

Werk

Label: Article

Jahr: 1987

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?312901348_48-49|log29

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

СЛОЖНОСТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ БУЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ

МИЛАН ФТАЧНИК, Братислава

Очень широкую область исследования представляет сегодня теория распознавания образов, содержащая множество подходов и конкретных алгоритмов направленных на решение отдельных случаев задачи распознавания. Задачей распознавания образов понимаем задачу создания устройства (алгоритма), способного отнести незнакомый образ к одному из классов образов. Конкретный подход к распознаванию определяется тем, какие ограничения, предположения или методы выбираются для решения задачи распознавания. В дальнейшем ограничимся распознаванием изображений, т. е. визуальных образов.

Можно предполагать, что изображение снимается каким-то оптическим устройством. При этом трехмерный образ отображается на плоскость а плоскость при помощи дигитального преобразователя кодируется в матрицу (обычно предполагают в квадратную). Таким образом строится к изображению его модель, на которой проходит собственная обработка. Особенным подклассом класса всех моделей визуальных образов является класс булевых матриц.

Оказывается, что булевы матрицы представляют удобное моделиционное средство именно для изображений, характеризованных какими-то линиями, кривыми или непрерывными поверхностями, ограничениями которых являются опять линии или кривые.

Наш подход к исследованию булевых матриц как моделей визуальных образов и их обработке выходит из следующих рассуждений. Реализуем булеву матрицу какой-то дискретной системой (напр. схемами из логических элементов) и оценим функциональную и временную сложность реализации. Решение этой задачи не имеет непосредственного значения для обработки изображения, но характеризует матрицу специальным функционалом и содержит тоже средства для решения задач обработки.

На основании этих средств можно строить алгоритмы для отдельных задач обработки; эти алгоритмы имеют характер произведенный от технических устройств. Вместе с тем можно рассматривать схемы из логических элементов, выступающие в дальнейшем в качестве дискретных систем, как вычислительные модели для интегральных схем, хотя какого-то специального вида.

Результаты приведенные в этой статье касаются тоже проблем теории управляющих систем, так как мы применяли методы и подходы этой теории для их получения. Схему, реализующую матрицу, можно понимать как управляющую систему. Некоторые результаты, напр. созданные новые классы матриц представляют особенный интерес с точки зрения этой теории из-за относительно простой схемной реализации.

Реализацию матрицы понимаем как определение значения a_{ij} по координатам (i, j) . Именно для предобработки изображения можно удобно использовать приближенную реализацию, сохраняющую только существенные черты изображения, так как значения некоторых элементов матрицы (на границе изображения) могут быть произвольными, значит, тоже удобно доопределены.

В качестве схем из логических элементов выбираются схемы из функциональных элементов [5], над базисом И, ИЛИ и НЕ. Ограничение базиса несущественно, так как оценки в одном базисе являются только константным кратным оценок в других базисах. Определение реализации булевой матрицы и класса булевых матриц схемами из функциональных элементов понимаем в соответствии с работой [1]. Четкие определения приближенной реализации и значение параметра приближенности k можно найти напр. в [2].

Мерой функциональной сложности $L(S)$ схемы S выбираем число функциональных элементов в схеме, не считая длины соединений между элементами, ни других реальных ограничений. Мерой временной сложности $T(S)$ схемы S объявим число элементов вдоль самого длинного пути от входа к выходу схемы. Также как и в [7] будем строить только правильные схемы, задержки которых вдоль всех путей одинаковы.

1. Определение классов \mathcal{E}_N и $\mathcal{A}_{N,r}$

Теперь представим себе следующую ситуацию: имеем булеву матрицу, представляющую незнакомый нам визуальный образ и хотим оценить сложность ее реализации схемами из функциональных элементов (ф.э.) лучше, чем в общем случае. В этой ситуации может оказаться полезным следующий подход: разбить матрицу на подматрицы, которые умеем

реализовать проще и при помощи которых реализуем целую матрицу соответствующего изображения. При подходящем разбиении¹⁾ можно получить подматрицы так, что каждая подматрица состоит из двух связанных групп единичных и нулевых элементов и последовательность соседних элементов этих групп (т.е. граничных элементов) в некотором смысле монотонна и напоминает в некотором смысле линию. Прежде чем определить класс таких подматриц (обозначим его \mathcal{E}), дадим одно определение.

Определение 1. Пусть $A \in \mathcal{H}_N$ ²⁾ и $A = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, \dots, N$ и d -константа равна $1/2$. M -сетью матрицы A (обозначим ее C_A) (ср. [3]) понимаем конечную сеть с квадратными клетками на плоскости, где элемент матрицы a_{ij} соответствует центру квадрата с координатами (i, j) и квадрат определен вершинами сети $(i - d, j - d)$, $(i - d, j + d)$, $(i + d, j - d)$, $(i + d, j + d)$. Если $a_{ij} = 1$, соответствующий квадрат окрашен черной краской.

