UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
L—LI—1987

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРЕМАМ А. СЕЛЬБЕРГА О НУЛЯХ ФУНКЦИИ $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. О числе перемен знака в последовательности $\{Z[g_\nu(\tau)+\omega\bar{h}]\}$. (Формулировка результата)

В настоящей работе мы используем обозначения из мемуара А. Сельберга [2] и работы [9].

Напомним, что Теорема С А. Сельберга, (см. [2], стр. 49), в случае промежутка $\langle T, T+U\rangle$, $U=T^{1/2+\varepsilon}$, (см. [9], (2)), утверждает следующее: мера множества тех значений $t\in\langle T, T+U\rangle$, для которых промежуток

$$(1)\qquad \left(t,\ t+\frac{\psi(t)}{\ln t}\right),\quad 0<\psi(t)<\sqrt{\ln t},$$

содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, есть $\sim U$, при $T\to\infty$, (см. [2], стр. 49, первые три строки доказательства; здесь $\psi(t)$-любая, возрастающая к ∞ функция при $t\to\infty$).

Следовательно, мера тех значений $t\in\langle T, T+U\rangle$, для которых промежуток (1) не содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$, есть о (U).

Далее заметим, что (см. [8], (46))

$$g_{\nu+1}(\tau)-g_\nu(\tau)\sim\frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}=\omega,$$

для $g_\nu(\tau)$, $g_{\nu+1}(\tau)\in\langle T, T+U\rangle$, т.е. отрезок последовательности $\{g_\nu(\tau)\}$ входящий в промежуток $\langle T, T+U\rangle$, является почтиарифметическим отрезком для любого но фиксированного значения $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$. При этом, в работах [7]—[9], мы неоднократно убедились в закономерном поведении совокупности значений функции $Z^2(t)$, относительно соответствующего отрезка последовательности $\{g_\nu(\tau)\}$.

В силу сказанного кажется весьма желательным получить теорему типа Теоремы С А. Сельберга, для бесконечного семейства отрезков последовательностей $\{g_\nu(\tau)\}$, входящих в промежуток $\langle T, T+U \rangle$. Мы покажем, что такая теорема действительно имеет место.

Прежде всего заметим, что аргументы членов последовательности

$$\{Z[g_\nu(\tau) + \omega \bar{h}]\}_{\bar{h}=1}^{\bar{H}_1}, \quad \bar{H}_1 = \left[\frac{1}{2\pi}\psi(T)\right], \tag{2}$$

где $g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle$, входят в промежуток

$$\left(g_\nu(\tau), g_\nu(\tau) + \frac{\psi[g_\nu(\tau)]}{\ln g_\nu}\right).$$

Пусть

$$\alpha_1 < \left[\frac{\psi(T)}{2\pi}\right] \leqq \alpha_2 \sqrt{\ln P_0}, \tag{3}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{10}{\pi\varepsilon}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}\alpha_1}. \tag{4}$$

Пусть $G_1(T, U, \psi, \tau)$ обозначает количество таких значений $g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle$, при любом но фиксированном значений $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, для которых последовательность (2) меняет знак.

Имеет место

Теорема 1.

$$G_1(T, U, \psi, \tau) \sim \frac{1}{\pi} U \ln T, \; T \to \infty, \tag{5}$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, т.е. количество таких значений $g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle$ (при любом но фиксированном $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$), для которых последовательность (2) сохраняет знак, есть $o(U \ln T)$.

В связи с асимптотическим соотношением (5) напомним, что

$$Q_1(\tau) = \sum_{T \leqq g_\nu(\tau) \leqq T+U} 1 = \frac{1}{\pi} U \ln T + O(T^{2\varepsilon}), \tag{6}$$

(см. [8], (46), $U_2(T_0) \to U$, $g_\nu(0) = g_\nu$). Пусть $N(T)$ обозначает количество нулей функции $\zeta(s)$, $s = \sigma + \mathrm{i}t$, попадающих в прямоугольник $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$. Конечно,

$$N(T+U) - N(T) \sim \frac{1}{2\pi} U \ln T, \; T \to \infty \,. \tag{7}$$

Соотношение (5) не противоречит соотношению (7), так как многие из промежутков $\langle g_\nu(\tau) + \omega, \, g_\nu(\tau) + \omega \bar{H}_1 \rangle$, (см. (2)), пересекаются.

2. Обобщенный закон Грама как дискретная основа для Теоремы А Атле Сельберга о плотности нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)$.

(Формулировка результатов)

Пусть

$$H_1 \in \langle \alpha_1, \, \alpha_2 \sqrt{\ln P_0} \rangle \tag{8}$$

и H_1-целое число. Происхождение промежутка (8) такое: полагаем

$$\omega = \frac{\pi}{2 \ln P_0}, \quad H_1 \omega = H, \quad \xi = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\varepsilon/10} = P_0^{\varepsilon/5}, \quad \varepsilon \leqq \frac{1}{10}, \tag{9}$$

(см. [9], (2)) и предполагаем, что H удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\ln \xi} \leqq H \leqq \frac{1}{\sqrt{\ln \xi}}, \tag{10}$$

(см. [2], стр. 18).

Определение. Промежуток

$$\langle g_\nu(\tau) + (k(\nu, \tau) - 1)\omega, \quad g_\nu(\tau) + k(\nu, \tau)\omega \rangle ,$$

где

$$g_\nu(\tau) \in \langle T, \, T + U \rangle, \quad 1 \leqq k(\nu, \tau) \leqq H_1$$

и $k(\nu, \tau)$ - целое число, назовем правильным промежутком, (ср. [3], [6], [7]), если

$$Z(g_\nu(\tau) + (k(\nu, \tau) - 1)\omega) \cdot Z(g_\nu(\tau) + k(\nu, \tau)\omega) < 0 \,. \tag{11}$$

Пусть $G_2(T, \, U, \, H_1, \, \tau)$ обозначает количество не пересекающихся правильных промежутков, входящих в промежуток $\langle T, \, T + U \rangle$. Имеет место.

Теорема 2. Существуют постоянные $\bar{H}_1 \in \langle \alpha_1, \, \alpha_2 \sqrt{\ln P_0} \rangle$, $A(\varepsilon) > 0$, $T_0(\varepsilon) > 0$ такие, что

(12) $$G_3(T, U, \tau) > A(\varepsilon)U\ln T, \quad T \geqq T_0(\varepsilon),$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$, где $G_3(T, U, \tau) = G_2(T, U, \bar{H}_1, \tau)$.

