UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLVIII—XLIX — 1986

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ ПРОЦЕССОВ В ОДНОРОДНЫХ СТРУКТУРАХ

ИВАН ХАВЕРЛИК — ИВАН ЯНЕТКА, Братислава

Подходящее средство для моделирования непрерывных динамических систем представляют однородные структуры [2]. Преимущество однородных структур (ОС) проявляется тоже при моделировании процессов, которые обыкновенно моделируются схемами разностных уравнений. В настоящей работе рассматривается несколько подходов к моделированию с помощью ОС. Однородные структуры используются в смысле их определения в работе [3] этого сборника.

Сначала будем рассматривать динамическую систему, функционирование которой можно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями. В связи с ОС нас всегда интересуют пространственные динамические системы; из них следует, что уравнение функционирования такой системы имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}y(x,\, t)}{\mathrm{d}x} = f(t,\, y(x,\, t)). \tag{1}$$

Функция $y(x, t)$ является решением этого дифференциального уравнения, причем x представляет r-мерный вектор. С точки зрения моделирования такой пространственной динамической системы на ОС, можно использовать два подхода:

1. имитировать на ОС приближенное численное решение уравнения (1) и в таком случае моделировать в некоторой области r-мерной ОС значение функции $y_t(x)$ в различных моментах времени t;

2. понимать функцию $y(x, t)$ как состояние ОС, зависящее от времени t (в данных моментах времени) и искать к данной функции $y(x, t)$ такую глобальную функцию переходов G, для которой

$$y(x,\, t+1) = G(y(x,\, t)). \tag{2}$$

К такой глобальной функции переходов G уже существует локальная функция переходов однозначно [3].

Очевидно, что первый подход можно реализовать в том случае, когда дифференциальное уравнение (1) численно решаемое и решением для вектора x с целочисленными координатами является опять целое число, вообще, число из множества допустимых состояний.

Второй подход сводится к первому в том случае, когда локальная функция определяется на основе численного решения дифференциального уравнения (1). С первым подходом тесно связано решение схем разностных уравнений на ОС.

Рассмотрим сначала пример разностной схемы

$$x_i^{t+1} = 1/2(x_{i-1}^t + x_{i+1}^t), \tag{3}$$

для решения моделей роста в экологических системах [1], или для решения уравнения теплопроводимости [4]. Выясним теперь, что сложность решения этой задачи зависит от мощности допустимого множества состояний.

1. Пусть сначала множеством состояний является множество всех вещественных чисел. Задачу можно решать на одномерной ОС, причем начальные значения x_i^0 расположены таким способом, как это показано на *рис. 1а*. Окрестность ячейки a_0 этой ОС имеет вид показанный на *рис. 1б*.

...	x_1^0	x_2^0	x_3^0	...	x_{q-2}^0	x_{q-1}^0	x_q^0	...

Рис. 1а

a_1	a_0	a_2

Рис. 1б

Обозначим для задания функции переходов состояние ячеек ОС a_0, a_1, a_2 через x_0, x_1, x_2 соответственно. Тогда локальная функция переходов имеет вид

$$L(x_0, x_1, x_2) = 1/2(x_0 + x_2).$$

2. Пусть далее автоматы сети могут иметь только набор двух внутренних состояний: 0 и 1. Тогда эту задачу можно решать на двухмерной ОС, для которой множество допустимых состояний является множеством двоичных наборов (x, y, z) [4].

Тогда внутри некоторой области расположим в x-компонентах состояний двоичные записи начальных состояний x_i^0 так, как это показано на *рис. 2а* — младшие разряды каждой такой записи расположены внизу P и y-компоненты и z-компоненты сначала нулевые. Окрестность ячейки x_0 ОС имеет в этом случае вид показанный на *рис. 2б*. Обозначим для задания локальной функции переходов состояние ячейки α_i через (x_i, y_i, z_i) и состояние ячейки α_0 после перехода через (x_0', y_0', z_0'). Положим:

1. $$x_0' = \begin{cases} (x_1 + x_2 + y_0) \pmod 2), & \text{если } z_0 = 1; \\ x_0, \quad \text{если } z_0 = 0; \end{cases}$$

