

Werk

Label: Article

Jahr: 1987

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?312901348_50-51|log18

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

**ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ ФУНКЦИИ $Z(t)$
В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА**

ЯН МОЗЕР, Братислава

Предлагаемая работа посвящена анализу формулы Римана—Зигеля ([4], стр. 60, ср. [6], стр. 94)

$$Z(t) = 2 \sum_{n \leq t_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \{ \vartheta(t) - t \ln n \} + O(t^{-1/4}), \quad t_1 = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \quad (1)$$

средствами дискретного метода. Вводится понятие равновесного множества к данному множеству на критической прямой. Получены следующие свойства равновесных множеств:

(А) доказано, что для любого множества, входящего в определенную систему множеств, существует бесконечное множество (мощности континуума) равновесных множеств;

(В) доказана асимптотическая формула, выражающая одну из закономерностей управляющих «хаотичностью» поведения положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ относительно любой пары равновесных множеств.

1. Структура оценки типа Харди-Литтлвуда и равновесные множества на критической прямой

В работе [8], (ср. [9]—[11]) автор начал изучать структуру оценки типа Харди-Литтлвуда ([1], стр. 178, ср. [8], стр. 3)

$$\int_T^{T+H} Z(t) dt = o(H), \quad T \rightarrow \infty, \quad (2)$$

для известной функции $Z(t)$, при некотором H . Были получены такие результаты.

Прежде всего автор определил бесконечное семейство последовательностей $\{t_r(\tau)\}$ согласно условию

$$\vartheta[t_\nu(\tau)] = \pi\nu + \tau, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad (3)$$

($\vartheta(t)$ — известная функция), и два семейства несвязных множеств:

$$G_1(x) = G_1(x, T, H) = \bigcup_{T \leq t_{2\nu} \leq T+H} \{t: t_{2\nu}(-x) < t < t_{2\nu}(x)\}, \quad 0 < x \leq \pi/2, \quad (4)$$

$$G_2(y) = G_2(y, T, H) = \bigcup_{T \leq t_{2\nu+1} \leq T+H} \{t: t_{2\nu+1}(-y) < t < t_{2\nu+1}(y)\}, \quad 0 < y \leq \pi/2,$$

где

$$H = T^{1/6} \psi \ln^5 T, \quad (5)$$

($0 < \psi = \psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к ∞ функция). Отсюда, суммированием значений $Z[t_\nu(\tau)]$ по дискретному параметру ν и, интегрированием по непрерывному параметру τ — эти операции представляют собой своего рода синтез дискретного и непрерывного подходов к вопросу о структуре оценки типа Харди-Литтлвуда (2) — были получены следующие асимптотические формулы ([8], (5), ср. [9], (5)):

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\{G_1(x)\}} \int_{G_1(x)} Z(t) dt &\sim 2 \frac{\sin y}{x}, \\ \frac{1}{m\{G_2(y)\}} \int_{G_2(y)} Z(t) dt &\sim -2 \frac{\sin y}{y}, \end{aligned} \quad (6)$$

при $T \rightarrow \infty$, ($m\{G_1(x)\}$, $m\{G_2(y)\}$ — меры множеств $G_1(x)$, $G_2(y)$ соответственно).

Заметим, что формулы (6) представляют собой интегральные теоремы о среднем для первой нечетной степени $Z(t)$, (интегральные теоремы о среднем для следующей нечетной степени — $Z^3(t)$ — автор доказал в работе [12]). Они содержат новую информацию о распределении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ относительно промежутка $\langle T, T+H \rangle$ и выражают закономерное поведение функции $Z(t)$ относительно семейств множеств $G_1(x)$, $G_2(y)$, (в работах [10], [11] автор начал изучать и структуру множеств $G_1(x)$, $G_2(y)$, т.е. поведение функции $Z(t)$ относительно главных подмножеств $G_1^+(x)$, $G_1^-(x)$, $G_2^+(y)$, $G_2^-(y)$, где $G_1^+(x) = \{t: t \in G_1(x), Z(t) > 0\}$, ...).

Так как $G_1(x) \cap G_2(x) = \emptyset$, то из (6) следует оценка (см. [8], (8), (9)),

$$\int_{G_1(x) \cup G_2(x)} Z(t) dt = o(H). \quad (7)$$

Отсюда, в случае $x = \pi/2$, следует оценка (2), т.е. оценка типа Харди-Литтлвуда (2) содержится в (7) лишь как частный случай.

