UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
L—LI—1987

О МЕРАХ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. Постановка вопроса

Продолжая исследования [3], [6], [12], связанные с нулями дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s=\sigma+\mathrm{i}t$, лежащими на критической прямой $\sigma=1/2$, проф. А. А. Карацуба доказал (см. [10], [11]), что

$$N_0(T+\bar{U})-N_0(T)\geqq A(\varepsilon)\bar{U}\ln T,\quad \bar{U}=T^{27/82+\varepsilon}, \tag{1}$$

где $N_0(T)$ — число нулей нечетного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$ на интервале $0<t\leqq T$, $0<A(\varepsilon)$, $0<\varepsilon$ — сколь угодно малое число.

Пусть теперь

$$\begin{aligned} M^+&=M^+(T,U)=\{t\colon t\in\langle T,T+U\rangle,\quad Z(t)>0\},\\ M^-&=M^-(T,U)=\{t\colon t\in\langle T,T+U\rangle,\quad Z(t)<0\},\\ M^0&=M^0(T,U)=\{t\colon t\in\langle T,T+U\rangle,\quad Z(t)=0\},\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\mathrm{T}^{1/4+\varepsilon}\leqq \mathrm{U}\leqq \mathrm{T}^{27/82+\varepsilon}, \tag{3}$$

и, (см. [9], стр. 94, 383),

$$\begin{gathered} Z(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right),\\ \vartheta(t)=-\frac{1}{2}t\ln\pi+\operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi+O\left(\frac{1}{t}\right).\end{gathered} \tag{4}$$

Хотя из оценки Карацубы (1) можно получить оценки снизу для чисел компонент K^+, K^- несвязных множеств $M^+(T,\bar{U})$, $M^-(T,\bar{U})$:

$$K^+,\ K^-\geqq\frac{1}{3}A(\varepsilon)\,\bar{U}\ln T, \tag{5}$$

все же вопрос об оценках снизу для мер множеств $M^+(T, \bar{U})$, $M^-(T, \bar{U})$:

$$m\{M^+(T, \bar{U})\}, \quad m\{M^-(T, \bar{U})\}, \tag{6}$$

остается открытым, (конечно, $m\{M^0(T, U)\} = 0$, так как $M^0(T, U)$— конечное множество). Дело в том, что в теории функции $\zeta(s)$ отсутствует (независимо от какой бы то ни было гипотезы) оценка снизу для расстояний соседних нулей нечетного порядка функции $Z(t)$. Следовательно, для оценок снизу названных мер надо искать метод, не зависящий от оценок (5).

Далее заметим, что вычисления значений функции $Z(t)$ показывают, что поведение расстояний соседних нулей нечетного порядка функции $Z(t)$ очень «хаотично» в промежутке покрываемом вычислениями. По этому поводу см. например график функции $Z(t)$ в окрестности первой пары нулей Д. Лемера — удивительной специальной пары нулей функции $Z(t)$, лежащих в окрестности значения $t = 2\pi.\ 1114, 89$ (см. [5], стр. 296, 297).

Еще более «хаотичное» поведение расстояаний соседних нулей нечетного порядка следует ожидать в случае $t \to \infty$, (см. также мнение А. Сельберга о «нерегулярности» поведения графика функции $Z(t)$ в работе [7], стр. 196, строки 8—11 сверху и стр. 200, строки 7—13 сверху).

Так как соседние нули нечетного порядка функции $Z(t)$ отделяют компоненты несвязнх множеств M^+, M^-, то «хатичное» поведение расстояний этих нулей имеет своим следствием «хаотичное» поведение мер множеств M^+, M^- т.е. функций (6) при $T \to \infty$.

Все сказанное до сих пор приводит нас к вопросу об отыскании закономерностей, управляющих «хаотичностью» поведения функций (6) при $T \to \infty$.

В настоящей работе мы получим, пользуясь дискретным методом, одну из таких закономерностей:

$$m\{M^+(T, \bar{U})\}, \quad m\{M^-(T, \bar{U})\} > A\frac{\bar{U}}{\ln T}, \quad T \to \infty, \quad A > 0. \tag{7}$$

Так как, конечно,

$$m\{M^+(T, \bar{U})\}, \quad m\{M^-(T, \bar{U})\} < \bar{U},$$

то мы делаем

Замечание 1. Оценка снизу (7), отсутствующая до сих пор в теории функции $\zeta(s)$, очень близко подходит к оценке сверху.

