UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLVIII—XLIX — 1986

К ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ОДНОРОДНЫХ СТРУКТУРАХ

ИВАН ЯНЕТКА, Братислава

1. Введение

В последнее время расширяется область применения математических моделей при исследовании систем физической реальности. При исследовании динамики изменения пространственной организации систем кажется выгодным использовать в качестве моделирующего средства однородные структуры: при помощи геометрической сети поверхности разобъем систему на относительно однородные части — подсистемы, в которых входные и выходные объекты отображают зависимость переноса информации между подсистемами. Изменения состояний подсистем соответствуют изменениям пространственной организации всей системы, и при этом подсистемам соответствуют ячейки однородной структуры как их математическая модель [3, 4].

Однородные структуры служат тоже основой для моделирования в таких областях, как распознавание образцов, адаптивные системы, вычислительные структуры, биологическое моделирование и т. п. Однородные структуры представляют собой математическую модель для клеточных организмов. Хотя при помощи однородных структур нельзя моделировать деление клеток, они могут использоваться для очень интересных моделей процессов роста фигур клеточных организмов.

Теория однородных структур возникла в результате попыток создания моделей, реализующих процесс биологического самовоспроизведения [6]. Сегодня изучение однородных структур представляет и чисто математический интерес [1, 7, 8].

2. Формальные определения

Определение 1. *Однородной структурой* (ОС) называется четверка $\langle Z^k, E_n, V, \mathscr{L} \rangle$, где Z^k есть множество k-мерных векторов с целыми координатами, называемых ячейками ОС, $E_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ — множество состояний, которые может принимать ячейка ОС, $V = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}\}$ — набор векторов из Z^k, называемый шаблоном соседства ОС и определяющий для каждой ячейки α ее окрестность $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha + \alpha_1, \ldots, \alpha + \alpha_{h-1}\}$, $\mathscr{L}$ есть отображение $(E_n)^h$ в E_n, называемое локальной функцией переходов. Если в момент t состояния ячеек $\alpha, \alpha + \alpha_1, \ldots, \alpha + \alpha_{h-1}$ были равны соответственно $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$, то в момент $t+1$ состояние ячейки α полагается равным $\mathscr{L}(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1})$.

Определение 2. *Состояние* ОС $\langle Z^k, E_n, V, \mathscr{L} \rangle$ есть функция f, ставящая каждой ячейке ее состояние из множества E_n

$$f\colon Z^k \to E_n$$

Определение 3. Пусть $\hat{E}$ будет обозначать множество всех состояний ОС $\langle Z^k, E_n, V, \mathscr{L} \rangle$, т.е. $\hat{E} = \{f | f\colon Z^k \to E_n\}$.

Пусть для отображения $\mathscr{L}\colon (E_n)^h \to E_n$ существует отображение $G\colon \hat{E} \to \hat{E}$, причем G определяется следующим образом. Для каждых $f, g \in \hat{E}$, $g = G(f)$ тогда и только тогда, когда для каждой ячейки α имеет место $g(\alpha) = \mathscr{L}(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \ldots, f(\alpha + \alpha_{h-1}))$. Отображение G тогда называется *глобальной функцией перехода* в ОС.

Определение 4. *Поведением* ОС называется последовательность $\{f_i\}$ ее состояний такая, что $f_{i+1} = G(f_i)$, где G — глобальная функция перехода в ОС.

Пусть первое состояние в поведении ОС есть f_0, $\langle f_0 \rangle$ обозначим множество всех разных состояний в поведении ОС начиная с f_0.

Пусть $m_1, \ldots, m_k$ — натуральные числа, тогда вектор $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_k)$. Обозначим $V_{\bar{m}}$ совокупность всех векторов $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$, таких, что $\beta \neq 0$, $|\beta_i| < m_i$ и все β_i — целые числа. Предпологаем, что элементы $V_{\bar{m}}$ упорядочены фиксированным способом. Класс всех ОС вида $\langle Z^k, E_n, V_{\bar{m}}, \mathscr{L} \rangle$ обозначим $S(k, n, \bar{m})$ [8].

В многих работах [1] говорят тоже об индексе соседства Мура $V_{\bar{m}}$, в котором определяется вектор $\bar{m} = (1, 1, \ldots, 1)$. Будем далее рассматривать лишь такие ОС, у которых $\mathscr{L}(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Состояние 0 в этом случае является состоянием покоя.