2. $$y_0' = \begin{cases} x_3x_4 \vee x_3y_5 \vee x_4y_5, & \text{если } z_5 = 1; \\ 0, \quad \text{если } z_5 = 0; \end{cases}$$

3. $$z_0' = z_5.$$

	0	0	0		0	0	0	
...	x_1^0	x_2^0	x_3^0	...	x_{q-2}^0	x_{q-1}^0	x_q^0	...
	0	0	0		0	0	0	

Рис. 2а

α_1		α_2
α_3	α_0	α_4
	α_5	

Рис. 2б

Локальная функция переходов реализует сложение по (mod 2) очередных x_i^t одновременно с продолжающимся сложением старших разрядов предыдущих x_i^τ. Очевидно, что в таком случае разряды числа x_i^t появляются в соответствующих ячейках в различные моменты времени.

С пониманием функции $y(x, t)$ как состоянием ОС (второй подход) тесно связан вопрос существования локальной функции переходов, соответствующей функции (2), т.е. вопрос является ли функция G в (2) глобальной функцией некоторой однородной структуры. (Этот вопрос решается в работе [3] этого сборника.) Интересным является случай, когда функция $y(x, t)$ определяет на ОС ненулевую конфигурацию в виде некоторой фигуры (определенной, например, ненулевыми клетками) и всякая следующая конфигурация неограниченно растет, сохраняя внешний вид исходной фигуры (*рис. 3*). Можно показать, что существует ОС, в которой всякая ненулевая конфигурация растет сохраняя внешний вид фигуры определенной исходной конфигурацией. При конструкции такой ОС нужно моделировать рост во всех направлениях отдельно — соответственно компонентам состояния. Если некоторая конфигурация не соответствует заданной фигуре, то надо перейти в выделенное состояние x_0 в той ячейке ОС, в которой возникло нарушение фигуры. Далее состояние x_r обеспечивает переход центральной ячейки фигуры в состояние x_δ и переход остальных ячеек в нулевое состояние. Исходя из состояния x_δ, уже нетрудно обеспечивается равномерный рост фигуры.

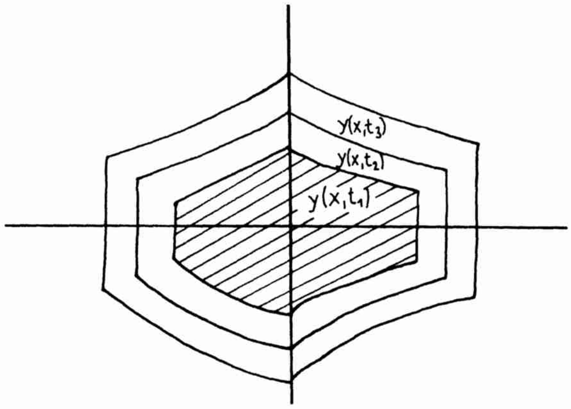

Рис. 3

Сложные разностные процессы моделируются на ОС в нескольких шагах — переходах состояний ОС соответствующих изменению решения разностного уравнения в течении единицы времени.

В таких случаях, шаблон соседства для отдельных шагов иногда менее сложный, чем в случае перехода в один шаг. Примером такого метода моделирования могут служить пространственные модели хищник — жертва и сложные модели роста фигур.

О шаблоне соседства индекса m будем говорить в том случае, если в ОС вида $\langle Z^k, E_m, V, L\rangle$, где $V = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}\}$ есть множество k-мерных векторов $\alpha_i = (m_1^i, \ldots, m_k^i)$, $i = 1, \ldots, h-1$, для шаблона соседства имеет место

$$\max \{m_1^1, \ldots, m_k^1, \ldots, m_1^{h-1}, \ldots, m_k^{h-1}\} = m.$$

Используя индекс шаблона соседства m, для локальной функции перехода будем писать: $\bar{x}_0 = L(x_0, x_1^m, \ldots, x_{h-1}^m)$.

Будем рассматривать некоторую пространственную экологическую модель роста с определенным расширением. Пусть переход за единицу времени имеет два этапа:

1. этап роста, который описывается локальной функцией перехода

$$\bar{x}_0 = L(x_0, x_1^m, \dots, x_{h_1}^m). \tag{4}$$

(Предполагаем, что рост зависит от состояния всех ячеек ОС до расстояния m от ячейки α_0.)

