 0$. Далее, используя неравенства (3), (4), элементарные преобразования и оценки, получаем неравенство

$$g(\tau) \le c_3\left\{\left|\int_0^T \varphi(t)\,(Lu, D^m u)_0\,\mathrm{d}t\right| + \int_0^\tau g(t)\,\mathrm{d}t\right\}, \tag{7}$$

где

$$g(\tau) = \int_0^\tau \sum_{i=0}^{m+n}(\tau-t)^{m+n-i}(A_{m-i}^{+}D^{m-i}u, D^{m-i}u)_0\,\mathrm{d}t$$

и постоянная $c_3 > 0$ не зависит от u. Применяя к неравенству (7) лемму Гронуолла и полагая $\tau = T$, получаем неравенство

$$\|u\|_E^2 \le c_3\exp(c_3T)\left|\int_0^T \varphi(t)\,(Lu, D^m u)_0\,\mathrm{d}t\right|. \tag{8}$$

Разделив обе части неравенства (8) на $\|u\|_E \ne 0$ и перегодя к sup по $0 \ne \ne v \in E$, получаем требуемое неравенство. Правая часть неравенства (5) устанавливается оценками сверху следующей полуторалинейной формы

$$2Re\int_0^T \varphi(t)\,(Lu, D^m v)_0\,\mathrm{d}t,\ u\in\mathscr{D}(L),\ v\in E.$$

Для этого используем неравенство Коши—Шварца, неравенства (3) и элементарные оценки.

Из доказанного двойного неравенства (5) вытекает, в частности, что опертор L является ограниченным из E в F. Обозначим через $\bar{L}$ его расширение или замыкание на все E. Очевидно, что неравенства (5) продолжаются на все пространство E, из которых непосредственно вытекают

Следствие 1. На множестве значений $R(\bar{L})$ оператора $\bar{L}$ существует ограниченный обратный оператор $(\bar{L})^{-1}$.

Следствие 2. Множество значений $R(\bar{L})$ замкнуто в F и $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$.

4. Для доказательства существования сильного (обобщенного) решения задачи (1), (2), т.е. решения уравнения $\bar{L}u = f\in F$, осталось установить плотность множества $R(L)$ в F. Пространство F рефлексивно, как сопряженное к гильбертову пространству с нормой $\|D^{-m}w\|_E$, где D^{-m} — оператор, дающий решение задачи Коши для уравнения $D^m v = w(F$ — пространство с негативной нормой относительно скалярного произведения в $L_{2,\varphi}((0, T), H)$ см. [1]). Согласно одному из следствий теоремы Хана—Банаха для плотности множества $R(L)$ в F достаточно показать, что из равенства

$$\int_0^T (T-t)^{m+n}(Lu, D^m v)_0\,\mathrm{d}t = 0, \tag{9}$$

где u пробегает $\mathscr{D}(L)$ и $v\in E$, следует, что $D^m v = 0$. Равенство (9) в силу ограниченности оператора $L: E\to F$ может быть продолжено на $u\in E$. Полагая в продолженном равенстве $u = v$ с помощью неравенства (8) получаем оценку $\|v\|_E \leq 0$ откуда и следует $D^m v = 0$.

Замечание 1. Данные результаты могут быть распространены на случай, когда операторные коэффициенты A_k зависят от переменной t и имеют производные по t, слабо подчиненные операторам A_k^+. При выводе априорной оценки в правой части равенства (6) появятся интегральные слагаемые, содержащие под знаком интеграла некоторые производные от операторов A_k, т.е. скалярные произведения вида $(\{D^j A_k\}\, D^i u, D^i u)_0$, которые оцениваются сверху с помощью неравенств

$$|(\{D^j A_k\}\, D^i u, D^i u)_0| \leq b_{j,k}(A_k^+ D^i u, D^i u)_0,$$

где $b_{j,k} > 0$ не зависят от u. Дальнейшее доказательство теоремы 1 и доказательство существования сильного решения аналогично предыдущему. Более того, неравенства (3) в условии 2 могут быть частично либо полностью опущены. Это зависит от знаков операторов A_k и некоторых, записываемых в явном виде алгебраических соотношений между коэффициентами $\gamma_j(s)$. Существенная техническая трудность здесь состоит в проверке последних соотношений, т. к. автору пока не удалось вывести либо найти в имеющейся литературе формулу, более удобную для вычисления коэффициентов $\gamma_j(s)$. В свою очередь такое обобщение приводит к тому, что оператор $L : E \to F$ вообще говоря становится неограниченным, что значительно усложняет доказательство плотности $R(L)$ в пространстве F. При этом нужно использовать специальные операторы осреднения (см., например, работы [4], [5], [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский, Ю, М.: Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965.
2. Като, Т.: Теория возмущений линейных операторов, Москва, 1972.
3. Радыно, Я. В.—Юрчук, Н. Н.: Задача Коши для некоторых абстрактных гиперболических уравнений четного порядка, Дифференц. уравнения., 12, №2 1976, 331—342.
4. Чесалин, В. И.: Задача с нелокальными граничными условиями для дифференциально-операторных уравнений нечетного порядка, Дифференц. уравнения., 13, №3 1977, 468—476.
5. Юрчук, Н. И.: Граничные задачи для дифференциальных уравнений с зависящими от параметра операторными коэффициентами. 1. Априорные оценки, Дифференц. уравнения., 12, №9 1976, 1645—1661.
6. Юрчук, Н. И.: Граничные задачи для дифференциальных уравнений с зависящими от параметра операторными коэффициентами. 11. Разрешимость и свойства решений, Дифференц. уравнения., 14, №5 1978, 859—870.
7. Юрчук, Н. И.: Метод энергетических неравенств в исследовании некоторых вырождающихся линейных дифференциально-операторных уравнений, Дифференц. уравнения., 14, №12 1978, 2196—2211.

Адрес автора:
Vladimír Česalin
MMF BGU V. I. Lenina
Minsk
ZSSR

Поступила в редакцию 11. 7. 1986

SUMMARY

ON CAUCHY'S PROBLEM FOR SOME HIGHER ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Vladimir Tchesalin, Bratislava

In this paper the existence and uniqueness of the strong solution of the Cauchy problem for some higher-order operator-differential equations is established.

SÚHRN

O CAUCHYHO ÚLOHE PRE NIEKTORÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE VYŠŠÍCH RÁDOV, KTORÝCH KOEFICIENTY SÚ OPERÁTORY

Vladimír Česalin, Bratislava

V práci sa dokazuje existencia a jednoznačnosť silného riešenia Cauchyho úlohy pre niektoré diferenciálne rovnice vyšších rádov, ktorých koeficienty sú operátory.