Определение 5. Состояние ОС $\langle Z^k, E_n, V, \mathscr{L} \rangle$, у которого лишь конечное число ячеек находится в отличном от 0 состоянии, называется *конфигурацией* ОС. Множество всех конфигураций обозначим $\bar{E}$.

Определение 6. Конечные подмножества ячеек ОС $\langle Z^k, E_n, V, \mathscr{L}\rangle$ будем называть *блоками*, состояние блока — конфигурацией этого блока.

Интуитивным объектом того, что мы обозначили как ОС, является бесконечная регулярная сеть из идентичных автоматов в k-мерном пространстве, где каждый автомат сети может обмениваться информацией только с конечным числом своих соседей и где каждый автомат сети связан со своими соседами одним и тем же путем.

Определение 7. Системой называется шестерка $\langle U, Y, Q, \delta, \lambda, q_0\rangle$, где U, Y и Q — конечные множества, называемые входным, выходным множеством и множеством внутренних состояний. Отображение
δ: $Q \times U \to Q$ есть функция перехода, отображение
λ: $Q \times U \to Y$ есть функция выхода и q_0 начальное состояние [2].

Замечание 1. Нетрудно показать, что каждый автомат в ОС является системой. Для этой цели мы будем рассматривать случай, когда

$$U = E_n^{h-1}, \quad Y = E_n^{h-1}, \quad Q = E_n, \quad \delta\colon E_n \times E_n^{h-1} \to E_n,$$

(δ совпадает с локальной функцией переходов ОС),

$$\lambda\colon E_n \times E_n^{h-1} \to E_n^{h-1} \quad \text{и} \quad \lambda = \delta \times \delta \times \ldots \times \delta.$$

ОС представляет потом некоторую композицию таких систем конечных автоматов с $h-1$ входами и $h-1$ выходами, которая задается при использовании понятия индекс соседства.

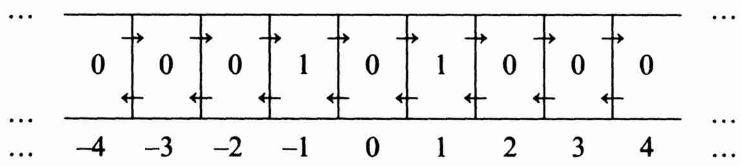
Пример 1. Рассмотрим ОС А класса $S(1, 2, (1))$. ОС А представляет одномерную сеть автоматов (*рис. 1*), которые могут принимать только два внутренних состояния: 0 и 1. Индекс соседства Мура $V_{\bar{m}} = \{(-1), (1)\}$, следовательно для каждой ячейки a ее окресность $V_a = \{a, a+1, a-1\}$.

3. Глобальные и локальные функции переходов

При использовании ОС как математической модели изменения пространственной организации систем физической реальности важную роль играет отношение глобальной и локальной функции перехода.

Будем далее рассматривать лишь ОС класса $S(2, 2, \bar{m})$. Переход к ОС класса $S(k, n, \bar{m})$ не вызывает затруднений. Пусть далее мощность множества $V(a)$, определенного элементами $V_{\bar{m}}$, есть m.

Замечание 2. Очевидно, что всех взаимно различных локальных функций перехода $\mathscr{L}$: $\{0, 1\}^m \to \{0, 1\}$, а также ОС класса $S(2, 2, \bar{m})$ равно 2^{2^m-1} (напомним, что $\mathscr{L}(0, 0) = 0$), всех состояний $\hat{E}$ ОС класса $S(2, 2, \bar{m})$ равно $2^{\boldsymbol{Z}}$, где $\boldsymbol{Z}$ мощность множества Z^2, и всех функций G: $\hat{E} \to \hat{E}$ равно $(2^{\boldsymbol{Z}})^{2^{\boldsymbol{Z}}}$.



а) одномерная сеть автоматов

$i-1$	i	$i+1$	L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

б) таблица локальной функции перехода

	…	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	…
$T=0$	…	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	…
$T=1$	…	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	…
$T=2$	…	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	…
$T=3$	…	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	…
…	…	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	…

в) последовательность состояний — конфигураций

Рис. 1

Теорема 1. Каждой локальной функции перехода однозначно соответствует одна и только одна глобальная функция перехода.

Доказательство. Пусть к локальной функции перехода $\mathscr{L}$ существуют по крайней мере две разные глобальные функции перехода G_1, G_2. Потом существует по крайней мере одно состояние ОС f такое, что

$$f' = G_1(f) \neq G_2(f) = f''$$

и следовательно

$$\mathscr{L}(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \ldots, f(\alpha + \alpha_m)) = f'(\alpha) \neq f''(\alpha) =$$
$$= \mathscr{L}(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \ldots, f(\alpha + \alpha_m)),$$

но это спорно.

