UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLVIII—XLIX — 1986

ГИПОТЕЗА РИМАНА И АСИММЕТРИЯ В ПОВЕДЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $S_1(t)$

ЯН МОЗЕР, Братислава

Пусть (см. [10], стр. 209, 220)

$$S_1(t) = \int_0^t S(v)\,\mathrm{d}v, \quad S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right).$$

Напомним, что изменение функции $S(t)$ тесно связано с распределением мнимых частей нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$, $s = \sigma + \mathrm{i}t$, (ср. [7], стр. 90). Это обстоятельство является обоснованием для изучения свойств функции $S(t)$, а следовательно, и функции $S_1(t)$.

Д. Е. Литтлвуд получил для функции $S_1(t)$, в предположении справедливости гипотезы Римана, следующую оценку (см. [4], стр. 197, (5.43), $n = 1$)

$$(1) \qquad \frac{1}{H}\int_T^{T+H} \{S_1(t)\}^2\,\mathrm{d}t = O(1), \qquad T^a \leqq H \leqq T, \quad 0 < a \leqq 1$$

и, специально, ((5.44), $n = 1$),

$$(2) \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \{S_1(t)\}^2\,\mathrm{d}t = O(1).$$

Е. К. Титчмарш получил в направлении оценок (1), (2), в предположении справедливости гипотезы Римана, следующий результат (см. [8], стр. 450, Теорема II)

$$(3) \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \{S_1(t)\}^2\,\mathrm{d}t \sim D, \qquad T \to \infty,$$

где

$$D = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_2^2(n)}{n}, \quad \Lambda_2(n) = \frac{\Lambda(n)}{\ln^2 n}$$

и $\Lambda(n)$ — функция фон Мангольдта, $= \ln p$, если $n = p^l$, (l — натуральное, p — простое число), и $= 0$, в остальных случаях.

Заметим, что соотношение (3) не является точным и Е. К. Титчмарш уточнил свое соотношение (3) в книге [10], стр. 358;

$$\frac{1}{T} \int_0^T \{S_1(t)\}^2 \, \mathrm{d}t \sim \frac{K^2}{\pi^2} + D, \tag{4}$$

где

$$K = -\int_{1/2}^{\infty} \ln |\zeta(\sigma)| \, \mathrm{d}\sigma.$$

Конечно, аналогичным образом, получается оценка (ср. (1))

$$\frac{1}{H} \int_T^{T+H} \{S_1(t)\}^2 \, \mathrm{d}t \sim \frac{K^2}{\pi^2} + D. \tag{5}$$

А. Сельберг получил, независимо от гипотезы Римана, следующие соотношения (см. [7], стр. 130)

$$\frac{1}{H_1} \int_T^{T+H_1} \{S_1(t)\}^{2k} \, \mathrm{d}t \sim c_k + O\left(\frac{1}{\ln T}\right).$$

где c_k — положительные постоянные, зависящие только от k, (k — любое натуральное число), и

$$T^b \leqq H_1 \leqq T, \qquad \frac{1}{2} < b \leqq 1.$$

Однако, в теории $\zeta(s)$ отсутствуют теоремы о среднем линейные относительно $S_1(t)$ а, следовательно, и свойства функции $S_1(t)$, связанные с этими теоремами.

В настоящей работе мы применим к изучению функции $S_1(t)$ метод, использованный в нашей работе [5], для доказательства теорем о среднем для функции $Z(t)$, относительно двух бесконечных систем несвязным множеств. Этот метод приводит к новым свойствам функции $S_1(t)$, в предположении справедливости гипотезы Римана:

(A) Получены интегральные теоремы о среднем, линейные относительно $S_1(t)$, для некоторых систем несвязных множеств.

(B) Обнаружена асимметрия в поведении положительных и отрицательных значений функции $S_1(t)$, в следующем смысле: площадь (мера) фигуры, соответствующей (обычным образом) отрицательным участками графика функции $S_1(t)$, $t \in \langle T, T+T^\varepsilon \rangle$, значительно превосходит площадь фигуры, соответствующей положительным участкам названного графика, ($0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число).

(C) Получено семейство оценок снизу, которое, как частный случай, содержит оценку

$$\int_T^{T+T^\varepsilon} |S_1(t)| \, \mathrm{d}t > A(\varepsilon) T^\varepsilon,$$

($0 < A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$ — постоянные, зависящие от выбора ε). Так как из (1) тривиальным образом (неравенство Коши-Буняковского) следует оценка

$$\int_T^{T+T^\varepsilon} |S_1(t)| \, \mathrm{d}t < B(\varepsilon) T^\varepsilon,$$

то

$$A(\varepsilon) < \frac{1}{T^\varepsilon} \int_T^{T+T^\varepsilon} |S_1(t)| \, \mathrm{d}t < B(\varepsilon).$$

Значит, мы обнаружили, по гипотезе Римана, порядок среднего значения функции $|S_1(t)|$.

Переходим к точным формулировкам и доказательствам.