Замечание 1. Так как конечно, $G_3(T, U, \tau) < AU\ln T$, то величина $G_3(T, U, \tau)$ — порядка $U\ln T$, для любого но фиксированного значения $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$. Это свойство мы назовем обобщенным законом Грама для семейства последовательностей $\{g_\nu(\tau)\}$.

Пусть $N_0(T)$ обозначает количество нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, $t \in (0, T)$. Так как правильный промежуток содержит нуль нечетного порядка функции $Z(t)$, (см. (11)), который является нулем того же порядка для функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, то из (12), при любом но фиксированом $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$, получаем

Следствие.

$$N_0(T + T^{1/2+\varepsilon}) - N_0(T) > A(\varepsilon)T^{1/2+\varepsilon}\ln T,$$

(см. [2], стр. 46, Теорема A Атле Сельберга, $a = 1/2 + \varepsilon$).

Замечание 2. Итак, обобщенный закон Грама есть дискретная основа Теоремы A Атле Сельберга.

Все изложенное ниже представляет собой дискретный комментарий к доказательствам теорем A и C A. Селберга (см. [2], стр. 6—49).

3. Основные вспомогательные утверждения

Пусть, (ср. [2], стр. 18),

(13) $$\eta = \eta(t) = \sum_{\bar{\nu}_1 < \xi} \beta_{\bar{\nu}_1} \cdot \nu_1^{-1/2 - it},$$

(14) $$I = I(g_\nu(\tau), H_1) = \sum_{\bar{h}=1}^{H_1} Z(g_\nu(\tau) + \omega\bar{h})\,|\eta(g_\nu(\tau) + \omega\bar{h})|^2 =$$

$$= \sum_{\bar{h}=1}^{H_1} Z(g_\nu(\tau) + \omega\bar{h})\,|\eta_h|^2, \; h = \omega\bar{h},$$

(15) $$I_1 = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} I^2 =$$

$$= \sum_{\bar{h}=1}^{H_1} \sum_{\bar{k}=1}^{H_1} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} Z(g_\nu(\tau) + \omega\bar{h}) Z(g_\nu(\tau) + \omega\bar{k})\,|\eta_h \eta_k|^2.$$

Имеет место, (ср. [2], стр. 18, Лемма 15),

Лемма А.

$$I_1 = O(UH_1^{3/2}\ln T), \tag{16}$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Пусть

$$M = M(g_\nu(\tau), H_1) = \sum_{\bar{h}=1}^{H_1} \left\{ \zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}(g_\nu(\tau) + \omega\bar{h})\right)\eta_h^2 - 1 \right\}, \tag{17}$$

$$M_1 = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} |M|^2 = \sum_{\bar{h}=1}^{H_1} \sum_{\bar{k}=1}^{H_1} W_1 \equiv \mathrm{Re}\left\{ \sum_{\bar{h}=1}^{H_1} \sum_{\bar{k}=1}^{H_1} W_1 \right\}, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} W_1 = & \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}(g_\nu(\tau) + h)\right) \bar{\zeta}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}(g_\nu(\tau) + k)\right) \eta_h^2 \bar{\eta}_k^2 - \\ & - \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}(g_\nu(\tau) + h)\right) \eta_h^2 - \\ & - \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \bar{\zeta}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}(g_\nu(\tau) + k)\right) \bar{\eta}_k^2 + \\ & + \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} 1 = W_2 - W_3 - W_4 + Q_1, \end{aligned} \tag{19}$$

($Q_1 = Q_1(0)$, см. (6)). Имеет место, (ср. [2], стр. 35),

Лемма Б.

$$M_1 = O(UH_1^{3/2}\ln T), \tag{20}$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Из (16), в силу (6), получаем

$$\frac{I_1}{Q_1 H_1^2} = \frac{1}{Q_1} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \left\{ \frac{1}{H_1} \sum_{\bar{h}=1}^{H_1} Z(g_\nu(\tau) + h)|\eta_h|^2 \right\}^2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{H_1}}\right),$$

т.е. среднее арифметическое значений $Z(g_\nu(\tau) + h)|\eta_h|^2$ уменьшается (по абсолютному значению) в среднем, если H_1 возрастает. Значит, для дискретной совокупности

$$Z(g_\nu(\tau) + h)|\eta_h|^2; \quad T \leqq g_\nu \leqq T + U, \quad \bar{h} = 1, \ldots, H_1, \quad (h = \omega\bar{h}), \tag{21}$$

имеет место явление Г. Х. Харди—Д. Е. Литтлвуда, (ср. [1], стр. 315).

В силу этого явления кажется весьма вероятным, что дискретная совокупность (21) содержит информацию о нулях нечетного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)$.

4. Завершение доказательства теоремы 2

В этой части мы завершим доказательство теоремы 2 с помощью леммы А и Б.

Положим

$$J = J(g_\nu(\tau)) = \sum_{\bar{h}=1}^{H_1} |Z(g_\nu(\tau) + h)||\eta_h|^2. \tag{22}$$

Пусть $S(\tau)$ обозначает количество таких $\bar{g}_\nu \in \langle T, T + U\rangle$, для которых имеет место

$$|I(\bar{g}_\nu(\tau))| = J(\bar{g}_\nu(\tau)), \tag{23}$$

(относительно I см. (14)). Ясно, что для $\bar{g}_\nu(\tau)$, значения

$$Z(\bar{g}_\nu(\tau) + h), \quad \bar{h} = 1, \ldots, H_1$$

сохраняют знак. Имеем,

$$\sum_{T \leqq \bar{g}_\nu \leqq T+U} |I| = \sum_{T \leqq \bar{g}_\nu \leqq T+U} J. \tag{24}$$

Далее, (см. (15), (16)),

$$\sum_{\bar{g}_\nu} |I| \leqq \sqrt{S(\tau)} \left(\sum_{\bar{g}_\nu} I^2\right)^{1/2} \leqq \sqrt{S(\tau)} \left(\sum_{g_\nu} I^2\right)^{1/2} < A(S(\tau)\, U H_1^{3/2} \ln T)^{1/2}, \tag{25}$$

и, (см. (17), (22)),

$$J = \sum_{\bar{h}=1}^{H_1} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,(g_\nu(\tau) + h)\right) \eta_h^2 \right| \geqq$$

$$\geqq \left| \sum_{\bar{h}=1}^{H_1} \zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,(g_\nu(\tau) + h)\right) \eta_h^2 \right| = |M + H_1| \geqq H_1 - |M|.$$