Так как $2^{2^m} \leqslant (2^Z)^{2^Z}$, не каждая функция $G\colon \hat{E} \to \hat{E}$ является глобальной функцией перехода некоторой ОС класса $S(2, 2, \bar{m})$. Пусть $G\colon \hat{E} \to \hat{E}$ — некоторое отобраджние. Будем решать вопрос о том, существует ли ОС с поведением, описанным функцией G как её глобальной функцией перехода.

Замечание 3. Всякая локальная функция перехода ОС класса $S(2, 2, \bar{m})$ является функцией алгебры логики и её можно представить в дизъюнктивной нормальной форме:

$$\mathscr{L}(x_0, \ldots, x_{m-1}) = \bigvee_{\substack{(\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-1}) \\ \mathscr{L}(\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-1}) = 1}} x_0^{\sigma_0} \,\&\ldots\&\, x_{m-1}^{\sigma_{m-1}}$$

или $\mathscr{L}(x_0, \ldots, x_{m-1}) = 0$, где

$$x^\sigma = \begin{cases} \bar{x} & \text{при } \sigma = 0 \\ x & \text{при } \sigma = 1 \end{cases}$$

и так

$$g(\alpha) = \mathscr{L}(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \ldots, f(\alpha + \alpha_{m-1})) =$$
$$= \bigvee_{\substack{(\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-1}) \\ \mathscr{L}(\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-1}) = 1}} f(\alpha)^{\sigma_0} \,\&\ldots\&\, f(\alpha + \alpha_{m-1})^{\sigma_{m-1}} \tag{1}$$

или $g(\alpha) \equiv 0$ для всех α.

Определение 8. Системы локальных функций перехода $\{\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{2^m-1}\}$ ОС класса $S(2, 2, \bar{m})$ таких, что каждая из этих функций в дизъюнктивной нормальной форме содержит только один вектор $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-1})$, для которого $\mathscr{L}(\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-1}) = 1$, будем называть *базисом* локальных функций перехода.

Замечание 4. Очевидно, что любую локальную функцию перехода

$\mathscr{L} \not\equiv 0$ ОС класса $S(2, 2, \bar{m})$ можно выразить как дизъюнкцию некоторых функций из базиса.

Пусть $g = G(f)$. Очевидно, что если

$$g(\alpha) = 1 = f(\alpha)^{\sigma_0} \& \dots \& f(\alpha + \alpha_{m-1})^{\sigma_{m-1}},$$

то

$$f(\alpha) = \sigma_0, \dots, f(\alpha + \alpha_{m-1}) = \sigma_{m-1},$$

потом функция

$$\mathscr{L}(x_0, \dots, x_{m-1}) = x_0^{\sigma_0} \& \dots \& x_{m-1}^{\sigma_{m-1}} = x_0^{f(\alpha)} \& \dots \& x_{m-1}^{f(\alpha + \alpha_{m-1})}$$

является функцией базиса, которая должна образовать локальную функцию перехода, если она к функции G существует.

Решение заданной проблемы сводится к верификации (1) и построению функции базиса для локальной функции перехода.

4. Сложность решения некоторых задач на однородных структурах

ОС являются важным средством для изучения параллельных процессов и играют для них примерно такую же роль, как машины Тьюринга для последовательных вычислений. Нетрудно показать, что однородная структура допускает моделирование машины Тьюринга и наоборот. С другой стороны, практическая реализация однородных структур становится весьма реальной с появлением больших интегральных схем.

Один подход к проблеме сложности решения некоторых задач на однородных структурах состоит в том, что мы рассматриваем схемы из клеточных функциональных элементов — автоматов ОС.

Пусть $L(n)$ — минимальное число элементов ОС, достаточное для реализации любой функции алгебры логики от n аргументов. В работе [9]

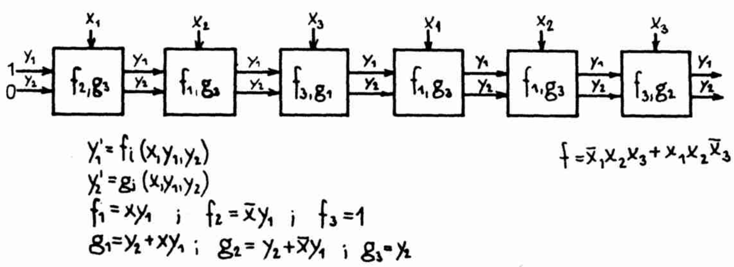


Рис. 2. Реализация функций $f = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3$ на однородной сети автоматов

предложена конструкция одномерной сети автоматов, в которой каждый автомат вычисляет две функции алгебры логики трех переменных и у всех автоматов этой сети один шаблон соседства (*рис. 2*). Нетрудно показать, что на основе этой конструкции можно сделать конструкцию однородной структуры, у которой начальная конфигурация некоторых автоматов — значения n переменных и состояние некоторого автомата ОС через какое-нибудь время является значением функции алгебры логики n переменных.