Теперь мы обратим внимание на соотношение (7) и приведем некоторые наводящие соображения. Содержание соотношения (7) можно выразить так: множество $G_2(x)$ является равновесным множеством для множества $G_1(x)$, и, наоборот. Конечно, $G_2(y)$ при $y \neq x$ не может быть равновесным множеством для $G_1(x)$ в силу асимптотических формул (6). Следовательно, для любого $G_1(x)$ существует единственное равновесное множество в системе множеств $G_2(y)$ — это $G_2(x)$.

В связи со сказанным возникает следующий

Вопрос. Можно ли обобщить системы множеств $G_1(x)$, $G_2(y)$; $x, y \in (0, \pi/2)$ таким образом, чтобы для любого (кроме одного) множества $\bar{G}_1$ входящего в первую систему, существовало во второй системе бесконечно много равновесных множеств $\bar{G}_2$, т.е. таких множеств $\bar{G}_2$, для которых справедлива оценка

$$\int_{\bar{G}_1 \cup \bar{G}_2} Z(t) dt = o(H)$$

(ср. (7))?

Ответ на вопрос оказывается утвердительным. Итак, первоначальная форма решения вопроса о структуре оценки типа Харди-Литтлвуда (см. соотношения (4)–(7)) приводит нас к еще более тонким закономерностям в вопросе о поведении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$.

Переходим к точным формулировкам и доказательствам.

2. Бесконечность множества равновесных множеств формулировка результатов

Прежде всего мы определим два семейства несвязных множеств относительно промежутка $\langle Z, T+H \rangle$, следующим образом:

$$\begin{aligned} G_1(x_1, x_2) &= G_1(x_1, x_2, T, H) = \\ &= \bigcup_{T \leq t_{2\nu} \leq T+H} \{t: t_{2\nu}(x_1) < t < t_{2\nu}(x_2)\}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}, \\ G_2(y_1, y_2) &= G_2(y_1, y_2, T, H) = \\ &= \bigcup_{T \leq t_{2\nu+1} \leq T+H} \{t: t_{2\nu+1}(y_1) < t < t_{2\nu+1}(y_2)\}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y_1 < y_2 \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (8)$$

(относительно H см. (5)). Пусть $\mathbf{G}_1$ обозначает семейство множеств $G_1(x_1, x_2)$ и $\mathbf{G}_2$ — семейство множеств $G_2(y_1, y_2)$. Ясно, что $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ являются

обобщениями семейств множеств $G_1(x)$, $G_2(y)$, (см. (4)). Очевидно, что $G_1(x_1, x_2) \cap G_2(y_1, y_2) = \emptyset$ для любых допустимых значений x_1, x_2, y_1, y_2 .

Еще напомним определение функции $Z(t)$, ([6], стр. 94):

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad (9)$$

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{2}t \ln \pi + \operatorname{Im} \ln \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}t \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Теперь мы приведем следующее

Определение. Пусть $G_1(x_1, x_2)$ — любое множество из семейства $\mathbf{G}_1$. Множество $G_2(y_1, y_2) \in \mathbf{G}_2$ является равновесным множеством для множества $G_1(x_1, x_2)$, если

$$\int_{G_1(x_1, x_2) \cup G_2(y_1, y_2)} Z(t) dt = o(H), \quad T \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Аналогичным образом определяется для любого $G_2(y_1, y_2) \in \mathbf{G}_2$ равновесное множество $G_1(x_1, x_2) \in \mathbf{G}_1$. Следовательно, если $G_2(y_1, y_2) \in \mathbf{G}_2$ является равновесным множеством для $G_1(x_1, x_2) \in \mathbf{G}_1$, то $G_1(x_1, x_2)$ является равновесным множеством для $G_2(y_1, y_2)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. для любого множества $G_1(x_1, x_2) \in \mathbf{G}_1$, где $-\pi/2 < x_1 < x_2 \leq \pi/2$ или $-\pi/2 \leq x_1 < x_2 < \pi/2$, существует бесконечное множество (мощности континуума) равновесных множеств $G_2(y_1, y_2) \in \mathbf{G}_2$.