Конечно, результат (7) является лишь частным случаем более общей закономерности, доказанной в настоящей работе. Действительно. С помощью бесконечного семейства последовательностьй $\{k_\nu(\tau)\}$ мы вводим два семейства несвязных множеств $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$ относительно промежутка $\langle T, T+U \rangle$ и получаем оценки снизу типа (7) для мер следующих подмножеств:

$$G_3^+(x_1, x_2), \quad G_3^-(x_1, x_2), \quad G_4^-(y_1, y_2), \quad G_4^+(y_1, y_2).$$

Доказательство основано только на анализе корреляционных свойств функций $Z(t)$, $\eta^2(t)$, где $\eta(t)$ — подходящая вспомогательная функция, т.е. доказательство не зависит от оценок снизу (5). Основным моментом в доказательстве является расщепление некоторой пары корреляционных формул на четвёрку асимптотических формул, с помощью которых, в свою очередь, получаются оценки снизу для мер множеств G_3^+, G_3^-, G_4^-, G_4^+.

Еще заметим, что предлагаемая работа продолжает анализ следствий из формулы Римана-Зигеля

$$Z(t) = 2\sum_{n\leqq t_1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta - t\ln n) + O(t^{-1/4}), \quad t_1 = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \tag{8}$$

с помощью дискретного метода, основы которого изложены в знаменитом мемуаре Е. К. Титчмарша [8].

2. Формулировка результатов

Пусть

$$\vartheta_1(t) = \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi. \tag{9}$$

Очевидно

$$\vartheta_1'(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi}, \quad \vartheta_1''(t) = \frac{1}{2t}. \tag{10}$$

Теперь мы определим (см. [15], ср. [13], [14]) бесконечное семейство последовательностей $\{k_\nu(\tau)\}$ следующим образом:

$$\vartheta_1[k_\nu(\tau)] = \frac{1}{3}\pi\nu + \frac{1}{3}\tau, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle. \tag{11}$$

Далее, с помощью бесконечного семейства последовательностей $\{k_\nu(\tau)\}$ мы определим два семейства несвязных множеств следующим образом (ср. [15]):

$$G_3(x_1, x_2) = G_3(x_1, x_2, T, U) =$$

$$= \bigcup_{T \leqq k_{2\nu} \leqq T+U} \{t\colon k_{2\nu}(x_1) < t < k_{2\nu}(x_2)\}, \quad x_1 < x_2,$$

$$x_1,\ x_2 \in \langle -\pi/2,\ \pi/2\rangle,$$

$$G_4(y_1, y_2) = G_4(y_1, y_2, T, U) = \tag{12}$$

$$= \bigcup_{T \leqq k_{2\nu+1} \leqq T+U} \{t\colon k_{2\nu+1}(y_1) < t < k_{2\nu+1}(y_2)\}, \quad y_1 < y_2$$

$$y_1,\ y_2 \in \langle -\pi/2,\ \pi/2\rangle.$$

Пусть, далее,

$$\begin{aligned} G_3^+(x_1, x_2) &= \{t\colon t \in G_3(x_1, x_2), \quad Z(t) > 0\}, \\ G_3^-(x_1, x_2) &= \{t\colon t \in g_3(x_1, x_2), \quad Z(t) < 0\}, \\ G_3^0(x_1, x_2 &= \{t\colon t \in g_3(x_1, x_2), \quad Z(t) = 0\}, \end{aligned} \tag{13}$$

аналогичный смысл имеют обозначения $G_4^+(y_1, y_2)$, $G_4^-(y_1, y_2)$, $G_4^0(y_1, y_2)$, (конечно, G_3^0 и G_4^0 — конечные множества и, следовательно, $m(G_3^0) = m(G_4^0) = 0$).

Справедлива следующая

Теорема

$$\begin{aligned} m\{G_3^+(x_1, x_2)\}, \quad m\{G_3^-(x_1, x_2)\} > A(x_1, x_2)\frac{\bar U}{\ln T}, \\ m\{G_4^+(y_1, y_2)\}, \quad m\{G_4^-(y_1, y_2)\} > B(y_1, y_2)\frac{\bar U}{\ln T}, \end{aligned} \tag{14}$$

при $T \to \infty$, где $\bar U = T^{27/82+\varepsilon}$, ($0 < A(x_1, x_2)$, $B(y_1, y_2)$ — постоянные, зависящие от выбора x_1, x_2, y_1, y_2 соответственно, $0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число).

Далее мы напомним некоторые простые свойства семейства последовательностей $\{k_\nu(\tau)\}$ и получим выражения для мер множеств $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$.