При этом локальная функция переходов строится на основе функций, вычисляемых автоматами сети и состояние автомата является упорядоченной тройкой (S_0, S_1, S_2), где S_0 не меняется и обозначает код функций, на основе которых должен автомат работать (*рис. 3*).

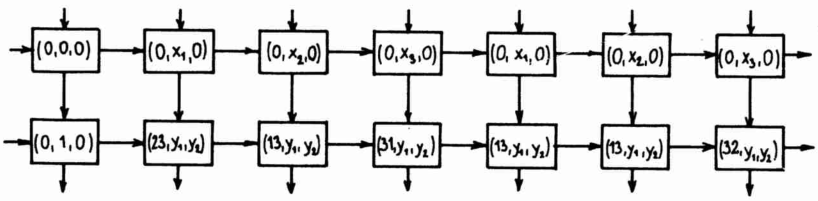


Рис. 3. Переход к ОС при реализации функций $f = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3$

При этой конструкции верхняя оценка $L(n)$ есть $n \cdot 2^n$.

Допустим типы элементов изображенных на *рис. 4*.

В работе [5] показано, что если построить схему прямоугольника, составленного из таких элементов (каждый элемент можно повернуть на

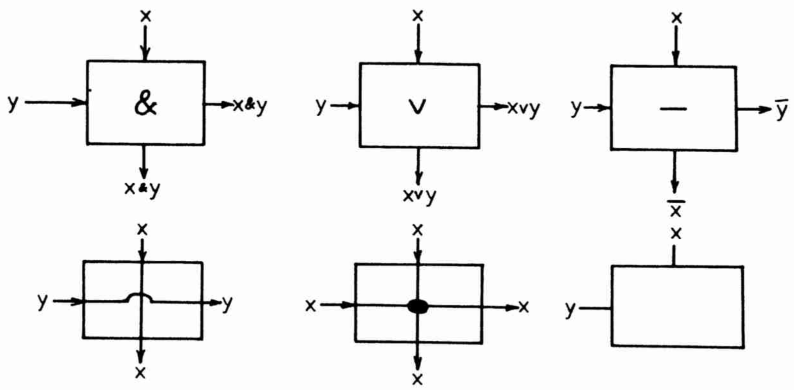


Рис. 4

угол $\frac{k \cdot \pi}{2}$; $k = 1, 2, 3, \ldots\Big)$, потом $L(n) \asymp 2^n$ и была построена схема, реализующая систему K_n всех конъюкций $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$, имеющая сложность не более $c \cdot n \cdot 2^n$, где c — некоторая константа.

Допустим, что имеем ОС

$$\boldsymbol{D} = \langle Z^2, \{(\alpha, \beta, \gamma);\ \alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};\ \beta, \gamma \in \{0, 1\}\},$$
$$\{(-1, 0), (0, 1)\}, \mathscr{L} \rangle,$$

где

$$\mathscr{L}((0, Z_1, Z_2), (Z_3, Z_4, x), (Z_5, y, Z_6)) = (0, x \,\&\, y, x \,\&\, y)$$
$$\mathscr{L}((1, Z_1, Z_2), (Z_3, Z_4, x), (Z_5, y, Z_6)) = [1, x \vee y, x \vee y)$$
$$\mathscr{L}((2, Z_1, Z_2), (Z_3. Z_4, x), (Z_5, y, Z_6)) = (2, \bar{y}, \bar{x})$$
$$\mathscr{L}((3, Z_1, Z_2), (Z_3, Z_4, x), (Z_5, y, Z_6)) = (3, y, x)$$
$$\mathscr{L}((4, Z_1, Z_2), (Z_3, Z_4, x), (Z_5, x, Z_6)) = (4, x, x)$$
$$\mathscr{L}((5, Z_1, Z_2), (Z_3, Z_4, x), (Z_5, y, Z_6)) = (5, Z_1, Z_2),$$
$$Z_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Определение ОС $\boldsymbol{D}$ соответствует определению элементов изображенных на *рис. 5*. Обозначим через $\mathscr{A}(n)$ минимальное количество элементов блока $\boldsymbol{D}$, достаточное для решения системы всех функций алгебры логики от n аргументов $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Теорема 2. $\mathscr{A}(n) \asymp n \cdot 2^{2^n}$.