Теперь, (см. (20)),

$$\sum_{\bar{g}_\nu} J \geqq H_1 S(\tau) - \sum_{\bar{g}_\nu} |M| \geqq H_1 S(\tau) - \sqrt{S(\tau)} \left(\sum_{g_\nu} |M|^2\right)^{1/2} \geqq \tag{26}$$

$$\geqq H_1 S(\tau) - (S(\tau) M_1)^{1/2} > H_1 S(\tau) - A(S(\tau)\, U H_1^{3/2} \ln T)^{1/2}.$$

Следовательно, (см. (24)—(26)),

$$H_1 S(\tau) < A(S(\tau)\, U H_1^{3/2} \ln T)^{1/2},$$

т.е.

$$S(\tau) < A\frac{U\ln T}{\sqrt{H_1}}, \tag{27}$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Подразделим количество $Q_1(\tau)$ (см. (6)) значений $g_\nu(\tau) \in \langle T, T + U \rangle$, на

$$\left[\frac{Q_1(\tau)}{2H_1}\right]$$

пар примыкающих друг к другу ячеек j_1, j_2 имеющих (кроме, быть может последней из j_2) длину H_1. Пусть $\mu(\tau)$ — числс ячеек j_1 состоящих только из точек $\bar{g}_\nu(\tau)$. В силу (27) мы имеем

$$\mu(\tau)H_1 < A\frac{U\ln T}{\sqrt{H_1}},$$

т.е.

$$\mu(\tau) < A\frac{U\ln T}{H_1^{3/2}}, \tag{28}$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Следовательно, (см. (6), (28)),

$$\left[\frac{Q_1(\tau)}{2H_1}\right] - \mu(\tau) > A_1\frac{U\ln \mathrm{T}}{\mathrm{H}_1} - A_2\frac{T^{2\varepsilon}}{H_1} - A_3\frac{U\ln \mathrm{T}}{\mathrm{H}_1^{3/2}} = \tag{29}$$

$$= \frac{1}{H_1}\left(A_1 - \frac{A_2}{T^{1/2-\varepsilon}\ln T} - \frac{A_3}{\sqrt{H_1}}\right)U\ln T > A(\varepsilon)\,U\ln T,\ A(\varepsilon) > 0,$$

если $H_1 = \bar{H}_1$ — достаточно большое положительное число $\in \langle \alpha_1, \alpha_2\sqrt{\ln P_0} \rangle$. Неравенство (29) дает оценку снизу для количества таких j_1, что каждая из них содержит хотя бы одну точку $g_\nu(\tau)$, для которой

$$|I(g_\nu(\tau))| \neq J(g_\nu(\tau)),$$

(см. (14), (22)). Для такой точки значения

$$Z(g_\nu(\tau) + h), \qquad \bar{h} = 1, \dots, \bar{H}_1$$

меняют знак, т.е. существует $k(\nu, \tau) \in \langle 1, \bar{H}_1 \rangle$, $k(\nu, \tau)$ — целое, для которого имеет место (11). Так как непересекающихся ячеек такого рода не менее чем $A(\varepsilon)U\ln T$, (см. (29)), то теорема 2 доказана.

5. Завершение доказательства теоремы 1

В этой части мы завершим доказательство теоремы 1 на основе неравенства (27), которое, в свою очередь, является следствием из леммы А и Б.

Так как

$$\frac{\psi(g_\nu(\tau))}{\ln g_\nu(\tau)} \geqq \frac{\psi(T)}{\ln 2T}, \quad g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle,$$

и, (см. (3), (9)),

$$\frac{\psi(T)}{\omega \ln 2\mathrm{T}} \sim \frac{1}{\pi}\psi(T) > \frac{1}{2\pi}\psi(T) \geqq \left[\frac{1}{2\pi}\psi(T)\right] = \bar{\bar{H}}_1,$$

то

$$\omega \bar{\bar{H}}_1 < \frac{\psi(g_\nu(\tau))}{\ln g_\nu(\tau)}, \quad g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle.$$

Полагая в (27) $H_1 = \bar{\bar{H}}_1$ получаем, что $\bar{S}(\tau) = o(U \ln T)$, где $\bar{S}(\tau)$ — число точек $g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle$, для которых значения

$$Z(g_\nu(\tau) + h); \quad \bar{h} = 1, \ldots, \bar{\bar{H}}_1, \quad h = \omega \bar{h}$$

сохраняют знак, (см. (23)). Однако, для количества всех $g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle$ имеет место асимптотическое соотношение (6). Отсюда следует утверждение теоремы 1.

6. Дальнейшие вспомогательные утверждения

6.1. Имеет место

Лемма 1. Если

(30)
$$x = \pi + R, \quad 0 \leqq R \leqq \varepsilon,$$

то

(31)
$$\sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m)\frac{\sin x m}{m} = O(H_1).$$

Доказательство. Так как $\pi \leqq x \leqq \pi + \varepsilon$, то

$$\sum_{m=1}^{L} \sin x m = O\left(\frac{1}{\sin \frac{x}{2}}\right) = O(1), \quad L \leqq H_1.$$

Применяя преобразование Абеля к сумме

$$\sum_{m=1}^{H_1} \left(\frac{H_1}{m} - 1\right) \sin x m,$$

(последовательность $\{H/m - 1\}$ убывает), получаем (31). Доказателство закончено.

Соотношения (30) получаются так. Положим, (ср. [2], стр. 43),

$$x = \omega \ln \frac{P_0^2 \varrho}{d}, \quad 1 \leqq \varrho < \xi^2, \quad d \mid \varrho .$$

Следовательно, (см. (9)),

$$x = 2\left(1 + \frac{\ln \frac{\varrho}{d}}{2 \ln P_0}\right) \omega \ln P_0 = \pi \left(1 + \frac{\ln \frac{\varrho}{d}}{2 \ln P_0}\right) = \pi + R,$$

$$0 \leqq R < \pi \frac{\ln \varrho}{2 \ln P_0} < \frac{\pi \varepsilon}{5} < \varepsilon .$$

6.2. Имеет место

Лемма 2.

$$\sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) \cos ym = \begin{cases} O(H_1^2), & \omega \ln 2 \leqq y < \sqrt{\dfrac{\omega \ln \xi}{H_1}}, \\ O(H_1), & \sqrt{\dfrac{\omega \ln \xi}{H_1}} \leqq y < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{32}$$

Доказательство. Используем формулу, (см. [5], стр. 44),

$$\sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) \cos ym = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} H_1 y\right)}{2 \sin^2 \frac{1}{2} y} - \frac{1}{2} H_1 = E(y) - \frac{1}{2} H_1 . \tag{33}$$

Так как, $(y/2 < \pi/4 < 1)$,

$$\sin^2 \frac{1}{2} y > \frac{y^2}{8} > \frac{\omega \ln \xi}{8 H_1} = \frac{\pi \varepsilon}{80 H_1},$$

то

$$E(y) = \begin{cases} O(H_1^2), & \omega \ln 2 \leqq y < \sqrt{\dfrac{\omega \ln \xi}{H_1}}, \\ O(H_1), & \sqrt{\dfrac{\omega \ln \xi}{H_1}} < y < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{34}$$

Теперь (32) следует из (33), (34).