Так как (см. (11))

$$\vartheta_1[k_{\nu+1}(\tau)] - \vartheta_1[k_\nu(\tau)] = \frac{1}{3}\pi,$$

то, (см. (10)),

$$k_{\nu+1}(\tau) - k_\nu(\tau) = \frac{\pi}{3}\frac{1}{\vartheta_1'(\overset{*}{T})} = \frac{2\pi}{3}\frac{1}{\ln\frac{\overset{*}{T}}{2\pi}} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{U}{T \ln^2 T}\right), \quad \tau \in (k_\nu(\tau), k_{\nu+1}(\tau)), \tag{15}$$

(относительно U см. (3)), где

$$k_\nu(\tau), \quad k_{\nu+1}(\tau) \in \langle T, T + U \rangle. \tag{16}$$

Замечание 2. В силу (16), O — оценка входящая в (15) имеет место равномерно для $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Из (15) следует соотношение

$$\sum_{T \leq k_\nu(\tau) \leq T+U} 1 = \frac{3}{2\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U^2}{T}\right) + O(1).$$

Следовательно, полагая $k_\nu(0) = k_\nu$, (см. также (3)), получаем асимптотическое соотношение

$$\sum_{T \leq k_\nu \leq T+U} 1 = \frac{3}{2\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O(1). \tag{17}$$

Далее, так как (см. (11))

$$\vartheta_1[k_{2\nu}(x_2)] - \vartheta_1[k_{2\nu}(x_1)] = \frac{x_2 - x_1}{3},$$

то, (ср. (15)),

$$k_{2\nu}(x_2) - k_{2\nu}(x_1) = \frac{2(x_2 - x_1)}{3} \frac{1}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left\{\frac{(x_2 - x_1)U}{T \ln^2 T}\right\}, \tag{18}$$

и, аналогичным образом,

$$k_{2\nu+1}(y_2) - k_{2\nu+1}(y_1) = \frac{2(y_2 - y_1)}{3} \frac{1}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left\{\frac{(y_2 - y_1)U}{T \ln^2 T}\right\}, \tag{19}$$

для $k_{2\nu}(x_1)$, $k_{2\nu+1}(y_2) \in \langle T, T + U \rangle$.

Теперь из (12), в силу (17)—(19), получаем следующие асимптотические формулы для мер множеств

$$\begin{aligned} m\{G_3(x_1, x_2)\} &= \frac{x_2 - x_1}{2\pi} U + O(1), \\ m\{G_4(y_1, y_2)\} &= \frac{y_2 - y_1}{2\pi} U + O(1), \end{aligned} \tag{20}$$

для U удовлетворяющего условию (3).

Так как (см. (13), (20))

$$m(G_3^+),\quad m(G_3^-) < \frac{x_2 - x_1}{\pi}\bar{U},$$
$$m(G_4^+),\quad m(G_4^-) < \frac{y_2 - y_1}{\pi}\bar{U}, \tag{21}$$

то делаем

Замечание 3. Основные оценки снизу (14):

(A) очень близко подходят к оценкам сверху (21),

(B) выражают закономерность, управляющую «хаотичностью» поведения мер подмножеств G_3^+, G_3^-, G_4^+, G_4^-.

Положим:

$$G_3^+(x_1, x_2) \cup G_4^+(y_1, y_2) = M_1^+(x_1, x_2, y_1, y_2),$$
$$G_3^-(x_1, x_2) \cup G_4^-(y_1, y_2) = M_1^-(x_1, x_2, y_1, y_2). \tag{22}$$

Из Теоремы получаем

Следствие 1.

$$m\{M_1^+(x_1, x_2, y_1, y_2)\},$$
$$m\{M_1^-(x_1, x_2, y_1, y_2)\} > C(x_1, x_2, y_1, y_2)\frac{\bar{U}}{\ln T}, \tag{23}$$

при $T \to \infty$, $(0 < C(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — постоянная, зависящая от выбора x_1, x_2, y_1, $y_2)$.

Далее положим (см. (22))

$$M_1^+ = M_1^+\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\quad M_1^- = M_1^-\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Так как (см. (2), (12), (18), (19))

$$m\{M^+(T, \bar{U})\} = m(M_1^+) + O\left(\frac{1}{\ln T}\right),$$
$$m\{M^-(T, \bar{U})\} = m(M_1^-) + O\left(\frac{1}{\ln T}\right),$$

то из (23) получаем результат, который мы упоминали в связи с постановкой вопроса (см. (7)):

Следствие 2.

$$m\{M^+(T, \bar{U})\},\quad m\{M^-(T, \bar{U})\} > A\frac{\bar{U}}{\ln T},\quad T \to \infty.$$

3. Корреляционные формулы для функций $Z(t)$, $2\cos^2\vartheta_1(t)$ и доказательство основных оценок (14)

Пусть

$$\eta(t) = \sqrt{2}\cos\vartheta_1(t), \tag{24}$$

(относительно $\vartheta_1(t)$ см. (9)). Основой для доказательства Теоремы являются следующие формулы, выражающие корреляционные свойства функций $Z(t)$, $\eta^2(t)$:

Лемма 1.

$$\begin{aligned}\int_{G_3} Z(t)\eta^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi}U\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}+2\varrho\ln P\right)+\\&\quad+O\{(x_2-x_1)T^{1/4}\ln T\},\\ \int_{G_4} Z(t)\eta^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{\pi}U\sin\frac{y_2-y_1}{2}\cos\left(\frac{y_1+y_2}{2}+2\varrho\ln P\right)+\\&\quad O\{y_2-y_1)T^{1/4}\ln T\},\end{aligned} \tag{25}$$

где U удовлетворяет условию (3) и O — оценки имеют место равномерно для $\varrho=O(1)$.