Доказательство. (Верхняя оценка.) Представим все функции от n переменных в современной дизъюнктивной нормальной форме. Упорядочим функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ так, чтобы любые две функции отличались друг от друга только одной конъюкцией. Предлагаемый блок будет состоять из 2^{2^n} подблоков. В каждом подблоке реализуется некоторая конъюнкция K_i и «прибавление» и «вычитание» ее из функции, полученной на предыдущем шаге — см. *рис. 5*. Очевидно, что сложность схемы по порядку не больше, чем $n \cdot 2^{2^n}$.

$(3, x_1, x_1)$	$(3, -, -)$			
$(3, x_2, x_2)$	$(0, -, -)$			
$\vdots$	k_1	k_2	$\ldots$	
$(3, x_n, x_n)$				
	$(3, f_1, -)$	$(2, f_2, f_2)$		

Рис. 5

(Нижняя оценка.) Рассмотрим произвольный блок — приямоугольник, реализующий систему всех функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Очевидно, что в блоке имеется некоторая сторона a, на которой расположено по крайней мере $\frac{2^{2^n}}{4}$ выходов, и сторона, на которой расположено по крайней мере $\frac{n}{4}$ входов. Обозначим её b. Если стороны a, b перпендикулярны, то утверждение очевидно. Пусть стороны a, b параллельны или совпадают. В этом случае рассечем блок отрезком прямой c, перпендикулярным стороне a, на подблоки I и II так, чтобы по обе стороны отрезка было не меньше $\frac{n}{8} - 1$ входов. Пусть для определенности в подблоке II имеется не менее выходов, чем в подблоке I. Так как в подблоке I имеется не менее $\frac{n}{8} - 1$ входов, то в подблоке II их не более $\frac{7}{8} n + 1$. Подблок II, содержащий не менее $2^{2^n - 1}$ выцходов всего блока, должен иметь не менее $n - 3$ «входов«, т.е. входов всего блока и входов элементов на отрезке c. Поэтому подблок II имеет не менее $n - 3 - \left(\frac{7}{8} n + 1\right) = \frac{n}{8} - 4$ входов на отрезке c. Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Адальев, В. З.: К теории однородных структур. Академия наук Эстонской ССР. Таллин 1972.

[2] Brunovský, P.—Černý, J.: Základy matematickej teórie systémov. Veda, Bratislava 1980.

[3] Haverlík, I.—Janetka, I.: Kybernetické modelovanie geografickej sféry a teória systémov. Zborník 10. sympózia SKS pri SAV, Bratislava 1980.

[4] Haverlík, I.—Janetka, I.: Discrete cybernetic modelling of ecosystems. Ecology CSSR. Vol. 3, No. 1, 1984.

[5] Кравцов, С. С.: О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационныцх элементов.

[6] Дж. фон Нейман: Теория самовоспроизводящихся автоматов. Мир. Москва 1971.

[7] Подколзин, А. С.: О сложности моделирования в однородных структурах. Проблемы кибернетики, вып. 30. Москва 1975.

[8] Подколзин, А. С.: О поведениях однородных структур. Проблемы кибернетики. вып. 31. Москва 1976.

[9] Short, R. A.: Two Rail Cellural Arrays. AFIPS Conf. Proc. Pt. J. Spartan Books 1965.

Адреса автора:
Ivan Janetka
Katedra teoretickej kybernetiky MFF UK
842 15 Bratislava,
ČSSR

Поступило: 8. 2. 1984

SÚHRN

K TEÓRII MODELOVANIA NA HOMOGÉNNYCH ŠTRUKTÚRACH

Ivan Janetka, Bratislava

V práci sú uvedené výsledky z matematickej teórie homogénnych štruktúr. Uvádzame zložitosť modelovania niektorých systémov na homogénnych štruktúrach.

SUMMARY

ON THE THEORY OF MODELLING ON THE HOMOGENEOUS STRUCTURES

Ivan Janetka, Bratislava

In the paper we have attempted to summarize our work on the mathematical theory of homogeneous structures. The complexity of modelling some systems on the homogeneous structures is discussed in this paper.