1. Пусть $\{t_\nu(\tau)\}$ обозначает семейство последовательностей, определенных условием

$$\vartheta[t_\nu(\tau)] = \pi\nu + \tau, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle, \tag{6}$$

(см. [5], (1)). Введем две системы несвязных множеств (см. [5], (3)):

$$\begin{gathered} G_1 = G_1(x;\, \varepsilon, T) = \\ = \bigcup_{T \leqq t_{2\nu} \leqq T+T^\varepsilon} \{t\colon t_{2\nu}(-x) < t < t_{2\nu}(x)\}, \quad 0 < x \leqq \pi/2, \\ G_2 = G_2(y;\, \varepsilon, T) = \\ = \bigcup_{T \leqq t_{2\nu+1} \leqq T+T^\varepsilon} \{t\colon t_{2\nu+1}(-x) < t < t_{2\nu+1}(x)\}, \quad 0 < y \leqq \pi/2. \end{gathered} \tag{7}$$

Имеет место

Теорема 1. По гипотезе Римана,

$$\begin{gathered} \int_{G_1} S_1(t) \, \mathrm{d}t = \frac{Kx}{\pi^2} T^\varepsilon + O\left(\frac{xT^\varepsilon}{\ln\ln T}\right), \\ \int_{G_2} S_1(t) \, \mathrm{d}t = \frac{Ky}{\pi^2} T^\varepsilon + O\left(\frac{yT^\varepsilon}{\ln\ln T}\right), \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$K = -\int_{1/2}^{\infty} \ln |\zeta(\sigma)| \, d\sigma. \tag{9}$$

Так как из (6) следует (ср. [5], (7); $t_{2\nu}(-x)$, $t_{2\nu+1}(y) \in \langle T, T+T^\varepsilon \rangle$)

$$\begin{aligned} t_{2\nu}(x) - t_{2\nu}(-x) &= \frac{4x}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{x}{T^{1-\varepsilon}\ln^2 T}\right), \\ t_{2\nu+1}(y) - t_{2\nu+1}(-y) &= \frac{4y}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{y}{T^{1-\varepsilon}\ln^2 T}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

и (ср. [5], (40))

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+T^\varepsilon} 1 = \frac{1}{2\pi} T^\varepsilon \ln \frac{T}{2\pi} + O(1), \qquad t_\nu = t_\nu(0), \tag{11}$$

где $O(1)$ имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, то

$$m(G_1) = \frac{x}{\pi} T^\varepsilon + O(x), \quad m(G_2) = \frac{y}{\pi} T^\varepsilon + O(y), \tag{12}$$

($m(G_1)$, $m(G_2)$ — меры множеств G_1, G_2).

Теперь из (8) получаем

Следствие 1. По гипотезе Римана,

$$\frac{1}{m(G_1)} \int_{G_1} S_1(t) \, dt \sim \frac{K}{\pi}, \quad \frac{1}{m(G_2)} \int_{G_2} S_1(t) \, dt \sim \frac{K}{\pi}, \tag{13}$$

при $T \to \infty$.

Из (8), в случае $x = y$, получаем ($G_1(x) \cap G_2(x) = \emptyset$)

$$\int_{G_1(x) \cup G_2(x)} S_1(t) \, dt = \frac{2Kx}{\pi^2} T^\varepsilon + O\left(\frac{xT^\varepsilon}{\ln\ln T}\right). \tag{14}$$

Теперь из (14), в случае $x = \pi/2$, (см. (7) и [10], стр. 346, (2)), получается

Следствие 2. По гипотезе Римана,

$$\frac{1}{T^\varepsilon} \int_T^{T+T^\varepsilon} S_1(t) \, dt = \frac{K}{\pi} + O\left(\frac{1}{\ln\ln T}\right). \tag{15}$$

Итак, теоремы о среднем для функции $S_1(t)$, относительно систем несвязных множеств $G_1(x)$, $G_2(y)$ и промежутка $\langle T, T+T^\varepsilon \rangle$ обнаружены (см. (13), (15)). Теперь мы должны показать знак числа K. Имеет место

Теорема 2. По гипотезе Римана,

$$K < -\frac{1}{2}(c + \ln 2\pi) - 0{,}736 < -1{,}6, \tag{16}$$

где c — постоянная Эйлера.

Замечание 1. Средние значения функции $S_1(t)$ относительно систем несвязных множеств $G_1(x)$, $G_2(y)$ и промежутка $\langle T, T + T^\varepsilon\rangle$ являются асимптотически равными и отрицательными.

Пусть

$$\begin{aligned} G_1^+(x) &= \{t\colon t \in G_1(x),\ S_1(t) > 0\{, \\ G_1^-(x) &= \{t\colon t \in G_1(x),\ S_1(t) < 0\}, \\ G_2^+(x) &= \{t\colon t \in G_2(x),\ S_1(t) > 0\}, \\ G_2^-(x) &= \{t\colon t \in G_2(x),\ S_1(t) < 0\}, \\ G_3(x) &= \{t\colon t \in G_1(x),\ S_1(t) = 0\}, \\ G_4(x) &= \{t\colon t \in G_2(x),\ S_1(t) = 0\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Так как имеет место следующая Ω — теорема А. Сельберга ([7], стр. 150)

$$S_1(t) = \Omega_\pm\left\{\frac{(\ln t)^{1/3}}{(\ln\ln t)^{10/3}}\right\}, \tag{18}$$

то множество $G_1^+(x) \cup G_2^+(x)$ не является пустым для всех достаточно больших T.

Так как функция $S(t)$ имеет на ограниченном промежутке лишь конечное число скачков первого рода ([10], стр. 212), то функция $S_1(t)$ непрерывна. Следовательно, из Ω — теоремы (18) получается, что множество $G_3(x) \cup G_4(x)$ не является пустым для всех достаточно большихT.