6.3. Имеет место

Лемма 3. Если $K(x)$ — четная функция, то

$$\sum_{\bar{h}=1}^{H_1}\sum_{\bar{k}=1}^{H_1} K\{\omega(\bar{h}-\bar{k})\} = H_1 K(0) + 2\sum_{m=1}^{H_1}(H_1 - m)K(\omega m). \tag{35}$$

Доказательство. Прежде всего

$$\sum_{\bar{h}=1}^{H_1}\sum_{\bar{k}=1}^{H_1} K\{\omega(\bar{h}-\bar{k})\} = H_1 K(0) + 2\sum\sum_{1\leq \bar{k}<\bar{h}\leq H_1} K\{\omega(\bar{h}-\bar{k})\}.$$

Равенство $\bar{h}-\bar{k}=m$, при фиксированном $m\in\langle 1, H_1\rangle$, имеет место для $H_1 - m$ пар $(\bar{k}, \bar{h})$. Отсюда следует (35).

7. Доказательство леммы А

7.1. Исходим из формул, (см. [9], (39)),

$$Z(t) = Y(t) + \bar{Y}(t) + O(T^{-3/20}),$$

$$Y(t) = \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{\mathrm{i}t/2} e^{-\mathrm{i}\pi/8}\sum_{n<P_0} n^{-1/2-\mathrm{i}t},$$

для $t\in\langle T, T+U\rangle$. Так как, (ср. [2], стр. 10),

$$(t+h)^{\mathrm{i}(t+h)} = e^{\mathrm{i}h}t^{\mathrm{i}(t+h)} + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

то

$$Y(t+h) = e^{\mathrm{i}\frac{h}{2}-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{\mathrm{i}\frac{t+h}{2}}\sum_{n<P_0} n^{-1/2-\mathrm{i}(t+h)}. \tag{36}$$

Следовательно,

$$Z(g_\nu(\tau)+h) = Y_h + \bar{Y}_h + O(T^{-3/20}),$$

где

$$Y_h = Y(g_\nu(\tau)+h),\quad h=\omega\bar{h},\quad \bar{h}=1,\dots,H_1$$

и $g_\nu(\tau)\in\langle T, T+U\rangle$. Далее, (см. (13)),

$$\eta_h = \eta(g_\nu(\tau)+h) = \sum_{\bar{\nu}_1<\xi}\beta_{\bar{\nu}_1}\cdot \bar{\nu}_1^{-1/2-\mathrm{i}(g_\nu(\tau)+h)}.$$

Теперь, (ср. [2], стр. 18),

$$(37)\qquad Z(g_\nu(\tau)+h)\,Z(g_\nu(\tau)+k)\,|\eta_h\eta_k|^2=$$

$$=Y_hY_k|\eta_h\eta_k|^2+\bar{Y}_h\bar{Y}_k|\eta_h\eta_k|^2+Y_h\bar{Y}_k|\eta_h\eta_k|^2+$$

$$+\bar{Y}_hY_k|\eta_h\eta_k|^2+O\left(T^{-3/20}\xi^2\left|\sum_{n<P_0}n^{-1/2-\mathrm{i}(g_\nu(\tau)+h)}\right|\right)+$$

$$+O\left(T^{-3/20}\xi^2\left|\sum_{n<P_0}n^{-1/2-\mathrm{i}(g_\nu(\tau)+k)}\right|\right)+O(T^{-3/10}\xi^2)=$$

$$=P+\bar{P}+Q+\bar{Q}+R_1+R_2+R_3,$$

где

$$k=\omega\bar{k},\quad \bar{k}=1,\ldots,H_1\quad \text{и}\quad |\eta|<\sqrt{\xi}.$$

Очевидно, (см. (6)),

$$(38)\qquad \sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U}R_3=O(U\ln T\cdot T^{-3/20}\xi^2)=O(T^{1/2}\xi^2\ln T),$$

и, (ср. [9], часть 7.6),

$$(39)\qquad \sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U}R_1=O\left(T^{-3/20}\xi^2\sqrt{U\ln T}\cdot\left\{\sum_{g_\nu}\left|\sum_n n^{-1/2-\mathrm{i}(g_\nu(\tau)+h)}\right|^2\right\}^{1/2}\right)=$$

$$=O(T^{-3/20}\xi^2\cdot U(\ln T)^{3/2})=O(T^{1/2}\xi^2\ln T).$$

Аналогичным образом получаем оценку

$$(40)\qquad \sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U}R_2=O(T^{1/2}\xi^2\ln T).$$

7.2. Вместо [2], стр. 19, (4.8) мы имеем, (см. (37)),

$$\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U}P=\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U}Y_hY_k|\eta_h\eta_k|^2=$$

$$=\sum_{\bar{\nu}<\xi}\frac{\beta_{\bar{\nu}_1}\beta_{\bar{\nu}_2}\beta_{\bar{\nu}_3}\beta_{\bar{\nu}_4}}{(\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4)^{1/2}}\left(\frac{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3}{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_4}\right)^{\mathrm{i}\frac{h-k}{2}}\cdot\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U}Y_hY_k\left(\frac{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_4}{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_3}\right)^{\mathrm{i}\left(g_\nu(\tau)+\frac{h+k}{2}\right)}.$$

Итак, мы должны исследовать сумму

$$\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U}Y_hY_k\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}\left(g_\nu(\tau)+\frac{h+k}{2}\right)}=P_1,$$

где $(\mu_1,\mu_2)=1$, $\mu_1,\mu_2<\xi^2$. В силу (36), (ср. [2], стр. 20, (4.9)), имеем

$$P_1 = e^{\mathrm{i}\frac{h+k}{2} - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \sum_{m,n<P_0}\sum \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\mathrm{i}\frac{h-k}{2}}}{\sqrt{mn}} P_2,$$

где

$$P_2 = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \left(\frac{g_\nu(\tau)}{e\,\alpha}\right)^{\mathrm{i}\left(g_\nu(\tau) + \frac{h+k}{2}\right)}, \quad \alpha = \frac{2\pi m n \mu_1}{\mu_2}.$$

Для изучения суммы P_2 мы применим лемму 3 из работы[9]. В случае $\alpha \leqq 3\pi$, т.е.