Доказательство Теоремы с помощью Леммы 1. Полагая в формулах (25)

$$\varrho_k(z) = \frac{2k\pi+z}{2\ln P},\ k=0,\ \pm1,\ \dots,\ \pm L,\ L=O(1),$$

мы приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}\int_{G_3} Z(t)\eta^2\{t+\varrho_k(z)\}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi}U\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}+z\right)+\\&\quad+O\{(x_2-x_1)T^{1/4}\ln T\},\\ \int_{G_4} Z(t)\eta^2\{t+\varrho_k(z)\}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{\pi}U\sin\frac{y_2-y_1}{2}\cos\left(\frac{y_1+y_2}{2}+z\right)+\\&\quad+O\{(y_2-y_1)T^{1/4}\ln T\}.\end{aligned} \tag{26}$$

Основынм моментом в доказательстве является следующее расщепление пары формул (26) на четвёрку асимптотических формул:

$$\int_{G_3} Z(t)\eta^2\{t+\varrho_k(0)\}\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{\pi}U\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2},$$

$$\int_{G_3} Z(t)\eta^2\{t+\varrho_k(\pi)\}\,\mathrm{d}t \sim -\frac{1}{\pi}U\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2},$$

$$\int_{G_4} Z(t)\eta^2\{t+\varrho_k(0)\}\,\mathrm{d}t \sim -\frac{1}{\pi}U\sin\frac{y_2-y_1}{2}\cos\frac{y_1+y_2}{2}, \tag{27}$$

$$\int_{G_4} Z(t)\eta^2\{t+\varrho_k(\pi)\}\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{\pi}U\sin\frac{y_2-y_1}{2}\cos\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Замечание 4. Формулы (27) действительно являются асимптотическими формулами, так как (см. (12)),

$$\frac{x_2-x_1}{2},\quad \frac{x_1+x_2}{2},\quad \frac{y_2-y_1}{2},\quad \frac{y_1+y_2}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Так как, далее,

$$\operatorname{sgn}(Z(t)\eta^2\{t+\varrho_k(z)\}) = \operatorname{sgn}\{Z(t)\}$$

для почти всех $t\in\langle T,\ T+U\rangle$, ($\eta^2\{t+\varrho_k(z)\}$ имеет лишь конечное число нулей четного порядка при фиксированых k и z), то с помощью формул (27) получаются нужные оценки снизу для мер множеств G_3^+, G_3^-, G_4^-, G_4^+ соответственно.

Действительно. Положим в первой формуле из (27) $U=\bar{U}$ и фиксируем k. Тогда, в силу (13), (24) получаем, что

$$0 < A(x_1,x_2)\bar{U} < \int_{G_3} Z(t)\eta^2\{t+\varrho_k(0)\}\,\mathrm{d}t \leqq \int_{G_3^+} Z(t)\eta^2\{t+\varrho_k(0)\}\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \sqrt{m(G_3^+)}\left\{\int_{G_3^+} Z^2(t)\eta^4\{t+\varrho_k(0)\}\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} < 2\sqrt{m(G_3^+)}\left\{\int_{G_3^+} Z^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2}. \tag{28}$$

Далее заметим, что в силу (12), (18), (19),

$$m\{G_3^+\setminus\langle T,\ T+\bar{U}\rangle\} = O\left(\frac{1}{\ln T}\right).$$

и, (см. [9], стр. 109),

$$Z(t) = O(t^{1/6}\ln t). \tag{29}$$

Следовательно,

$$\int_{G_3^+} Z^2(t)\,\mathrm{d}t < AT^{1/6} + \int_T^{T+\bar{U}} Z^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{30}$$

Еще напомним, что имеет место следующая теорема о среднем Харди-Литтлвуда ([2], стр. 1222, 151—156, см. также [3], стр. 59—61) с оценкой Баласубраманиана для остаточного члена ([1]):

$$\int_T^{T+\bar{U}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t = \int_T^{T+\bar{U}} Z^2(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \bar{U}\ln\frac{T}{2\pi} + 2c\,\bar{U} + O(T^{27/81+\varepsilon/2}) < A\,\bar{U}\ln T, \tag{31}$$

(c — постоянная Эйлера). Теперь из (28), в силу (30), (31) следует соотношение

$$0 < A(x_1, x_2)\bar{U} < \{m(G_3^+)\cdot\bar{U}\ln T\}^{1/2}$$

и, отсюда,

$$m(G_3^+) > A(x_1, x_2)\frac{\bar{U}}{\ln T},$$

т.е. мы получили первую оценку в (14). Аналогичным образом получаем и остальные оценки в (14).