Так как

$$\begin{aligned} G_1(x) &= G_1^+(x) \cup G_1^-(x) \cup G_3(x), \\ G_2(x) &= G_2^+(x) \cup G_2^-(x) \cup G_4(x), \end{aligned} \tag{19}$$

то из (14) получаем

Следствие 3. По гипотезе Римана,

$$\int_{G_1^-(x)\cup G_2^-(x)} S_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_{G_1^+(x)\cup G_2^+(x)} S_1(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{2Kx}{\pi^2}\,T^\varepsilon, \tag{20}$$

для $T \to \infty$.

Пусть $E^+(x)$ обозначает фигуру, соответствующую (обычным образом) графику функции $S_1(t)$, $t \in G_1^+(x) \cup G_2^+(x)$ и $E^-(x)$ — фигуру, соответствующую графику функции $-S_1(t)$, $T \in G_1^-(x) \cup G_2^-(x)$. Пусть $m(E^+(x))$, $m(E^-(x))$ обозначают меры (площади) этих фигур.

Замечание 2. Соотношение (20) выражает следующую геометрическую закономерность в вопросе о поведении функции $S_1(t)$, $t \in G_1(x) \cup G_2(x)$:

$$m(E^-(x)) - m(E^+(x)) \sim -\frac{2Kx}{\pi^2} T^\varepsilon,$$

(напомним, что $K < 0$). Итак, по гипотезе Римана, в поведении функции $S_1(t)$ проявляется значительная асимметрия.

2. В этой части мы обратим внимание на свойства функции $|S_1(t)|$, $t \in G_1(x) \cup G_2(x)$. Имеет место

Следствие 4. По гипотезе Римана,

$$\begin{aligned} &\int_{G_1^-(x) \cup G_2^+(x)} |S_1(t)|\, dt > -\frac{Kx}{\pi^2}(1-\eta)T^\varepsilon, \\ (21)\qquad &\int_{G_1^+(x) \cup G_2^-(x)} |S_1(t)|\, dt > -\frac{Kx}{\pi^2}(1-\eta)T^\varepsilon, \end{aligned}$$

где $0 < \eta$ — сколь угодно малое число.

Действительно. Так как (см. (19))

$$\int_{G_1(x)} S_1(t)\, dt = \int_{G_1^+(x)} + \int_{G_1^-(x)} \geqq \int_{G_1^-(x)}$$

и (см. (8)),

$$\int_{G_1(x)} S_1(t)\, dt < \frac{Kx}{\pi^2}(1-\eta)T^\varepsilon,$$

то

$$-\int_{G_1^-(x)} S_1(t)\, dt > -\frac{Kx}{\pi^2}(1-\eta)T^\varepsilon.$$

Отсюда следует первое соотношение в (21). Аналогичным образом получается и второе соотношение.

Следствие 5. По гипотезе Римана,

$$(22)\qquad \int_{G_1^+(x) \cup G_2^-(x)} |S_1(t)|\, dt \sim \int_{G_1^-(x) \cup G_2^+(x)} |S_1(t)|\, dt, \quad T \to \infty.$$

Действительно. Из (8) получаем

$$(23)\qquad \int_{G_1(x)} S_1(t)\, dt - \int_{G_2(x)} S_1(t)\, dt = O\left(\frac{xT^\varepsilon}{\ln\ln T}\right).$$

Далее, (см. (19)),

$$(24) \qquad \int_{G_1(x)} S_1(t)\,\mathrm{d}t - \int_{G_2(x)} S_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_{G_1^+(x)} + \int_{G_1^-(x)} - \int_{G_2^+(x)} - \int_{G_2^-(x)} =$$

$$= \int_{G_1^+(x)\cup G_2^-(x)} |S_1(t)|\,\mathrm{d}t - \int_{G_1^-(x)\cup G_2^+(x)} |S_1(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Теперь из (23), в силу (24), (21) следует (22).

Пусть $F_1(x)$ обозначает фигуру, соответствующую графику функции $|S_1(t)|$, $t\in G_1^-(x)\cup G_2^+(x)$ и $F_2(x)$ — фигуру, соответствующую графику функции $|S_1(t)|$, $t\in G_1^+(x)\cup G_2^-(x)$. Пусть $m\{F_1(x)\}$, $m\{F_2(x)\}$ обозначают меры (площади) этих фигур.

Замечание 3. Соотношения (21), (22) выражают следующую геометрическую закономерность в вопросе о поведении функции $|S_1(t)|$, $t\in$ $\in G_1(x)\cup G_2(x)$:

$$m\{F_1(x)\},\quad m\{F_2(x)\} > -\frac{Kx}{\pi^2}(1-\eta)T^\varepsilon,$$

$$m\{F_1(x)\} \sim m\{F_2(x)\},\quad T\to\infty,$$

т. е., по гипотезе Римана, в поведении функции $|S_1(t)|$ относительно множеств $G_1^-(x)\cup G_2^+(x)$ и $G_1^+(x)\cup G_2^-(x)$ проявляется симметрия (ср. замечание 2).