Далее мы приведем формулы для мер множеств $G_1(x_1, x_2)$, $G_2(y_1, y_2)$. Так как (см. (3))

$$\vartheta[t_{2\nu}(x_2)] - \vartheta[t_{2\nu}(x_1)] = x_2 - x_1,$$

$$\vartheta[t_{2\nu+1}(y_2)] - \vartheta[t_{2\nu+1}(y_1)] = y_2 - y_1,$$

то, например,

$$t_{2\nu}(x_2) - t_{2\nu}(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{\vartheta'(\tilde{T})}, \quad \tilde{T} \in (t_{2\nu}(x_1), t_{2\nu}(x_2)).$$

Отсюда, по формуле (см. [5], стр. 100)

$$\vartheta'(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (11)$$

следует

$$t_{2\nu}(x_2) - t_{2\nu}(x_1) = \frac{2(x_2 - x_1)}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left\{\frac{(x_2 - x_1)H}{T \ln^2 T}\right\}, \quad (12)$$

и, аналогичным образом,

$$t_{2v+1}(y_2) - t_{2v+1}(y_1) = \frac{2(y_2 - y_1)}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left\{\frac{(y_2 - y_1)H}{T \ln^2 T}\right\}, \quad (13)$$

для $t_{2v}(x_1), t_{2v+1}(y_2) \in \langle T, T+H \rangle$.

Далее напомним, что имеют место следующие соотношения ([7], (42)):

$$\begin{aligned} \sum_{T \leq t_{2v} \leq T+H} 1 &= \frac{1}{4\pi} H \ln \frac{T}{2\pi} + O(1), \\ \sum_{T \leq t_{2v+1} \leq T+H} 1 &= \frac{1}{4\pi} H \ln \frac{T}{2\pi} + O(1). \end{aligned} \quad (14)$$

Наконец, в силу (8), (12)—(14), получаем следующие формулы для мер множеств $G_1(x_1, x_2)$, $G_2(y_1, y_2)$:

$$\begin{aligned} m\{G_1(x_1, x_2)\} &= \frac{x_2 - x_1}{2\pi} H + O(1), \\ m\{G_2(y_2, y_1)\} &= \frac{y_2 - y_1}{2\pi} H + O(1). \end{aligned} \quad (15)$$

В дальнейшем мы увидим (см. (19), ср. Определение), что для любого множества $G_1(x_1, x_2) \in \mathbf{G}_1$, где $-\pi/2 < x_1 < x_2 \leq \pi/2$ или $-\pi/2 \leq x_1 < x_2 < \pi/2$, равновесными являются следующие два множества:

$$G_2(x_1, x_2), \quad G_2(-x_2, -x_1) \in \mathbf{G}_2,$$

которые мы назовем тривиальными равновесными множествами.

Формулы (15) показывают, что меры тривиальных равновесных множеств асимптотически равны:

$$m\{G_1(x_1, x_2)\} \sim m\{G_2(x_1, x_2)\} \sim m\{G_2(-x_2, -x_1)\} \sim \frac{x_2 - x_1}{2\pi} H, \quad T \rightarrow \infty.$$

3. «Хаотичность» поведения положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$, относительно равновесных множеств.

Формулировка результатов

Как известно, вычисления значений функции $Z(t)$, связанные с регистрацией нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, показывают, что поведение поло-

жительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ (а следовательно, и поведение расстояний нулей нечетного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$) очень «хаотично» в промежутке покрываемом вычислениями. По этому поводу см. например график функции $Z(t)$ в окрестности первой пары нулей функции $Z(t)$, лежащей в окрестности значения $t = 2\pi \cdot 1114,89$, обнаруженной Д. Лемером, см. [2], стр. 296, 297). Тем более «хаотичное» поведение графика функции $Z(t)$ следует ожидать в случае $t \rightarrow \infty$, (см. также мнение А. Сельберга в работе [3], стр. 196, строки 8—11 сверху и стр. 200, строки 7—13 сверху).

В работе [10] автор обнаружил одну из закономерностей управляющих этой «хаотичностью»:

$$\int_{G_1^+(x) \cup G_2^+(x)} Z(t) dt \sim - \int_{G_1^-(x) \cup G_2^-(x)} Z(t) dt, \quad (16)$$

при $T \rightarrow \infty$.

Геометрическое содержание асимптотической формулы (16) таково: меры (площади) фигур, соответствующих положительным и отрицательным участкам графика функции $Z(t)$, $t \in G_1(x) \cup G_2(x)$, асимптотически совпадают.