$$mn < \frac{3\mu_2}{2\mu_1} < \mu_2 < 2\xi^2,$$

имеем $P_2 = O(T^{2\varepsilon})$. Далее,

$$\sum_{m,n<2\xi^2}\sum 1 = O(\xi^4).$$

Следовательно,

(41) $$P_1 = O(\xi^4 T^{2\varepsilon}).$$

Учитывая (41) и применяя лемму 3 из работы [9] в случае $\alpha \geqq 3\pi$, то, способом [2], стр. 20—24, окончательно получаем соотношение

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \mathrm{P} = \frac{2}{\pi} \mathrm{U}\, \mathrm{P}_0^{-i(\mathrm{h}-\mathrm{k})} \ln P_0 \,\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{\bar{\nu}<\xi \\ \bar{\nu}_2\bar{\nu}_4 < \bar{\nu}_1\bar{\nu}_3}} \frac{\beta_{\bar{\nu}_1}\beta_{\bar{\nu}_2}\beta_{\bar{\nu}_3}\beta_{\bar{\nu}_4}}{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4} \cdot \frac{\varkappa^{1-\mathrm{i}(h-k)}}{(\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3)^{-\mathrm{i}(h-k)}} \cdot \sum_{\frac{P_0\varkappa}{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_3} < n < \frac{P_0\varkappa}{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_4}} n^{-1+\mathrm{i}(h-k)} + O(T^{1/2}\xi^4 \ln T),$$

где, (см. [2], стр. 23),

$$\varkappa = (\bar{\nu}_1\bar{\nu}_3,\ \bar{\nu}_2\bar{\nu}_4), \quad \mu_1 = \frac{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_3}{\varkappa}, \quad \mu_2 = \frac{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_4}{\varkappa}.$$

Следовательно, (ср. [2], стр. 24),

(42) $$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} (P + \bar{P}) = \frac{4}{\pi} U \ln P_0 \cdot \mathrm{Re}\Bigg(P_0^{\mathrm{i}(h-k)} \,\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{\bar{\nu}<\xi \\ \bar{\nu}_2\bar{\nu}_4 < \bar{\nu}_1\bar{\nu}_3}} \frac{\beta_{\bar{\nu}_1}\beta_{\bar{\nu}_2}\beta_{\bar{\nu}_3}\beta_{\bar{\nu}_4}}{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4} \cdot \frac{\varkappa^{1+\mathrm{i}(h-k)}}{(\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3)^{\mathrm{i}(h-k)}} \cdot \sum_{\frac{P_0\varkappa}{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_3} < n < \frac{P_0\varkappa}{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_4}} n^{-1-\mathrm{i}(h-k)} \Bigg) + O(T^{1/2}\xi^4 \ln \mathrm{T}).$$

7.3. Вместо [2], стр. 24, (4.16), мы имеем, (см. (37)),

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} Q = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} Y_h \bar{Y}_k |\eta_h \eta_k|^2 =$$

$$= \sum_{\bar{\nu} < \xi} \frac{\beta_{\bar{\nu}_1}\beta_{\bar{\nu}_2}\beta_{\bar{\nu}_3}\beta_{\bar{\nu}_4}}{(\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4)^{1/2}} \left(\frac{\bar{\nu}_2}{\bar{\nu}_1}\right)^{\mathrm{i}k} \left(\frac{\bar{\nu}_4}{\bar{\nu}_3}\right)^{\mathrm{i}h} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} Y_h \bar{Y}_k \left(\frac{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_4}{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_3}\right)^{\mathrm{i}g_\nu(\tau)}.$$

Применяя лемму 4 из работы [9] и [2], стр. 6, Лемма 1, получаем

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} Y_h \bar{Y}_k \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}g_\nu(\tau)} = \tag{43}$$

$$= \sum_{m,n < P_0}\sum \frac{m^{-\mathrm{i}h} n^{\mathrm{i}k}}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \left(\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}\right)^{\mathrm{i}\frac{h-k}{2}} \left(\frac{n\mu_2}{m\mu_1}\right)^{\mathrm{i}g_\nu(\tau)} = O(T^{1/2}\xi^5 \ln T),$$

для $n\mu_2 \neq m\mu_1$, (ср. [2], стр. 25). Далее, так как

$$\ln\frac{g_\nu(\tau)}{T} = O\left(\frac{U}{T}\right), \quad g_\nu \in \langle T, T+U\rangle,$$

то

$$\left(\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}\right)^{\mathrm{i}\frac{h-k}{2}} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\mathrm{i}\frac{h-k}{2}} + O\left(\frac{U}{T}\right) = P_0^{\mathrm{i}(h-k)} + O\left(\frac{U}{T}\right),$$

и, (см. (6), $\tau = 0$ и внутреннюю сумму в (43) в случае $n\mu_2 = m\mu_1$),

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \left(\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}\right)^{\mathrm{i}\frac{h-k}{2}} = P_0^{\mathrm{i}(h-k)} Q_1 + O\left(\frac{U}{T}\cdot Q_1\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} U P_0^{\mathrm{i}(h-k)} \ln P_0 + O(T^{1/2}\xi^5 \ln T).$$

Следовательно, способом [2], стр. 25—26, получаем

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} (Q + \bar{Q}) = \frac{4}{\pi} U \ln P_0 \cdot \mathrm{Re}\left\{ P_0^{\mathrm{i}(h-k)} \cdot \right. \tag{44}$$

$$\cdot \sum_{\substack{\bar{\nu} < \xi \\ \bar{\nu}_1\bar{\nu}_3 \leqq \bar{\nu}_2\bar{\nu}_4}} \frac{\beta_{\bar{\nu}_1}\beta_{\bar{\nu}_2}\beta_{\bar{\nu}_3}\beta_{\bar{\nu}_4}}{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4} \cdot \frac{\varkappa^{1+\mathrm{i}(h-k)}}{(\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3)^{\mathrm{i}(h-k)}} \sum_{n < \frac{P_0 \varkappa}{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_4}} n^{-1-\mathrm{i}(h-k)} +$$

$$+ P_0^{i(h-k)} \sum_{\substack{\bar\nu<\xi \\ \bar\nu_2\bar\nu_4<\bar\nu_1\bar\nu_3}} \frac{\beta_{\bar\nu_1}\beta_{\bar\nu_2}\beta_{\bar\nu_3}\beta_{\bar\nu_4}}{\bar\nu_1\bar\nu_2\bar\nu_3\bar\nu_4} \cdot \frac{\varkappa^{1+i(h-k)}}{(\bar\nu_2\bar\nu_3)^{i(h-k)}} \sum_{n<\frac{P_0\varkappa}{\bar\nu_1\bar\nu_3}} n^{-1-i(h-k)} \Bigg\} + O(T^{1/2}\xi^7 \ln T).$$