Далее, сложением оценок (21), (см. (17), (19)), получаем

Следствие 6 (главный результат этой части). По гипотезе Римана,

$$(25) \qquad \int_{G_1(x)\cup G_2(x)} |S_1(t)|\,\mathrm{d}t > -\frac{2Kx}{\pi^2}(1-\eta)T^\varepsilon.$$

Так как (см. (5), $H = T^\varepsilon$, (7) и [10], стр. 346, (2)),

$$(26) \qquad \int_{G_1(x)\cup G_2(x)} |S_1(t)|\,\mathrm{d}t < \int_T^{T+T^\varepsilon} |S_1(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{A}{(\ln\ln T)^2} <$$

$$< T^{\varepsilon/2}\left(\int_T^{T+T^\varepsilon} \{S_1(t)\}^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \frac{A}{(\ln\ln T)^2} < \sqrt{\frac{K^2}{\pi^2} + D}\,(1+\eta)T^\varepsilon$$

и (см. (12))

$$(27) \qquad m\{G_1(x)\cup G_2(x)\} = \frac{2x}{\pi}T^\varepsilon + O(1),$$

то получаем (см. (25), (26))

Следствие 7. По гипотезе Римана,

$$-\frac{K}{\pi}(1-\eta) < \frac{1}{m\{G_1(x) \cup G_2(x)\}} \int_{G_1(x) \cup G_2(x)} |S_1(t)|\, \mathrm{d}t < \tag{28}$$

$$< \frac{\pi}{2x} \sqrt{\frac{K^2}{\pi^2} + D}\,(1+\eta).$$

Теперь, в случае $x = \pi/2$, в силу (27), (28), (ср. (26)), получаем

Следствие 8. По гипотезе Римана,

$$-\frac{K}{\pi}(1-\eta) < \frac{1}{T^\varepsilon} \int_T^{T+T^\varepsilon} |S_1(t)|\, \mathrm{d}t < -\frac{K}{\pi} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 D}{K^2}}\,(1+\eta). \tag{29}$$

Замечание 4. Итак, по гипотезе Римана, вопрос о порядке среднего значения функции $|S_1(t)|$ относительно системы несвязных множеств $G_1(x) \cup G_2(x)$ и промежутка $\langle T, T+T^\varepsilon \rangle$ решен полностью.

3. Доказательство теоремы 1 опирается на следующие леммы.

Лемма 1. По гипотезе Римана,

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+T^\varepsilon} S_1[t_\nu(\tau)] = \frac{K}{2\pi^2} T^\varepsilon \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{T^\varepsilon \ln T}{\ln\ln T}\right), \tag{30}$$

где O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Лемма 2. По гипотезе Римана,

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+T^\varepsilon} (-1)^\nu S_1[t_\nu(\tau)] = O\left(\frac{T^\varepsilon \ln T}{\ln\ln T}\right), \tag{31}$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Из (30), (31) получаем

Следствие 9. По гипотезе Римана,

$$\begin{aligned} &\sum_{T \leqq t_{2\nu} \leqq T+T^\varepsilon} S_1[t_{2\nu}(\tau)] = \frac{K}{4\pi^2} T^\varepsilon \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{T^\varepsilon \ln T}{\ln\ln T}\right), \\ &\sum_{T \leqq t_{2\nu+1} \leqq T+T^\varepsilon} S_1[t_{2\nu+1}(\tau)] = \frac{K}{4\pi^2} T^\varepsilon \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{T^\varepsilon \ln T}{\ln\ln T}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Теперь мы покажем как завершается

Доказательство теоремы 1 с помощью соотношений (32). Прежде всего, (см. (6) и [10], стр. 346, (2)),

$$\left(\frac{\mathrm{d}t_\nu(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} = \ln P_0 + O(T^{\varepsilon-1}), \qquad P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \quad t_\nu(\tau) \in \langle T, T+T^\varepsilon \rangle,$$

(33)
$$S_1(t) = O\left\{\frac{(\ln t)}{(\ln\ln t)^2}\right\}.$$

Следовательно,

(34)
$$\int_{-x}^{x} S_1[t_{2\nu}(\tau)] \left(\frac{\mathrm{d}t_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} \cdot \frac{\mathrm{d}t_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \ln P_0 \cdot \int_{-x}^{x} S_1[t_{2\nu}(\tau)]\, \frac{\mathrm{d}t_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + O\left\{\frac{xT^{\varepsilon-1}}{(\ln\ln T)^2}\right\} =$$
$$= \ln P_0 \cdot \int_{t_{2\nu}(-x)}^{t_{2\nu}(x)} S_1(t)\,\mathrm{d}t + O\left\{\frac{xT^{\varepsilon-1}}{(\ln\ln T)^2}\right\},$$

где в надлежащем месте использованы соотношения (33). Далее, (см. (7), (10), (11), (33), (34)),

(35)
$$\sum_{T \leqq t_{2\nu} \leqq T+T^{\varepsilon}} \int_{-x}^{x} S_1[t_{2\nu}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \ln P_0 \cdot \int_{G_1(x)} S_1(t)\,\mathrm{d}t + O\left\{\frac{xT^{2\varepsilon-1}\ln T}{(\ln\ln T)^2}\right\} + O\left\{\frac{x}{(\ln\ln T)^2}\right\}$$

Наконец, интегрируя первое соотношение в (32) по τ в промежутке $\langle -x, x\rangle$, в силу (35) получаем первое соотношение в (8), и, аналогичным образом — второе.

4. Основой для доказательства соотношений (30), (31), а значит, и теоремы 1, является следующая (см. [10], стр. 354)

Формула 1. По гипотезе Римана,

(36)
$$\pi S_1(t) = K + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)\,\mathrm{e}^{-\delta n}}{\sqrt{n}\,\ln n} \cos(t \ln n) + O\left(\frac{1}{\ln\ln T}\right),$$

где
$$K = -\int_{1/2}^{\infty} \ln|\zeta(\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma, \quad \Lambda_1(n) = \frac{\Lambda(n)}{\ln n}$$

и $t \in \langle T, 2T\rangle$, $\delta = (2T)^{-1/2}$.