В предлагаемой работе мы значительно обобщим эту закономерность. Пусть

$$\left. \begin{aligned} G_1^+(x_1, x_2) &= \{t: t \in G_1(x_1, x_2), \quad Z(t) > 0\}, \\ G_1^-(x_1, x_2) &= \{t: t \in G_1(x_1, x_2), \quad Z(t) < 0\}, \\ G_1^0(x_1, x_2) &= \{t: t \in G_1(x_1, x_2), \quad Z(t) = 0\}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

аналогичное значение имеют обозначения $G_2^+(y_1, y_2)$, $G_2^-(y_1, y_2)$, $G_2^0(y_1, y_2)$. Заметим, что перечисленные множества взаимно не пересекаются, так как $G_1(x_1, x_2) \cap G_2(y_1, y_2) = \emptyset$, и, кроме того, $m\{G_1^0(x_1, x_2)\} = m\{G_2^0(y_1, y_2)\} = 0$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Если $G_1(x_1, x_2) \in \mathbf{G}_1$, $G_2(y_1, y_2) \in \mathbf{G}_2$ — два равновесных множества, то

$$\int_{G_1^+(x_1, x_2) \cup G_2^+(y_1, y_2)} Z(t) dt \sim - \int_{G_1^-(x_1, x_2) \cup G_2^-(y_1, y_2)} Z(t) dt, \quad T \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Пусть $D^+ = D^+(x_1, x_2, y_1, y_2)$ обозначает фигуру, соответствующую (обычным образом) графику функции

$$Z(t), \quad t \in G_1^+(x_1, x_2) \cup G_2^+(y_1, y_2),$$

и $D^- = D^-(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — фигуру, соответствующую графику функции

$$Z(t), \quad t \in G_1^-(x_1, x_2) \cup G_2^-(y_1, y_2).$$

Пусть $m(D^+)$, $m(D^-)$ обозначают меры (площади) соответствующих фигур.

Замечание 1. Теорема 2 выражает следующую геометрическую закономерность в вопросе о поведении графика функции

$$Z(t), \quad t \in G_1(x_1, x_2) \cup G_2(y_1, y_2),$$

где $G_1(x_1, x_2)$, $G_2(y_1, y_2)$ — равновесные множества:

$$m(D^+) \sim m(D^-), \quad T \rightarrow \infty.$$

Замечание 2. Асимптотические формулы (18), справедливые для бесконечного множества пар равновесных множеств (см. Теоремы 1), представляют собой значительное обобщение асимптотических формул (16), полученных автором в работе [10].

С эстетической точки зрения можно сказать, что закономерность, выражаемая асимптотическими формулами (18), является отблеском почти сверхестественного совершенства, с которым распределены положительные и отрицательные значения функции $Z(t)$.

4. Доказательство Теоремы 1

Справедлива следующая

Лемма.

$$\int_{G_1(x_1, x_2)} Z(t) dt = \frac{H}{\pi} (\sin x_2 - \sin x_1) + O(T^{1/6} \psi \ln^4 T), \quad (19)$$

$$\int_{G_2(y_1, y_2)} Z(t) dt = -\frac{H}{\pi} (\sin y_2 - \sin y_1) + O(T^{1/6} \psi \ln^4 T),$$

где O — оценки имеют место равномерно относительно $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.

Доказательство. Заметим, что асимптотические формулы (19) получаются в результате синтеза дискретного и непрерывного подходов к вопросу о структуре оценки Харди-Литтлвуда (2).

(А) Исходя из формулы Римана-Зигеля (1), автор получил в работе [8], (53), следующие асимптотические формулы:

$$\sum_{T \leq t_{2\nu} \leq T+H} Z[t_{2\nu}(\tau)] = \frac{1}{2\pi} H \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \cos \tau + O(T^{1/6} \psi \ln^5 T),$$

$$\sum_{T \leq t_{2\nu+1} \leq T+H} Z[t_{2\nu+1}(\tau)] = -\frac{1}{2\pi} H \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \cos \tau + O(T^{1/6} \psi \ln^5 T),$$
(20)

($t_\nu = t_\nu(0)$), где оценки остаточных членов имеют место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Замечание 3. Асимптотические формулы (20) представляют собой дискретную основу для доказательства формул (19), которые, в свою очередь, составляют основу для доказательства Теоремы 1 и 2.