Наконец, (см. (37)—(40), (42), (44)), способом [2], стр. 26, получаем соотношение

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} Z(g_\nu(\tau)+k) Z(g_\nu(\tau)+h) |\eta_h \eta_k|^2 =$$

$$= \frac{4}{\pi} K(h-k) U \ln P_0 + O(T^{1/2}\xi^7 \ln T), \quad h-k = \omega(\bar h - \bar k),$$

где

(45) $$K(\gamma) = \mathrm{Re}\left\{ P_0^{i\gamma} \sum_{\bar\nu<\xi} \frac{\beta_{\bar\nu_1}\beta_{\bar\nu_2}\beta_{\bar\nu_3}\beta_{\bar\nu_4}}{\bar\nu_1\bar\nu_2\bar\nu_3\bar\nu_4} \cdot \frac{\varkappa^{-1+i\gamma}}{(\bar\nu_2\bar\nu_3)^{i\gamma}} \sum_{n<\frac{P_0\varkappa}{\bar\nu_2\bar\nu_4}} n^{-1-i\gamma} \right\}$$

(ср. [2], стр. 26, (4.21), (4.22)).

7.4. Пользуясь леммой 3, (см. также (15)), получаем

(46) $$I_1 = \frac{8}{\pi} U \ln P_0 \cdot \sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) K(\omega m) + \frac{4}{\pi} U H_1 K(0) \ln P_0 + $$
$$+ O(T^{1/2}\xi^7 H_1^2 \ln T),$$

где, (см. (3), (4), (8), (9)),

(47) $$O(T^{1/2}\xi^7 H_1^2 \ln T) = O(T^{1/2+7\varepsilon/10} \ln^2 T) = O(U H_1^{3/2} \ln T).$$

Так как, (см. [2], стр. 27—31; (4.37)),

$$K(\gamma) = O(1), \quad 0 < \gamma < \frac{1}{\ln \xi}$$

и $K(\gamma)$ — непрерывная функция в точке $\gamma = 0$, то

(48) $$K(0) = O(1).$$

Далее, способом [2], стр. 31—33, получаем

$$K(\gamma) = K(\omega m) = \frac{1}{(\ln \xi)^4} \sum_{\varrho<\xi^2} \mathrm{Im}\Bigg\{ c_2^2 P_0^{i\omega m} \varrho^{1+i\omega m} \cdot$$
$$\cdot \Bigg(\sum_{\substack{\varrho | d_1 d_3 \\ d<\xi}} \frac{\alpha_{d_1}\alpha_{d_3}}{d_1 d_3^{1+i\omega m}} S_{\varrho, d_1} \ln \frac{\xi}{d_3} \Bigg)^2 \Bigg\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right),$$

(конечно, $\gamma \ln \xi = m\omega \ln \xi = mA$, A— постоянная), для

$$0 < \gamma \leqq H,$$

(см. [2], стр. 33, (4.40) и несколько строк ниже), т.е. для

$$1 \leqq m \leqq \frac{H}{\omega} = H_1,$$

(см. (9), (10)). Теперь, (ср. [2], стр. 33, (4.41)),

$$\sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m)K(\omega m) = \frac{1}{(\ln \xi)^4} \sum_{\varrho < \xi^2} P_3 + O\left(H_1 \sum_{m=1}^{H_1} \frac{1}{\sqrt{m}}\right), \tag{49}$$

где

$$P_3 = \sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) \operatorname{Im} \left\{ c_2^2 P_0^{im\omega} \varrho^{1+i\omega m} \cdot \left(\sum_{\substack{\varrho | d_1 d_3 \\ d < \xi}} \frac{\alpha_{d_1} \alpha_{d_3}}{d_1 d_3^{1+i\omega m}} S_{\varrho, d_1} \ln \frac{\xi}{d_3} \right)^2 \right\},$$

(c_2 — постоянная). Так как d_3, $d_4 < \xi$, $\varrho < \xi^2$ (см. [2], стр. 33) и $\xi = P_0^{\varepsilon/5}$, то

$$P_0 \xi^{-2} < \frac{P_0 \varrho}{d_3 d_4} < P_0 \xi^2$$

и (см. (9))

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2\varepsilon}{5}\right) < \omega \ln \frac{P_0 \varrho}{d_3 d_4} < \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2\varepsilon}{5}\right).$$

Значит,

$$\sum_{m=1}^{L} \left(\frac{P_0 \varrho}{d_3 d_4}\right)^{i\omega m} = O\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{2} \ln \frac{P_0 \varrho}{d_3 d_4}\right)}\right) = O(1), \quad L \leqq H_1,$$

и, пользуясь преобразованием Абеля,

$$\sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) \left(\frac{P_0 \varrho}{d_3 d_4}\right)^{i\omega m} = O(H_1).$$

Теперь, (ср. [2], стр. 34, см. (4.29), 4.38)),

$$|P_3| < \left| c_2^2 \varrho \sum_{\substack{\varrho | d_1 d_3 \\ d < \xi}} \sum_{\substack{\varrho | d_2 d_4 \\ d < \xi}} \frac{\alpha_{d_1}\alpha_{d_2}\alpha_{d_3}\alpha_{d_4}}{d_1 d_2 d_3 d_4} S_{\varrho, d_1} S_{\varrho, d_2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \ln\frac{\xi}{d_3} \ln\frac{\xi}{d_4} \sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m)\left(\frac{P_0 \varrho}{d_3 d_4}\right)^{i\omega m} \right| =$$

$$= O\left(\varrho \cdot \frac{1}{\varrho^2} \prod_{p|\varrho} (1 + p^{-3/4})^2 \cdot \prod_{p|\varrho} (1 + p^{-3/4})^2 \ln \xi \cdot \ln^2 \xi \cdot H_1\right) =$$

$$= O\left(H_1 \ln^3 \xi \cdot \frac{1}{\varrho} \prod_{p|\varrho} (1 + p^{-3/4})^7\right).$$

Подставляя это в (49), используя [2], (4.31), получаем

$$(50) \quad \sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) K(\omega m) = O\left(\frac{1}{\ln^4 \xi} \cdot H_1 \ln^3 \xi \cdot \ln \xi\right) + O(H_1^{3/2}) = O(H_1^{3/2}).$$

Следовательно, в силу (46)—(48), (50), получаем (16).