По поводу формулы (36) сделаем следующие замечания.

(A) В книге Е. К. Титчмарша [10], стр. 354, а также в подлиннике [9], стр. 304, содержится следующая опечатка:
напечатано
$$\pi S_1(t) = \int_{1/2}^{\infty} \ln|\zeta(\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma - \int_{1/2}^{\infty} \ln|\zeta(\sigma + \mathrm{i}t)|\,\mathrm{d}\sigma,$$

должно быть

$$\pi S_1(t) = -\int_{1/2}^{\infty} \ln |\zeta(\sigma)|\, d\sigma + \int_{1/2}^{\infty} \ln |\zeta(\sigma + it)|\, d\sigma. \tag{37}$$

Действительно. Из [10], стр. 220, соотношение (4), в случае $\beta \to \infty$, получается (37), (ср. также [7], стр. 92, (1.9)).

Заметим, что исправленный знак в (36) не влияет на результат Е. К. Титчмарша, полученный по неточной формуле, так как он изучал среднеквадратичное отклонение функции $S_1(t)$ от нуля.

В нашей задаче, однако, точный знак постоянной K имеет важное значение.

(B) Далее мы обратим внимание на выбор значения для δ:

$$\delta = (2T)^{-1/2}$$

у Е. К. Титчмаша.

Прежде всего заметим, что формула (36) получается как следствие из приближенного функционального уравнения Д. Е. Литтлвуда для логарифмической производной функции $\zeta(s)$, (см. [4], стр. 180, ср. [10], стр. 335): при $t \to \infty$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} e^{-\delta n} + \sum_{\varrho} \delta^{s-\varrho}\Gamma(\varrho - s) + O(\delta^{\sigma - 1/4} \ln t),$$

равномерно для $1/2 \leqq \sigma \leqq 9/8$ и

$$e^{-\sqrt{t}} \leqq \delta \leqq 1.$$

При изучении доказательства формулы (36) в [10], стр. 354—356, легко обнаруживается, что формула (36) имеет место и в случае

$$\delta = T^{-\omega}, \quad 0 < \omega, \tag{38}$$

где ω — сколь угодно малое число.

В этом можно убедиться еще и так. Часть доказательства в книге Е. К. Титчмарша [10], начиная с 5-ой строки снизу на стр. 355, совпадает с доказательством Леммы δ в работе Е. К. Титчмарша [8], стр. 454—456. Однако, Лемму δ сам Е. К. Титчмарш доказывает в предположении $\delta = O(T^{-A})$, $0 < A$. Что же касается первой части доказательства в книге Е. К. Титчмарша, то она связана лишь с общим условием $e^{-\sqrt{T}} \leqq \delta \leqq 1$ а не со специальным условием для δ.

(C) В случае (38), (относительно P_0 см. (33)),

$$(39)\qquad \sum_{P_0^{4\omega}\leqq n} \frac{\Lambda_1(n)\,\mathrm{e}^{-\delta n}}{\sqrt{n}\ln n}\cos(t\ln n) = O\left(\sum_{P_0^{4\omega}\leqq n}\frac{\mathrm{e}^{-\delta n}}{\sqrt{n}\ln n}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{T^{\omega}\ln T}\sum_{P_0^{4\omega}\leqq n}\mathrm{e}^{-\delta n}\right) = O\left(\frac{1}{\delta T^{\omega}\ln T}\right) = O\left(\frac{1}{\ln T}\right).$$

Следовательно, основной для нас будет следующая (см. (36), (39))

Формула 2. По гипотезе Римана,

$$(40)\qquad \pi S_1(t) = K + \sum_{2\leqq n< P_0^{4\omega}} \frac{\Lambda_1(n)\,\mathrm{e}^{-\delta n}}{\sqrt{n}\ln n}\cos(t\ln n) + O\left(\frac{1}{\ln\ln T}\right),$$

где

$$\delta = T^{-\omega},\quad t\in\langle T, 2T\rangle,\quad P_O = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$$

и $0<\omega$ сколь угодно малое число.

Доказательство леммы 1. Прежде всего, (см. (6), (40)),

$$(41)\qquad \pi S_1[t_\nu(\tau)] = K + \sum_{2\leqq n< P_0^{4\omega}} \frac{\Lambda_1(n)\,\mathrm{e}^{-\delta n}}{\sqrt{n}\ln n}\cos\{t_\nu(\tau)\ln n\} + O\left(\frac{1}{\ln\ln T}\right),$$

для $t_\nu(\tau)\in\langle T, T+T^{\varepsilon}\rangle$. Далее, (см. (11)),

$$(42)\qquad \pi\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+T^{\varepsilon}} S_1[t_\nu(\tau)] = \frac{K}{2\pi}T^{\varepsilon}\ln\frac{T}{2\pi} + O(1) +$$

$$+ \sum_{2\leqq n< P_0^{4\omega}} \frac{\Lambda_1(n)\,\mathrm{e}^{-\delta n}}{\sqrt{n}\ln n}\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+T^{\varepsilon}}\cos\{t_\nu(\tau)\ln n\} + O\left(\frac{T^{\varepsilon}\ln T}{\ln\ln T}\right).$$