2. этап миграции, который описывается функцией

$$\bar{\bar{x}}_0 = e(\bar{x}_0, \bar{x}_1^p, \dots, \bar{x}_{h_2}^p). \tag{5}$$

Из (4) и (5) получается

$$\bar{\bar{x}}_0 = e(L(x_0, x_1^m, \dots, x_{h_1}^m), L(x_1^p, x_{1,1}^{p+m}, \dots, x_{1,h_1}^{p+m}), \dots$$
$$\dots, L(x_{h_2}^p, x_{h_2,1}^{p+m}, \dots, x_{h_2,h_1}^{p+m})). \tag{6}$$

Значит, миграция реализуется во всех ячейках ОС до растояния p от ячейки α_0. Из (6) следует, что первый и второй этапы можно описать единой локальной функцией переходов, изменение состояния ячейки α_0 в которой зависит от состояния ячеек до расстояния $m + p$ от α_0.

И так, первый этап — этап роста, который описан уравнением (4) — соответствует решению дифференциального уравнения типа (1) при переходе к разностному уравнению. Разностное уравнение решается уже непосредственно однородной структурой. Второй этап — этап миграции — решается однородной структурой. Из этого следует, что таким способом дифференциальное уравнение типа (1) решается однородной структурой.

В следующем рассмотрим более сложную пространственную экологическую модель роста и миграции трех видов вместе. Модель состоит из векторного дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial z(x, y, t)}{\partial t} = \begin{cases} f_1(t, z(x, y, t)) + m_1(x, y, t), & \text{если } z(x, y, t) \leqslant P(x, y, t) \quad (7) \\ f_2(t, z(x, y, t)) + m_2(x, y, t), & \text{если } z(x, y, z) > P(x, y, t), \quad (8) \end{cases}$$

где

$$-z(x, y, t) \leqslant m_1(x, y, t) \leqslant \sum_{i, j = 1, \dots, d} z(x \pm i, y \pm j, t),$$

$$-z(x, y, t) \leqslant m_2(x, y, t) \leqslant \sum_{i, j = 1, \dots, d} z(x \pm i, y \pm j, t),$$

и

$$f_1(t, z(x, y, t)) \geqslant -z(x, y, t),$$

$$f_2(t, z(x, y, t)) \geqslant -z(x, y, t).$$

Функции f_1, f_2 реализуют рост видов, m_1, m_2 моделируют миграцию в пространстве до расстояния d. $P(x, y, t)$ обозначает емкость территории — порог, при котором изменяется функция переходов. Для отдельных видов D — хищник, K — жертва, P -- пища получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial z_D(x, y, t)}{\partial t} = \\
= \begin{cases} f_{1,D}(t, z_D(x, y, t)) + m_{1,D}(x, y, t), & \text{если } z_D(x, y, t) \leqslant P_D(x, y, t) \\ f_{2,D}(t, z_D(x, y, t)) + m_{2,D}(x, y, t), & \text{если } z_D(x, y, t) > P_D(x, y, t) \end{cases} \\
\frac{\partial z_K(x, y, t)}{\partial t} = \\
= \begin{cases} f_{1,K}(t, z_K(x, y, t)) + m_{1,K}(x, y, t), & \text{если } z_K(x, y, t) \leqslant P_K(x, y, t) \\ f_{2,K}(t, z_K(x, y, t)) + m_{2,K}(x, y, t), & \text{если } z_K(x, y, t) > P_K(x, y, t) \end{cases} \\
\frac{\partial z_P(x, y, t)}{\partial t} = \\
= \begin{cases} f_{1,P}(t, z_P(x, y, t)) + m_{1,P}(x, y, t), & \text{если } z_P(x, y, t) \leqslant P_P(x, y, t) \\ f_{2,P}(t, z_P(x, y, t)) + m_{2,P}(x, y, t), & \text{если } z_P(x, y, t) > P_P(x, y, t), \end{cases}
\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$-z_D(x, y, t) \leqslant m_{l,D}(x, y, t) \leqslant \sum_{i,j=1,\dots,d} z_D(x \pm i, y \pm j, t), \qquad l = 1, 2$$

$$-z_K(x, y, t) \leqslant m_{l,K}(x, y, t) \leqslant \sum_{i,j=1,\dots,d} z_K(x \pm i, y \pm j, t), \qquad l = 1, 2$$

$$-z_P(x, y, t) \leqslant m_{l,P}(x, y, t) \leqslant \sum_{i,j=1,\dots,d} z_P(x \pm i, y \pm j, t) \qquad l = 1, 2$$