4. Дискретные корреляционные формулы и доказательство интегральных корреляционных формул (25)

Основой для доказательства интегральных корреляционных формул (25) являются следующие дискретные корреляционные формулы:

Лемма 2.

$$\sum_{T\leqq k_{2\nu}\leqq T+U} Z[k_{2\nu}(\tau)]\eta^2[k_{2\nu}(\tau)+\varrho] =$$
$$= \frac{3}{4\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos(\tau+2\varrho\ln P) + O(T^{1/4}\ln^2 T),$$
$$\sum_{T\leqq k_{2\nu+1}\leqq T+U} Z[k_{2\nu+1}(\tau)]\,\eta^2[k_{2\nu+1}(\tau)+\varrho] = \tag{32}$$
$$= -\frac{3}{4\pi}U\ln T\cdot\cos(\tau+2\varrho\ln P) + O(T^{1/4}\ln^2 T),$$

где U удовлетворяет условию (3) и O — оценки имеют место равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$ и $\varrho = O(1)$.

Теперь мы покажем, как завершается

Доказательство Леммы 1 с помощью Леммы 2. Если $k_{2\nu} \in \langle T, T+U \rangle$, то (см. (10), (11)),

$$\left(\frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} = 3\vartheta_1'[k_{2\nu}(\tau)] = \frac{3}{2}\ln\frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U}{T}\right) > 0,$$

для достаточно больших T. Далее, (см. (18), (24), (29)),

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} Z[k_{2\nu}(\tau)]\,\eta^2[k_{2\nu}(\tau)+\varrho]\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} Z[k_{2\nu}(\tau)]\,\eta^2[k_{2\nu}(\tau)+\varrho]\left(\frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{3}{2}\ln\frac{T}{2\pi}\int_{k_{2\nu}(x_1)}^{k_{2\nu}(x_2)} Z(t)\,\eta^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t + O\left(\frac{U}{T}\int_{k_{2\nu}(x_1)}^{k_{2\nu}(x_2)} |Z(t)|\,\eta^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= \frac{3}{2}\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\int_{k_{2\nu}(x_1)}^{k_{2\nu}(x_2)} Z(t)\,\eta^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t + O(UT^{-5/6}). \end{aligned} \tag{33}$$

Следовательно, интегрируя первое соотношение в (32) по τ в промежутке $\langle x_1, x_2 \rangle$, в силу (12), (17), (33) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}\ln\frac{T}{2\pi}\int_{G_3} Z(t)\,\eta^2(t+\varrho)\,\mathrm{d}t + O(U^2T^{-5/6}\ln T) = \\ &= \frac{3}{4\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\{\sin(x_2+2\varrho\ln P) - \sin(x_1+2\varrho\ln P)\} + \\ &\quad + O\{(x_2-x_1)T^{1/4}\ln^2 T\}, \end{aligned}$$

откуда следует первое соотношение в (25). Аналогичным образом получается и второе соотношение в (25). Доказательство Леммы 1 с помощью Леммы 2 закончено.

Лемма 2, в свою очередь, получается из следующих двух соотношений:

Лемма 3.

$$\sum_{T \leq k_\nu \leq T+U} Z[k_\nu(\tau)]\,\eta^2[k_\nu(\tau)+\varrho] = O(T^{1/4}\ln^2 T), \tag{34}$$

где U удовлетворяет условию (3) и O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho = O(1)$.

Лемма 4.

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu Z[k_\nu(\tau)]\, \eta^2[k_\nu(\tau) + \varrho] =$$
$$= \frac{3}{2\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \cos(\tau + 2\varrho \ln P) + O(T^{1/4} \ln T), \tag{35}$$

где U удовлетворяет условию (3) и O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$ и $\varrho = O(1)$.

Доказательства соотношений (34), (35) помещены в следующих двух частях работы.

5. Доказательство Леммы 3

Так как (см. (3))

$$\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \sqrt{\frac{T}{2\pi}} = O\left(\frac{U}{\sqrt{T}}\right) = O(1), \qquad t \in \langle T, T+U \rangle,$$

то, в силу (9), формулу Римана-Зигеля (8) преобразуем так

$$Z(t) = 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta - t \ln n) + O(T^{-1/4}) =$$
$$= 2 \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta_1 - t \ln n) + O(T^{-1/4}), \quad P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \tag{36}$$

для $t \in \langle T, T+U \rangle$.