Положим

$$\varphi_1(\nu) = \frac{1}{2\pi}t_\nu(\tau)\ln n,\qquad n\in\langle 2, P_0^{4\omega}).$$

Так как (см. [10], стр. 260)

$$\vartheta'(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right),\qquad \vartheta''(t)\sim\frac{1}{2t},$$

то (см. (6))

$$\frac{\mathrm{d}t_\nu(\tau)}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\pi}{\vartheta'[t_\nu(\tau)]},$$

$$\varphi_1'(\nu) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}t_\nu(\tau)}{\mathrm{d}\nu}\ln n = \frac{\ln n}{2\vartheta'[t_\nu(\tau)]},\qquad \varphi_1''(\nu)<0.$$

Далее,

$$\varphi_1'(\nu) = \frac{\ln n}{2\vartheta'[t_\nu(\tau)]} = \frac{\ln n}{\ln \frac{t_\nu(\tau)}{2\pi} + O\left(\frac{1}{T}\right)} = \frac{\ln n}{2\ln P_0 \cdot \left\{1 + O\left(\frac{T^\varepsilon}{T \ln T}\right)\right\}} <$$

$$< \frac{2\omega}{1 + o(1)} < 3\omega < \frac{1}{4},$$

$$\varphi_1'(\nu) > A \frac{\ln n}{\ln T},$$

($0 < A$ — постоянная). Следовательно, (см. [10], стр. 78, Лемма 2; стр. 73, Лемма 1),

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T + T^\varepsilon} \cos \{2\pi\varphi_1(\nu)\} = \int_{T \leqq t_\nu \leqq T + T^\varepsilon} \cos \{2\pi\varphi_1(x)\} \, \mathrm{d}x +$$

$$+ O(1) = O\left(\frac{\ln T}{\ln n}\right)$$

и для двойной суммы W_1 в (42) получаем оценку

$$W_1 = O\left\{\ln T \sum_{2 \leqq n < P_0^{4\omega}} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}\right\} = \tag{43}$$

$$= O\left\{\ln T\left(\sum_{2 \leqq n < P_0^\omega} + \sum_{P_0^\omega \leqq n < P_0^{4\omega}}\right) \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}\right\} =$$

$$= O\left\{\ln T\left(P_0^{\omega/2} + \frac{P_0^{2\omega}}{\ln P_0}\right)\right\} = O(T^\omega) = O(T^\varepsilon),$$

в случае $\omega \leqq \varepsilon$. Теперь из (42), в силу (43), следует (30).

6. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 2. Прежде всего (см. (41))

$$\pi(-1)^\nu S_1[t_\nu(\tau)] = (-1)^\nu K +$$

$$+ \sum_{2 \leqq n < P_0^{4\omega}} \frac{\Lambda_1(n) \, \mathrm{e}^{-\delta n}}{\sqrt{n} \ln n} \cos \{\pi\nu + t_\nu(\tau) \ln n\} + O\left(\frac{1}{\ln\ln T}\right),$$

для $t_\nu(\tau) \in \langle T, T + T^\varepsilon \rangle$. Далее, (см. (11)),

$$\pi \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T + T^\varepsilon} (-1)^\nu S_1[t_\nu(\tau)] = O(1) + \tag{44}$$

$$+ \sum_{2 \leqq n < P_0^{4\omega}} \frac{\Lambda_1(n) \, \mathrm{e}^{-\delta n}}{\sqrt{n} \ln n} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T + T^\varepsilon} \cos \{\pi\nu + t_\nu(\tau) \ln n\} + O\left(\frac{T^\varepsilon \ln T}{\ln\ln T}\right).$$

Положим

$$\varphi_2(\nu) = \frac{1}{2}\,\nu + \frac{1}{2\pi}\,t_\nu(\tau)\ln n = \frac{1}{2}\,\nu + \varphi_1(\nu),$$

(относительно $\varphi_1(\nu)$ см. часть 5). Очевидно

$$\varphi_2'(\nu) = \frac{1}{2} + \varphi_1'(\nu), \quad \varphi_2''(\nu) = \varphi_1''(\nu),$$

т.е.

$$\frac{1}{2} < \varphi_2'(\nu) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad \varphi_2''(\nu) < 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T + T^\varepsilon} \cos\{2\pi\varphi_2(\nu)\} = \int_{T \leqq t_x \leqq T + T^\varepsilon} \cos\{2\pi\varphi_2(x)\}\,\mathrm{d}x + O(1) = O(1)$$

и для двойной суммы W_2 в (44) получаем оценку (ср. (43))

$$W_2 = O\left(\sum_{2 \leqq n < P_0^{4\omega}} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right) = O\left(\frac{P_0^{2\omega}}{\ln P_0}\right) = O\left(\frac{T^\omega}{\ln T}\right) = O\left(\frac{T^\varepsilon}{\ln T}\right),$$

в случае $\omega \leqq \varepsilon$.

7. В этой и следующих двух частях мы докажем теорему 2. Доказательство этой теоремы опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3.

$$\int_{1/2}^{3/2} \ln \Gamma\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)\mathrm{d}\sigma = -\frac{c}{2} + R_1, \tag{45}$$

где

$$R_1 < 0{,}24. \tag{46}$$

(c — постоянная Эйлера).