и

$$f_l(t, z_D(x, y, t)) \geqslant -z_D(x, y, t), \qquad l = 1, 2$$

$$f_l(t, z_K(x, y, t)) \geqslant -z_K(x, y, t), \qquad l = 1, 2$$

$$f_l(t, z_P(x, y, t)) \geqslant -z_P(x, y, t), \qquad l = 1, 2.$$

Возможность решения системы дифференциальных уравнений (9) с помощью ОС следует из того, что все уравнения этой системы являются уравнениями типа (1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Haverlík, I.—Janetka, I.: Discrete cybernetic modelling of ecosystems. Ecology (CSSR), Vol. 3, No. 1, 45—59, 1984.
[2] Haverlík, I.—Janetka, I.: Kybernetické modelovanie geografickej sféry. Zborník Kybernetika a jej interdisciplinárne pôsobenie. Bratislava 1980.
[3] Яанетка, И.: К теории моделирования на однородных структурах (в наст. сборнике).
[4] Подколзин, А.: Моделирование на однородных структурах. Проблемы кибернетикы вып 31, Москва 1976.

Адрес авторов: Ivan Haverlík
Ivan Janetka

Katedra teoretickej kybernetiky
MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступило: 7. 3. 1984

RESUMÉ

MODELOVANIE DIFERENČNÝCH PROCESOV HOMOGÉNNYMI ŠTRUKTÚRAMI

Ivan Haverlík — Ivan Janetka, Bratislava

V práci sa uvádzajú metódy modelovania priestorových dynamických systémov pomocou homogénnych štruktúr. Vychádza sa z toho, že správanie modelovaných systémov možno popísať diferenciálnou rovnicou tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y(x, t)}{\mathrm{d}x} = f(t, y(x, t)).$$

Ďalej sa rozoberá metóda modelovania homogénnymi štruktúrami priestorových dynamických ekosystémov s migráciou, ktoré možno popísať vektorovou diferenciálnou rovnicou (podľa počtu súčasne uvažovaných druhov)

$$\frac{\partial z(x, y, t)}{\partial t} = f_i(t, z(x, y, t)) + m_i(x, y, t).$$

Ak hodnoty zložiek $z(x, y, t)$ neprekračujú hodnoty zložiek určenej prahovej funkcie $P(x, y, t)$ — kapacity oblasti, rast jednotlivých druhov je určený vektorovou funkciou rastu

$f_i(t, t(x, y, t))$ a migrácia funkciou $m_1(x, y, t)$, $(i = 1)$. V opačnom prípade sa funkcie rastu a migrácie vo všeobecnosti menia ($i = 2$, t. j. $f_2(t, z(x, y, t))$ resp. $m_2(x, y, t)$).

SUMMARY

MODELLING OF PARTIAL PROCESSES BY MEANS OF HOMOGENEOUS STRUCTURES

Ivan Haverlík — Ivan Janetka, Bratislava

In the present paper the methods of modelling spatial dynamic systems by means of homogeneous structures are given. The procedure is based on the fact that the behaviour of the modelling ecosystems can be characterized by the partial equation

$$\frac{\mathrm{d}y(x, t)}{\mathrm{d}x} = f(t, y(x, t)).$$

The method of modelling homogeneous structures of spatial dynamic ecosystems with migration is also analysed. The mentioned systems can be characterized by the vector partial equation (according to the number of simultaneously considered kinds)

$$\frac{\partial z(x, y, t)}{\partial t} = f_i(t, z(x, y, t)) = m_i(x, y, t).$$

If the values of the components of $z(x, y, t)$ do not exceed the values of the components of the determined threshold function $P(x, y, t)$ — the capacity of the domain-sphere, the growth of each kind is determined by the vector growth function $f_1(t, z(x, y, t))$ and the migration by the function $m_1(x, y, t)$ $(i = 1)$. In opposite case the growth and migration functions change in general ($i = 2$, i.e. $f_2(t, z(x, y, t))$ or $m_2(x, y, t)$).