Далее, (см. (9), (10), $\varrho = O(1)$,

$$\vartheta_1(t+\varrho) = \vartheta_1(t) + \vartheta_1'(t)\varrho + O\left(\frac{\varrho^2}{T}\right) =$$
$$= \vartheta_1(t) + \varrho \ln P + O\left(\frac{|\varrho| U}{T}\right) + O\left(\frac{\varrho^2}{T}\right) =$$
$$= \vartheta_1(t) + \varrho \ln P + O\left(\frac{U}{T}\right), \qquad t \in \langle T, T+U \rangle,$$

и, (см. (24)),

$$\eta^2(t+\varrho) = 1 + \cos\{2\vartheta_1(t+\varrho)\} = 1 + \cos\{2\vartheta_1 + 2\varrho \ln \mathrm{P}\} + \mathrm{O}\left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{T}}\right). \tag{37}$$

Следовательно, (см. (29), (36), (37)),

$$Z(t)\eta^2(t+\varrho) = \sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(3\vartheta_1 - t\ln n + 2\varrho\ln P) +$$
$$+\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta_1 + t\ln n + 2\varrho\ln P) + \tag{38}$$
$$+2\sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta_1 - t\ln n) + O(T^{-1/4}).$$

Теперь, (см. (11), (17), (38)),

$$\sum_{T\leqq k_\nu\leqq T+U} Z[k_\nu(\tau)]\,\eta^2[k_\nu(\tau)+\varrho] = W_1 + W_2 + 2W_3 + O(T^{-1/4}U\ln T),$$
$$W_i = \sum_{n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}V_i, \tag{39}$$
$$V_i = \sum_{T\leqq k_\nu\leqq T+U}\cos\{2\pi F_i(\nu)\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$F_1(\nu) = \frac{\nu}{2} - \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}\ln n + \frac{\varrho}{\pi}\ln P + \frac{\tau}{2\pi},$$
$$F_2(\nu) = \frac{\nu}{6} + \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}\ln n + \frac{\varrho}{\pi}\ln P + \frac{\tau}{6\pi}, \tag{40}$$
$$F_3(\nu) = \frac{\nu}{6} - \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}\ln n + \frac{\tau}{6\pi}.$$

Если

$$\bar\nu = \min\{\nu\colon k_\nu \in \langle T, T+U\rangle\}, \quad N = \max\{\nu\colon k_\nu \in \langle T, T+U\rangle\},$$

то

$$V_i = \sum_{k_{\bar\nu-1}\leqq k_\nu\leqq k_{N-1}}\cos\{2\pi F_i(\nu)\} + O(1) = Y_i + O(1), \quad i = 1, 2, 3. \tag{41}$$

Заметим, что (см. (11))

$$T \leqq k_\nu(\tau) \leqq T+U, \tag{42}$$

если $\nu \in \langle \bar\nu + 1, N-1\rangle$.

Оценки суми Y_i получаются по известным Леммам:

Пусть $F(x)$ — действительная дифференцируемая функция на интервале (a, b), $F'(x)$ монотонна и $|F'(x)| \leqq q < 1$. Тогда

$$\sum_{a < \nu \leqq b} e^{2\pi i F(\nu)} = \int_a^b e^{2\pi i F(x)} \mathrm{d}x + O(1), \tag{43}$$

(см. [9], стр. 78).

Пусть $G(x)$ монотонна и $G'(x) \geqq m > 0$ [или $G'(x) \leqq -m < 0$] на всем интервале (a, b). Тогда

$$\left| \int_a^b e^{\mathrm{i}G(x)} \mathrm{d}x \right| \leqq \frac{4}{m}, \tag{44}$$

(см. [9], стр. 73).

Так как при $n = 1$, $V_i(n = 1) = O(1)$, (см. (39), (40)), то

$$W_i(n = 1) = O(T^{1/4}), \quad i = 1, 2, 3. \tag{45}$$

Приступаем к случаю $2 \leqq n < P$. Так как в силу (10), (11)

$$\frac{\mathrm{d}k_\nu(\tau)}{\mathrm{d}\nu} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{\ln \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}},$$

(в аналогичных случаях мы считаем, что $k_\nu(\tau)$ определено соотношением (11) для любого действительного $\nu \geqq 1$, при фиксированном $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$), то, (см. (40)),

$$\begin{gathered} F_1'(\nu) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln n}{\ln \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}}, \quad F_1''(\nu) = \frac{2\pi}{9} \frac{\ln n}{k_\nu(\tau) \ln^3 \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}} > 0, \\ F_2'(\nu) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \frac{\ln n}{\ln \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}}, \quad F_2''(\nu) = -\frac{2\pi}{9} \cdot \frac{\ln n}{k_\nu(\tau) \ln^3 \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}} < 0, \\ F_3'(\nu) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \frac{\ln n}{\ln \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}}, \quad F_3''(\nu) = \frac{2\pi}{9} \frac{\ln n}{k_\nu(\tau) \ln^3 \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}} > 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Далее, (см. (42)),

$$0 < \frac{\ln n}{\ln \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}} \leqq \frac{\ln n}{\ln \frac{k_{\bar{\nu}+1}(\tau)}{2\pi}} \leqq \frac{\ln n}{2 \ln P} < \frac{1}{2},$$