Лемма 4.

$$R_2 = \sum_{\gamma > 14} \int_{1/2}^{1} \ln\left(1 + \frac{\sigma^2 - \sigma}{\frac{1}{4} + \gamma^2}\right)\mathrm{d}\sigma > -0{,}004, \tag{47}$$

где $\varrho = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma$ — нуль функции $\zeta(s)$. (Напомним, что $\gamma_1 \doteq 14{,}13 > 14$, см. [10], стр. 384).

Теперь мы покажем, как завершается

Доказательство теоремы 2. В случае $\sigma \in \langle 1/2, 1) \cup (1, 3/2\rangle$ мы используем формулу Римана-Адамара (см. [10], стр. 40):

$$\zeta(\sigma) = \frac{e^{b\sigma}}{2(\sigma-1)\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}+1\right)} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{\sigma}{\varrho}\right) e^{\frac{\sigma}{\varrho}} =$$

$$= \frac{e^{b\sigma}}{2(\sigma-1)\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}+1\right)} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{\sigma}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{\sigma}{\bar{\varrho}}\right) e^{\sigma\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\bar{\varrho}}\right)} =$$

$$= \frac{e^{b\sigma}}{2(\sigma-1)\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}+1\right)} \prod_{\gamma>14} \left(1 + \frac{\sigma^2-\sigma}{\frac{1}{4}+\gamma^2}\right) e^{\frac{\sigma}{\frac{1}{4}+\gamma^2}},$$

где

$$b = \ln 2\pi - 1 - \frac{c}{2}, \quad \bar{\varrho} = \frac{1}{2} - i\gamma.$$

Так как

(48) $$\frac{|\sigma^2-\sigma|}{\frac{1}{4}+\gamma^2} < \frac{1}{14^2} = \frac{1}{196}$$

для $\sigma \in \langle 1/2, 1) \cup (1, 3/3\rangle$, $\gamma > 14$, то

(49) $$\ln|\zeta(\sigma)| = R_3 + R_4 - \ln \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}+1\right).$$

где

(50) $$R_3 = \left(b + \sum_{\gamma>14} \frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^2}\right)\sigma - \ln 2 - \ln|\sigma-1|,$$

$$R_4 = \sum_{\gamma>14} \ln\left(1 + \frac{\sigma^2-\sigma}{\frac{1}{4}+\gamma^2}\right).$$

Так как

$$\int_{1/2}^{3/2} \ln|\sigma-1| \, d\sigma = -1 - \ln 2, \qquad \int_{1/2}^{3/2} \sigma \, d\sigma = 1$$

и (см. [2], стр. 159, 160)

$$(51)\qquad \sum_{\gamma>14}\frac{1}{\frac{1}{4}+\gamma^2}=1+\frac{c}{2}-\frac{1}{2}\ln\pi-\ln 2<0{,}0231,$$

то

$$(52)\qquad \int_{1/2}^{3/2}R_3\,\mathrm{d}\sigma=1+\frac{1}{2}\ln\pi.$$

Далее (см. (47), (50))

$$(53)\qquad \int_{1/2}^{3/2}R_4\,\mathrm{d}\sigma=\int_{1/2}^{1}R_4\,\mathrm{d}\sigma+\int_{1}^{3/2}R_4\,\mathrm{d}\sigma=R_2+R_5=R_6>-0{,}004,$$

так как $R_5>0$.

Теперь (см. (49), (45), (46), (52), (53))

$$(54)\qquad \int_{1/2}^{3/2}\ln|\zeta(\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma=1+\frac{1}{2}\ln\pi+\frac{c}{2}-R_1+R_6>$$

$$>1+\frac{1}{2}(c+\ln\pi)-0{,}244=\frac{1}{2}(c+\ln 2\pi)+0{,}736>1{,}6$$

и (см. [10], стр. 8)

$$(55)\qquad \int_{3/2}^{\infty}\ln|\zeta(\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma=\int_{3/2}^{\infty}\ln\zeta(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma=\int_{3/2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda_1(n)}{n^\sigma}\,\mathrm{d}\sigma>0.$$

Следовательно, из (9) в силу (54), (55) следует (16).

8. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 3. Исходим из формулы (см. [1], стр. 60, (2))

$$\ln\Gamma(1+z)=-cz+\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\frac{\zeta(m)}{m}z^m,\qquad |z|<1$$

в случае $z=\sigma/2$. Очевидно

$$\frac{1}{4}\leqq\frac{\sigma}{2}\leqq\frac{3}{4}<1,$$

для $\sigma\in\langle 1/2,3/2\rangle$. Следовательно,

$$\int_{1/2}^{3/2}\ln\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)\mathrm{d}\sigma=-\frac{c}{2}+$$

$$+2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^m\zeta(m)}{m(m+1)}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{m+1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{m+1}\right\}=-\frac{c}{2}+R_1.$$

Так как последовательности

$$\{\zeta(m)\}, \quad \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{m+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1}\right\}$$

убывают при $m \geqq 2$, то (по теореме об остатке альтернирующего ряда) R_1 непревосходит величины первого члена ряда:

$$R_1 < \frac{13}{96}\,\zeta(2) = \frac{13}{96}\cdot\frac{\pi^2}{6} < 0{,}14\cdot 1{,}7 < 0{,}24$$

т.е. (46).

9. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 4. Имеем (см. (48), (50), (53))

$$-R_2 = -\int_{1/2}^{1} \sum_{\gamma > 14} \ln\left(1 + \frac{\sigma^2 - \sigma}{\frac{1}{4} + \gamma^2}\right) d\sigma =$$

$$= -\sum_{\gamma > 14} \int_{1/2}^{1} \ln\left(1 - \frac{\sigma - \sigma^2}{\frac{1}{4} + \gamma^2}\right) d\sigma =$$

$$= \sum_{\gamma > 14} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(\frac{1}{4} + \gamma^2\right)^n} \int_{1/2}^{1} (\sigma - \sigma^2)^n\, d\sigma.$$

Так как

$$0 \leqq \sigma - \sigma^2 \leqq \frac{1}{4}$$

для $\sigma \in \langle 1/2, 1\rangle$, то

$$\int_{1/2}^{1} (\sigma - \sigma^2)^n\, d\sigma < \frac{1}{2\cdot 4^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно (см. (51))

$$-R_2 < \frac{1}{2} \sum_{\gamma > 14} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n\left(\frac{1}{4} + \gamma^2\right)^n} <$$

$$< \frac{1}{2} \sum_{\gamma > 14} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n\left(\frac{1}{4} + \gamma^2\right)} < \frac{1}{2} \sum_{\gamma > 14} \frac{1}{\frac{1}{4} + \gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{\gamma > 14} \frac{1}{\frac{1}{4} + \gamma^2} < \frac{1}{6} \cdot 0{,}0231 < 0{,}004$$

т. е. имеет место (47).

10. Наконец мы заметим, что изложенная теория применима и в случае двухпараметрического семейства последовательностей $\{t_\nu(\tau, \alpha)\}$, $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$, $\alpha > 0$, определенных соотношением

$$\vartheta[t_\nu(\tau, \alpha)] = \frac{\pi}{\alpha}\nu + \frac{\tau}{\alpha}, \tag{56}$$

(очевидно, $t_\nu(\tau, 1) = t_\nu(\tau)$, $t_\nu(0, 1) = t_\nu$). Из (56) обычным образом получаем следующие соотношения:

$$t_{\nu+1}(\tau, \alpha) - t_\nu(\tau, \alpha) = \frac{2\pi}{\alpha} \cdot \frac{1}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{1}{\alpha T^{1-\varepsilon} \ln^2 T}\right),$$

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T + T^\varepsilon} 1 = \frac{\alpha}{2\pi} T^\varepsilon \ln \frac{T}{2\pi} + O(\alpha),$$

для $t_\nu(\tau, \alpha)$, $t_{\nu+1}(\tau, \alpha) \in \langle T, T + T^\varepsilon\rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бейтмен, Г.—Эрдей, А.: Высшие трансцендентные функции I, Москва 1973

[2] Edwards, H. M.: Riemann's Zeta-function, Academic Press, New-York and London, 1974.

[3] Littlewood, J. E.: On the zeros of the Riemann zeta-function, Proc. Cambr. Phil. Soc., 22 (1924), 295—318.

[4] Littlewood, J. E.: On the Riemann zeta-function, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 24 (1925), 175—201.

[5] Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана-Зигеля, Acta Arithm., 42 (1982), 1—10.

[6] Selberg, A.: On the remainder in the formula for $N(T)$, number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$, Avhandlinger Norske Vid. Akad. Oslo (1944), No., 1, 1—27.

[7] Selberg, A.: Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, Arch. for Math. og Naturv. B, 48 (1946), No. 5, 89—155.

[8] Titchmarsh, E. C.: On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 27 (1928), 449—458.
[9] Titchmarsh, E. C.: The theory of the Riemann zeta-function, Oxford, 1951.
[10] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

Адрес автора:
Ján Moser
MFF UK, Katedra matematickej analýzy
Matematický pavilón
Mlynská dolina
Bratislava
842 15

Поступило: 30. 7. 1983

SUMMARY

RIEMANN HYPOTHESIS AND ASYMMETRY IN BEHAVIOUR OF POSITIVE AND NEGATIVE VALUES OF $S_1(t)$

Ján Moser, Bratislava

Let

$$S_1(t) = \int_0^t S(v)\,\mathrm{d}v, \qquad S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

In the paper, mean value theorems are proved for $S_1(t)$ with respect to certain collections of disconnected sets. From these theorems it follows that the positive and negative values of $S_1(t)$ behave asymmetrically in the following sense: the area of the figure corresponding to the negative parts of the graph of $S_1(t)$, $t \in \langle T, T + T^{\varepsilon} \rangle$ considerably exceeds that of the figure corresponding to the positive parts of the said graph, ($0 < \varepsilon$ is an arbitrarily small number).

SÚHRN

RIEMANNOVA HYPOTÉZA A ASYMETRIA V CHOVANÍ SA KLADNÝCH A ZÁPORNÝCH HODNÔT FUNKCIE $S_1(t)$

Ján Moser, Bratislava

Nech

$$S_1(t) = \int_0^t S(v)\,\mathrm{d}v, \qquad S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

V práci sú dokázané vety o strednej hodnote pre funkciu $S_1(t)$ vzhľadom na isté sústavy nesúvislých množín. Z týchto viet vyplýva asymetria v správaní sa kladných a záporných hodnôt funkcie $S_1(t)$ v nasledovnom zmysle: plocha (miera) figury, ktorá odpovedá záporným častiam grafu funkcie $S_1(t)$, $t \in \langle T, T + T^{\varepsilon} \rangle$, značne prevyšuje plochu figúry, ktorá zodpovedá kladným častiam spomenutého grafu, ($0 < \varepsilon$ je ľubovoľne malé číslo).