(В) Далее мы воспользуемся возможностью интегрировать по свободному параметру τ . Из (3), в силу (11), следует

$$\left(\frac{dt_\nu(\tau)}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{H}{T}\right),$$

для $t_\nu(\tau) \in \langle T, T+H \rangle$. Отсюда, (см. (12), $t = t_{2\nu}(\tau)$),

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} Z[t_{2\nu}(\tau)] d\tau &= \int_{x_1}^{x_2} Z[t_{2\nu}(\tau)] \left(\frac{dt_{2\nu}(\tau)}{d\tau} \right)^{-1} \frac{dt_{2\nu}(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= \int_{t_{2\nu}(x_1)}^{t_{2\nu}(x_2)} Z(t) \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{H}{T}\right) \right\} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \int_{t_{2\nu}(x_1)}^{t_{2\nu}(x_2)} Z(t) dt + O(HT^{-5/6}); \end{aligned}$$

в надлежащем месте использована оценка (см. (9) и [6], стр. 109),

$$Z(t) = O(t^{1/6} \ln t).$$

Наконец, интегрируя первое соотношение в (20) по τ в промежутке $\langle x_1, x_2 \rangle$, в силу (8) получаем первое соотношение в (19), и, аналогичным образом — второе.

Замечание 4. Асимптотические формулы (19) представляют собой обобщение интегральных теорем о среднем для функции $Z(t)$, полученных в работе [8], (5).

Теперь мы уже завершим

Доказательство Теоремы 1. Так как $G_1(x_1, x_2) \cap G_2(y_1, y_2) = \emptyset$ для всех допустимых значений x_1, x_2, y_1, y_2 , то в случае

$$\sin y_2 - \sin y_1 = \sin x_2 - \sin x_1, \quad (21)$$

асимптотические формулы (19) приводят нас к оценке (ср. (7))

$$\int_{G_1(x_1, x_2) \cup G_2(y_1, y_2)} Z(t) dt = o(H). \quad (22)$$

Пусть теперь $G_1(x_1, x_2)$ любое множество входящее в систему $\mathbf{G}_1$. Вопрос о существовании бесконечного множества равновесных множеств $G_2(y_1, y_2) \in \mathbf{G}_2$ для множества $G_1(x_1, x_2)$, очевидно сводится к простому вопросу о существовании бесконечного множества решений неопределенного тригонометрического уравнения (см. (21), (22), ср. Определение).

$$\sin y_2 - \sin y_1 = \Delta, \quad (23)$$

в неизвестных y_1, y_2 , для данного $\Delta = \sin x_2 - \sin x_1$.

Так как, по условию теоремы, $x_1 < x_2$ и $x_1, x_2 \in (-\pi/2, \pi/2)$ или $x_1, x_2 \in (\pi/2, \pi)$, то $\Delta \in (0, 2)$, т.е. $-1 < 1 - \Delta$. Теперь для данного Δ существует бесконечно много (мощности континуума) возможностей для выбора

$$y_1 \in \langle -\pi/2, \arcsin(1 - \Delta) \rangle,$$

и для каждого выбранного y_1 существует единственное решение $y_2 \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ уравнения (23):

$$y_2 = \arcsin(\Delta + \sin y_1).$$

5. Доказательство Теоремы 2

Из первой асимптотической формулы (19) следует (см. (17)) соотношение

$$\begin{aligned} 0 < A(x_1, x_2, \varepsilon)H &< \int_{G_1(x_1, x_2)} Z(t) dt \leq \int_{G_1^+(x_1, x_2)} Z(t) dt \leq \\ &\leq \int_{G_1^+(x_1, x_2) \cup G_2^+(y_1, y_2)} Z(t) dt, \end{aligned} \quad (24)$$

($0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число) для достаточно больших $T > 0$. Аналогичным образом получаем оценку

$$B(x_1, x_2, \varepsilon)H < - \int_{G_1^-(x_1, x_2) \cup G_2^-(y_1, y_2)} Z(t) dt. \quad (25)$$

Так как $G_1(x_1, x_2), G_2(y_1, y_2)$ — равновесные множества, $G_1^+(x_1, x_2), G_2^+(y_1, y_2), G_1^-(x_1, x_2), G_2^-(y_1, y_2)$ — взаимно не пересекаются и $m\{G_1^0(x_1, x_2)\} = m\{G_2^0(y_1, y_2)\} = 0$, то

$$o(H) = \int_{G_1(x_1, x_2) \cup G_2(y_1, y_2)} Z(t) dt =$$

$$= \int_{G_1^+(x_1, x_2) \cup G_2^+(y_1, y_2)} Z(t) dt + \int_{G_1^-(x_1, x_2) \cup G_2^-(y_1, y_2)} Z(t) dt. \quad (26)$$