и, (см. (46)),

$$F_1'(\nu)\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right),\quad F_2'(\nu)\in\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right),\quad F_3'(\nu)\in\left(0,\frac{1}{6}\right). \tag{47}$$

Теперь, в силу (43), (44), (46), (47), (см. (41)),

$$Y_1(n\geqq 2)=\int_{k_{\bar\nu+1}\leqq k_x\leqq k_{N-1}}\cos\{2\pi F_1(x)\}\,\mathrm{d}x+O(1)=O(1),$$

и (см. (39), (41)).

$$W_1(n\geqq 2)=O(T^{1/4}). \tag{48}$$

Аналогичным образом получается оценка

$$W_2(n\geqq 2)=O(T^{1/4}). \tag{49}$$

Далее, (см. (43), (44)),

$$Y_3(n\geqq 2)=\int_{k_{\bar\nu+1}\leqq k_x\leqq k_{N-1}}\cos\{2\pi F_3(x)\}\,\mathrm{d}x+O(1)=O\left(\frac{\ln T}{\ln\frac{P}{n}}\right),$$

так как (см. (46); $F_3'(\nu)$ — возрастает для $\nu\in\langle\bar\nu+1,\,N-1\rangle$)

$$F_3'(\nu)=\frac{1}{3\ln\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}}\cdot\ln\frac{\sqrt{\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}}}{n}\geqq\frac{1}{7\ln P}\ln\frac{P}{n}>0.$$

Следовательно, действуя обычным способом,

$$\begin{aligned}W_3(2\leqq n\leqq[P]-1)&<A\ln T\cdot\sum_{2\leqq n\leqq[P]-1}\frac{1}{\sqrt{n}\ln\frac{P}{n}}\leqq\\&\leqq A\ln T\cdot\sum_{2\leqq n\leqq[P]-1}\frac{1}{\sqrt{n}\ln\frac{[P]}{n}}<AT^{1/4}\ln^2T.\end{aligned} \tag{50}$$

В случае $n=[P]$ мы получаем прямо (см. (3), (17), (39))

$$W_3(n=[P])=O\left(\frac{U\ln T}{\sqrt{[P]}}\right)=O(T^{1/4}\ln T). \tag{51}$$

Наконец, из (39), в силу (45), (48)—(51), получаем соотношение (34).

6. Доказательство Леммы 4

В силу (39), (40) получаем

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu Z[k_\nu(\tau)]\,\eta^2[k_\nu(\tau)+\varrho] = \bar{W}_1 + \bar{W}_2 + 2\bar{W}_3 + O(T^{1/4}\ln T), \tag{52}$$

$$\bar{W}_i = \sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{V}_i,$$

$$\bar{V}_i = \sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} \cos\{2\pi \bar{F}_i(\nu)\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\bar{F}_i(\nu) = \frac{\nu}{2} + F_i(\nu), \quad i = 1, 2, 3. \tag{53}$$

Так как (см. (47))

$$\bar{F}_2'(\nu) = \frac{1}{2} + F_2'(\nu) \in \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right), \quad F_3'(\nu) = \frac{1}{2} + F_3'(\nu) \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right),$$

то, как в случаях (45), (48), (49), получаем оценки

$$\bar{W}_2(n \geqq 2), \quad \bar{W}_3(n \geqq 2) = O(T^{1/4}), \tag{54}$$

и, так как $\bar{V}_2(n-1)$, $\bar{V}_3(n=1) = O(1)$, то

$$\bar{W}_2(n=1), \quad \bar{W}_3(n=1) = O(T^{1/4}). \tag{55}$$

Далее, (см. (17), (40), (52), (53)),

$$\bar{V}_1(n=1) = \sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} \cos\{2\pi \bar{F}_1(\nu)\} = \cos(\tau + 2\varrho \ln P) \cdot \sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} 1 =$$

$$= \frac{3}{2\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \cos(\tau + 2\varrho \ln P) + O(1), \tag{56}$$

и,

$$\bar{V}_1(2 \leqq n < P) = \sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} \cos\{2\pi \bar{F}_1(\nu) = \sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} \cos\{2\pi \tilde{F}_1(\nu)\},$$

где

$$\tilde{F}_1(\nu) = \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi} \ln n - \frac{\varrho}{\pi} \ln P - \frac{\tau}{2\pi}.$$

Так как

$$\tilde{F}'_1(\nu) = \frac{1}{3} \frac{\ln n}{\ln \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}}, \quad \tilde{F}''_2(\nu) = -\frac{2\pi}{9} \cdot \frac{\ln n}{k_\nu(\tau) \ln^3 \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}} < 0,$$

и (см. (42))

$$\tilde{F}'_1(\nu) \in \left(\frac{A}{\ln T}, \frac{1}{6}\right),$$

то, в силу (43), (44), (ср. (41)),

$$\bar{V}_2(n \geqq 2) = O(\ln T),$$

и, следовательно,

$$\bar{W}_1(n \geqq 2) = O(T^{1/4} \ln T). \tag{57}$$

Наконец, из (52), в силу (54)—(57), получаем соотношение (35).