8. Доказательство леммы Б

8.1. По Лемме 4 из [2], стр. 9, получаем

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i(g_\nu(\tau) + \omega \bar{h})\right) = \sum_{n < 2T} n^{-1/2 - i(g_\nu(\tau) + \omega \bar{h})} + O(T^{1/2}).$$

Следовательно, (см. (6), (13), (19)),

$$W_3 = \sum_{\bar{\nu} < \xi} \frac{\beta_{\bar{\nu}_1}\beta_{\bar{\nu}_2}}{\sqrt{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2}} \sum_{n < 2T} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{T \leq g_\nu \leq T + U} (n \bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2)^{-i(g_\nu(\tau) + \omega \bar{h})} +$$

$$+ O\left(\frac{U \xi \ln T}{\sqrt{T}}\right) = W_{31} + O(T_{1/2} \xi \ln T),$$

(при оценке остаточного члена учтено, что $|\eta| < A\sqrt{\xi}$, (см. [2], стр. 18).

Далее положим,

$$(51) \qquad W_{311} = \sum_{T \leq g_\nu \leq T + U} e^{-2\pi i f(\nu)},$$

где

$$f(\nu) = f(\nu; \tau) = \frac{1}{2\pi}(g_\nu(\tau) + \omega \bar{h}) \ln (n \bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2),$$

(52)
$$f'(\nu) = \frac{\ln(n\,\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2)}{2\ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}.$$

В случае $\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2 \geqq 2$ имеем

(53)
$$\frac{A}{\ln T} < f'(\nu) < \frac{\ln(2T\xi^2)}{2\ln\frac{T}{2\pi}} < \frac{3}{4}, \quad f''(\nu) < 0.$$

Следовательно, способом ван дер Корпута, (см. [3], стр. 99, 100, ср. [4], стр. 73, 78), получаем оценку

(54)
$$W_{311} = O(\ln T),$$

и, следовательно,

$$W_{31} = O(\xi T^{1/2}\ln T),$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$. В случае $\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2 = 1$ имеем

$$W_{311}(\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2 = 1) = \begin{cases} Q_1, & n = 1 \\ W_{311}(n\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2 \geqq 2), & n \geqq 2, \end{cases}$$

т.е. (см. (6), (52)—(54)),

$$W_{311}(\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2 = 1) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}U\ln P_0 + O(T^{2\varepsilon}), & n = 1 \\ O(\ln T), & n \geqq 2. \end{cases}$$

Значит,

(55)
$$W_3 = \frac{2}{\pi}U\ln P_0 + O(T^{1/2}\xi\ln T),$$

и, действуя аналогичным образом в случае W_4, (см. (19)),

(56)
$$W_4 = \frac{2}{\pi}U\ln P_0 + O(T^{1/2}\xi\ln T).$$

Что же касается величины W_2, (см. (19)), то она является квадратичной относительно ζ. Пользуясь Леммой 6 А. Сельберга ([2], стр. 9)

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}(t+h)\right) = \sum_{n<P_0} n^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}(t+h)} +$$

$$+ e^{\frac{1}{4}\pi i - ih}\left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{-i(t+h)} \sum_{n<p_0} n^{-\frac{1}{2}+i(t+h)} + O(T^{-3/20}),$$

мы обнаруживаем, что величина W_2 выражается посредством сумм, совершенно аналогичных тем, которые встречались при доказательстве леммы А. Следовательно, способом А. Сельберга ([2], стр. 36—39), используя в соответствующих местах дискретные средства как при доказательстве леммы А, получаем соотношение

$$(57)\qquad \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \zeta\left(\frac{1}{2} + i(g_\nu(\tau)+h)\right)\zeta\left(\frac{1}{2} - i(g_\nu(\tau)+k)\right)\eta_h^2\bar{\eta}_k^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi} U \ln P_0 \cdot \sum_{\bar{\nu}<\xi} \frac{\beta_{\bar{\nu}_1}\beta_{\bar{\nu}_2}\beta_{\bar{\nu}_3}\beta_{\bar{\nu}_4}}{(\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4)^{1+i(h-k)}} \varkappa^{1+i(h-k)} \sum_{n<\frac{P_0\varkappa}{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_4}} n^{-1-i(h-k)} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} U \ln P_0 \cdot P_0^{-2i(h-k)} \sum_{\bar{\nu}<\xi} \frac{\beta_{\bar{\nu}_1}\beta_{\bar{\nu}_2}\beta_{\bar{\nu}_3}\beta_{\bar{\nu}_4}}{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4} \varkappa^{1-i(h-k)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n<\frac{P_0\varkappa}{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_4}} n^{-1+i(h-k)} + O(T^{1/2}\xi^7 \ln t).$$

Наконец, способом [2], стр. 40, (см. (18), (19), (35), (55)—(57)), получаем

$$(58)\qquad M_1 = \frac{2}{\pi} U \ln P_0 \cdot \sum_{\bar{h}=1}^{H_1} \sum_{\bar{k}=1}^{H_1} K_1\{\omega(\bar{h}-\bar{k})\} + O(T^{1/2}\xi^7 \ln \mathrm{T}) =$$

$$= \frac{4}{\pi} U \ln P_0 \sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) K_1(\omega m) + \frac{2}{\pi} U H_1 K_1(0) \ln \mathrm{P}_0 + \mathrm{O}(\mathrm{U}\,\mathrm{H}_1^{3/2} \ln T),$$

где

$$(59)\qquad K_1(\omega m) = K_1(\gamma) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{\bar{\nu}<\xi} \frac{\beta_{\bar{\nu}_1}\beta_{\bar{\nu}_2}\beta_{\bar{\nu}_3}\beta_{\bar{\nu}_4}}{(\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4)^{1+i\gamma}} \varkappa^{1+i\gamma} \cdot \sum_{n<\frac{P_0\varkappa}{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_4}} n^{-1-i\gamma} - 1 + \right.$$

$$\left. + P_0^{2i\gamma} \sum_{\bar{\nu}<\xi} \frac{\beta_{\bar{\nu}_1}\beta_{\bar{\nu}_2}\beta_{\bar{\nu}_3}\beta_{\bar{\nu}_4}}{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4} \varkappa^{1+i\gamma} \sum_{n<\frac{P_0\varkappa}{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_4}} n^{-1-i\gamma} \right\},$$

(ср. [2], стр. 40, (5.24), (5.25)).