Теперь из (26), в силу (24), (25), следует асимптотическая формула (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of distribution of Primes, Acta Math., 41 (1918), 119—196.
2. Lehmer, D. H.: On the roots of the Riemann Zeta-function, Acta Math., 95 (1956), 291—200.
3. Selberg, A.: The zeta-function and the Riemann hypothesis, 10. Skand. Math. Kongr. (1946), 187—200.
4. Siegel, C. L.: Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astr. und Physic, Abt. B: Studien, 2 (1932), 45—80.
5. Titchmarsh E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, Quart. J. Math. IV, 5 (1934), 98—105.
6. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, ИИЛ, Москва 1953.
7. Мозер, Ян: Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана, Acta Arith. 31 (1976), 45—51.
8. Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Рима-Зигеля, Acta Arith., 42 (1982), 1—10.
9. Мозер, Ян: Некоторые следствия из формулы Римана-Зигеля, Труды Математического института АН СССР, т. 163, (1984), 183—186.
10. Мозер, Ян: О поведении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 46—47, (1985), 41—48.
11. Мозер, Ян: Гипотеза Римана и поведение некоторых множеств на критической прямой, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 48—49, (1986), 81—91.
12. Мозер, Ян: Кубические теоремы о среднем в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen. Vol. 50—51 (1987), 133—163.

Адрес автора:

Ján Moser

Katedra mat. anal. MFF UK

Mlynská dolina

842 15 Bratislava

Поступило: 14. 3. 1985

SÚHRN

O INTEGRÁLNEJ ROVNOVÁHE FUNKCIE $Z(t)$ V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

V práci sú definované dva systémy $G_1(x_1, x_2)$, $G_2(y_1, y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ nesúvislých množín a dokázané nasledujúce vety o strednej hodnote pre známu funkciu $Z(t)$:

$$\int_{G_1(x_1, x_2)} Z(t) dt \sim \frac{H}{\pi} (\sin x_2 - \sin x_1),$$

$$\int_{G_2(y_1, y_2)} Z(t) dt \sim -\frac{H}{\pi} (\sin y_2 - \sin y_1),$$

pre isté H . Okrem toho bol zavedený pojem rovnovážnej množiny k danej množine $G_1(x_1, x_2)$ a získali sa nasledujúce výsledky.

(a) Pre ľubovoľnú množinu $G_1(x_1, x_2)$ (okrem jednej) existuje nekonečný systém (s mohutnosťou kontinua) rovnovážnych množín $G_2(y_1, y_2)$.

(b) Pre ľubovoľnú dvojicu $G_1(x_1, x_2)$, $G_2(y_1, y_2)$ rovnovážnych množín bol dokázaný asymptotický vzorec, ktorý vyjadruje jeden zo zákonov, riadiacich „chaotičnosť“ správania sa kladných a záporných hodnôt funkcie $Z(t)$.

SUMMARY

ON THE INTEGRAL EQUILIBRIUM OF THE FUNCTION $Z(t)$ IN THE THEORY OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

Two collections $G_1(x_1, x_2)$, $G_2(y_1, y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ of disconnected sets are defined. Then the following mean value theorems for the known $Z(t)$ are proved:

$$\int_{G_1(x_1, x_2)} Z(t) dt \sim \frac{H}{\pi} (\sin x_2 - \sin x_1),$$

$$\int_{G_2(y_1, y_2)} Z(t) dt \sim -\frac{H}{\pi} (\sin y_2 - \sin y_1),$$

for certain H . Moreover a notion of an equilibrial set for the given set $G_1(x_1, x_2)$ was introduced and the following results were obtained:

(a) For any (with the exception on one) set $G_1(x_1, x_2)$ there exists an infinite (of the power of the continuum) collection of equilibrial sets $G_2(y_1, y_2)$.

(b) For any pair $G_1(x_1, x_2)$, $G_2(y_1, y_2)$ of equilibrial sets an asymptotic formula have been obtained. The last expresses one of rules governing the “chaos” of the behaviour of positive and negative values of $Z(t)$.