ЛИТЕРАТУРА

1. Balasubramanian, R.: An improvement on a theorem of Titchmarsh on the mean square of $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$, Proc. London Math. Soc. 36 (1978), 540—576.
2. Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of Primes, Acta Math., 41 (1918), 119—196.
3. Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line, Math. Zs., 10 (1921), 283—317.
4. Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz, Proc. London Math. Soc. (2), 21 (1922), 39—74.

5. Lehmer, D. H.: On the roots of the Riemann Zeta-function, Acta Math., 95 (1956), 291—298.
6. Selberg, A.: On the zeros of Riemann's zeta-function, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo (1942), No. 10.
7. Selberg, A.: The zeta-function and the Riemann hypothesis, 10. Skand. Math. Kongr. (1946), 187—200.
8. Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, Quart. J. Math., IV, 5 (1934), 98—105.
9. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, ИИЛ, Москва, 1953.
10. Карацуба, А. А.: О нулях дзета-функции Римана, Доклады АН СССР, т. 276 № 3, (1984), 535—539.
11. Карацуба, А. А.: О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой, Известия АН СССР, т. 48, № 3, (1984), 569—584.
12. Мозер, Ян: Улучшение теоремы Харди-Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, Acta Math. Univ. Comen., 42—43 (1983), 41—50.
13. Мозер, Ян: Об одной кубической формуле в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., 44—45 (1984), 81—89.
14. Мозер, Ян: Об одной кубической сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 46—47, (1985), 63—74.
15. Мозер, Ян: Кубические теоремы о среднем в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 50—51 (1987), 133—166.

Адрес автора:
Ján Moser
Katedra mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступило: 5. 5. 1985

SÚHRN

O MIERACH NIEKTORÝCH MNOŽÍN NA KRITICKEJ PRIAMKE

Ján Moser, Bratislava

Nech $M^+(T, \bar{U})$, $M^-(T, \bar{U})$ označujú množiny hodnôt t, pre ktoré platí $Z(t) > 0$, $Z(t) < 0$ zodpovedajúco ($\bar{U} = T^{27/82+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon$ je ľubovoľne malé číslo). V práci je dokázaný odhad zdola pre miery množín M^+, M^-:

$$m\{M^+(T, \bar{U})\}, \quad m\{M^-(T, \bar{U})\} > A\frac{\bar{U}}{\ln T}, \quad T \to \infty, \tag{1}$$

ktorý leží blízko k odhadu zhora $m(M^+)$, $m(M^-) < \bar{U}$. Základom dôkazu je štiepenie dvoch korelačných vzorcov pre funkciu $Z(t)$ a vhodnú pomocnú funkciu $\eta^2(t)$, pre dva systémy $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$ nesúvislých množín, na štyri asymptotické vzorce. Tieto asymptotické vzorce umožňujú dokázať odhady zdola typu (1) pre miery množín, patriacich do štyroch systémov $G_3^+, G_3^-, G_4^-, G_4^+$.

SUMMARY

ON MEASURES OF CERTAIN SETS ON THE CRITICAL LINE

Ján Moser, Bratislava

Let $M^+(T, \bar{U})$, $M^-(T, \bar{U})$ denote the sets of values t, for which $Z(t) > 0$, $Z(t) < 0$ respectively ($\bar{U} = T^{27/82+\varepsilon}$, ε is a positive number). In the paper a lower estimate for the measures M^+, M^- is given:

$$m\{M^+(T, \bar{U})\}, \quad m\{M^-(T, \bar{U})\} > A\frac{\bar{U}}{\ln T}, \quad T \to \infty . \tag{1}$$

The last estimate is near to the upper estimate of $m(M^+)$, $m(M^-) < \bar{U}$. The main idea of the proof lies in splitting of two correlation formulas for the function $Z(t)$ and an auxiliar function $\eta^2(t)$ for two collections $G_3(x_1, x_2)$, $G_4(y_1, y_2)$ of disconnected sets, into four asymptotic formulas. The last enable to prove the lower estimates of type (1) for measures of sets belonging to four collections G_3^+, G_3^-, G_4^-, G_4^+.