8.2. Прежде всего имеет место, (см. (45), (48), (59)),

$$(60)\qquad K_1(0) = 2K(0) - 1 = O(1).$$

Способом [2], стр. 40—43, получаем ($\gamma = \omega m$)

$$\sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) K_1(\gamma) = \sum_{2 \leqq n < p_0} \frac{\lambda_n^2}{n} \sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) \cos(\gamma \ln n) +$$

$$+ \sum_{\varrho < \xi^2} \left\{ \sum_{\substack{\varrho | \bar{v}_1 \bar{v}_3 \\ \bar{v} < \xi}} \frac{\beta_{\bar{v}_1} \beta_{\bar{v}_3}}{\bar{v}_1 \bar{v}_3} \right\}^2 \sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_0^{2i\gamma} \varphi_{i\gamma}(\varrho)}{i\gamma} \right\} + O(H_1^{3/2}),$$

(происхождение члена $O(H_1^{3/2})$ показано в (49)).

Далее, по лемме 1, (ср. [2], стр. 43),

$$\sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_0^{2i\gamma} \varphi_{i\gamma}(\varrho)}{i\gamma} \right\} = \varrho \sum_{d | \varrho} \frac{\mu(d)}{d} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) \frac{\sin\left(\gamma \ln \frac{P_0^2 \varrho}{d}\right)}{\gamma} = O\left(\frac{H_1 \varrho}{\omega} \sum_{d | \varrho} \frac{|\mu(d)|}{d}\right)$$

и, по лемме 2, (так как $\gamma = \omega \mathrm{m}$, полагаем $y = \omega \ln n$),

$$\sum_{2 \leqq n < Z} \frac{\lambda_n^2}{n} \sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) \cos(\gamma \ln n) = O\left(H_1^2 \sum_{2 \leqq n < Z} \frac{\lambda_n^2}{n}\right) + O\left(H_1 \sum_{Z \leqq n < P_0} \frac{\lambda_n^2}{n}\right),$$

где, (см. [2], стр. 44),

$$Z = \exp\left\{ \sqrt{\frac{\ln \xi}{H}} \right\}.$$

Заметим, что условию

$$y < \sqrt{\frac{\omega \ln \xi}{H_1}}$$

(см. лемму 2), т.е. условию

$$\omega \ln n < \sqrt{\frac{\omega \ln \xi}{H_1}}, \quad H = \omega H_1,$$

соответсвует условие $n < Z$.

Следовательно, (ср. [2], стр. 44, (5.35)),

$$\sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) K_1(\omega m) = O\left(H_1^2 \sum_{2 \leqq n < Z} \frac{\lambda_n^2}{n}\right) + O\left(H_1 \sum_{n < P_0} \frac{\lambda_n^2}{n}\right) +$$

$$+\, O\left(\frac{H_1}{\omega \ln^2 \xi} \sum_{\varrho < \xi^2} \frac{1}{\varrho} \prod_{p \mid \varrho} (1 + p^{-3/4})^7\right) + O(H_1^{3/2}) =$$

$$= O\left(H_1^2 \sum_{2 \leq n < Z} \frac{\lambda_n^2}{n}\right) + O\left(H_1 \sum_{n < P_0} \frac{\lambda_n^2}{n}\right) + O\left(\frac{H_1}{\omega \ln \xi}\right) + O(H_1^{3/2}),$$

где учтено [2], стр. 29, (4.31). Однако, ([2], стр. 45),

$$\sum_{n < P_0} \frac{\lambda_n^2}{n} = O(1),$$

и, ([2], стр. 46, $H = \omega H_1$),

$$\sum_{2 \leq n < Z} \frac{\lambda_n^2}{n} = O\left(\frac{1}{H \ln \xi}\right) = O\left(\frac{1}{H_1 \omega \ln \xi}\right) = O\left(\frac{1}{H_1}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{H_1} (H_1 - m) K_1(\omega m) = O\left(H_1^2 \cdot \frac{1}{H_1}\right) + O(H_1) + \tag{61}$$

$$+\, O\left(\frac{H_1}{\omega \ln \xi}\right) + O(H_1^{3/2}) = O(H_1^{3/2}).$$

Оценка (61) вместе с формулами (58), (60), доказывает лемму Б.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: The zeros of Riemann's zeta-function on critical line, Math. Zs., (1921), 283—317.
2. Selberg, A.: On the zeros Riemann's zeta-function, Skr. Norske vid. Akad. Oslo, 10 (1942), 1—59.
3. Tithmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (IV), Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105.
4. Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.
5. Джексон, Д.: Ряды Фурье и ортогональные полиномы, Москва 1948.
6. Мозер, Ян: О законе Грама в теории дзета-функции Римана, Acta Arithm., 32 (1977), 107—113.
7. Мозер, Ян: Улучшение теоремы Харди-Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, *Acta Arithm.*, 43, (1983), 21—47.
8. Мозер, Ян: Новые теоремы о среднем для функции $\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2$, Acta Math. Univ. Comen, 46—47 (1985), 21—40.

9. Мозер, Ян: Структура одной формулы А. Сельберга в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen, 48—49 (1986), 93—121.

Поступило: 8. 3. 1984

Адрес автора:
Ján Moser
MFF UK, Katedra matematickej analýzy
Matematický pavilón
Mlynská dolina
Bratislava
842 15

SÚHRN

POZNÁMKY K. A. SELBERGOVÝM VETÁM O NULOVÝCH BODOCH FUNKCIE $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$

Ján Moser, Bratislava

V práci je dokázané, že diskrétnym základom pre známu A. Selbergovu Vetu A (1942) o hustote nulových bodov funkcie $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, je istá zákonitosť, ktorú je prirodzené nazvať zovšeobecneným Gramovým zákonom pre nekonečný systém postupností $\{g_\nu(\tau)\}$, definovaných vzťahom

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau)]=\frac{1}{2}\pi\nu+\frac{1}{2}\tau,\quad \nu=1,2,\ldots,\quad \tau\in\langle-\pi,\pi\rangle,$$

kde

$$\vartheta_1(t)=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi.$$

Okrem toho je dokázaný doplnok k A. Selbergovej Vete C pre istý nekonečný systém množín nulovej miery, t. j., pre výnimočné množiny vzhľadom na A. Selbergovu Vetu C.

SUMMARY

REMARKS TO A. SELBERG'S THEOREMS ON ZEROS OF THE FUNCTION $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$

Ján Moser, Bratislava

It is proved that the discrete fundament for the known A. Selberg's Theorem A (1942) on the density of zero points of $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ is certain property. The last may be called generalized Gram's

law for an infinite collection $\{g_\nu(\tau)\}$ of sequences, which are defined as

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau)] = \frac{1}{2}\pi\nu + \frac{1}{2}\tau, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle,$$

where

$$\vartheta_1(t) = \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi.$$

Moreover an addendum to A. Selberg's Theorem C for certain infinite collection sets of measure zero, i.e. for exceptional sets with respect to A. Selberg's Theorem C.