Замечка. M -сеть матрицы A является ее представлением на плоскости. Так, как принято у матриц, будем даже у M -сетей предполагать, что координата x соответствует строкам и y столбцам матрицы, хотя на плоскости это выглядит наоборот. В этом смысле тоже левая верхняя вершина M -сети имеет координаты $(1/2, 1/2)$, так как левый верхний элемент матрицы имеет координаты $(1, 1)$.

Определение 2. Матрица $A \in \mathcal{H}_N$ принадлежит классу \mathcal{E}_N , если для ее M -сети выполнено одно из следующих условий:

1. можно выбрать такую 4-связную [9] цепь ξ , состоящую из $2N + 1$ вершин сети и соединяющую вершину $(1/2, 1/2)$ с вершиной $(N + 1/2, N + 1/2)$, что черной краской окрашены квадраты (т.е. значение 1 в матрице A принимают элементы) с координатами (i, j) , для которых $j < q(i)$ и $q(i) = \max \{y \mid (i - 1/2, y) \in \xi\}$;

2. условие 1 выполнено для некоторой матрицы B , которая получается из A вращением на $\pi/2$, π либо $3\pi/2$ в положительном направлении.

Матрицы, похожие на матрицы из класса \mathcal{E}_N определил в работе [8] Н. П. Редькин и назвал их монотонными матрицами. Вдохновленные его подходом, дадим еще одно определение класса \mathcal{E}_N .

Определение 3. Матрица $A \in \mathcal{H}_N$ принадлежит классу \mathcal{E}_N , если выполнены следующие условия:

а) в каждой строке матрицы A либо все элементы принимают значение 1, либо все элементы нулевые, либо имеется одна связанная группа единичных и одна связанная группа нулевых элементов;

б) строки a_1, a_2, \dots, a_N ($a_i = a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN}$) упорядочены относительно

¹⁾ условия его существования рассматриваются позже

²⁾ \mathcal{H}_N — означает класс всех квадратных булевых матриц размера N

отношения векторов (если $s = s_1, \dots, s_N$ и $t = t_1, \dots, t_N$, то $s \leq t$ если и только если $s_i \leq t_i$ для всех i и $s \geq t$ определяется как $s_i \geq t_i$ для всех i).

Покажем теперь эквивалентность определений 2 и 3. Сначала предположим, что матрица A выполняет условие 1 определения 2. Непосредственно из определения ясно, что матрица A выполняет условие а) определения 3. Пусть не выполнено условие б), значит не все строки упорядочены отношением \leq . Тогда существуют строки a_i и a_{i+1} и по крайней мере один индекс j , что $a_{ij} > a_{i+1,j}$. Из этого следует, что $a_{ij} = 1$ и $a_{i+1,j} = 0$. Так как цепь соединяющая вершину (d, d) ($d = 1/2$) и вершину сети $(i - d, j + d)$, состоит из $i + j$ вершин и цепь, соединяющая вершины $(i + 1 + d, j + d)$ и $(N + d, N + d)$, состоит из $2N - (i + j)$ вершин сети, в этой ситуации (рис. 1) должны быть выбраны еще 3 вершины, чтобы выполнить требование определения 2 относительно единиц. В то же время это противоречит определению 2, так как цепь, соединяющая вершины (d, d) и $(N + d, N + d)$, имеет $2N + 3$ вершин.

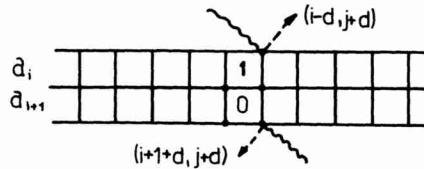


Рис. 1

При вращении на π (условие 2 определения 2) поступаем аналогичным образом, противоречие находится к отношению \geq .

Вращение на $\pi/2$. Так как матрица B получается из матрицы A пункта 1 определения 2, для которой мы доказали, что выполняет условие б) опр. 3, покажем, что из этого вытекает условие а) для матрицы B после вращения A на $\pi/2$. Так как столбцы матрицы A упорядочены отношением \leq , то для столбца j справедливо $a_{1j} \leq a_{2j} \leq \dots \leq a_{Nj}$, который после вращения будет строкой $b_{j1} \leq b_{j2} \leq \dots \leq b_{jN}$. Из этого следует условие а) для этой строки. С помощью противоречия проверяется условие б). При вращении на $3\pi/2$ доказательство проходит аналогичным образом.

Теперь предположим, что матрица A выполняет определение 3. Нашей целью является показать цепь, требуемую в определении 2. У нас 4 возможности:

1. Строки упорядочены относительно \leq и они все имеют форму 10 (значит, группа единиц налево и группа нулев направо, включая тоже случай единичной и нулевой строк). Требуемая цепь строится по определению 2. Так как строка имеет форму 10, тах определяется единственным

образом и в результате того что строки упорядочены, цепь «не убывает» и число выбранных вершин равно $2N + 1$.

2. В случае упорядочения \leq и формы 01 повернем матрицу на $\pi/2$ в отрицательном направлении. Так как упорядочение исходной матрицы влечет форму 10 повернутой матрицы и форма 01 влечет упорядочение \leq , можно поступать как в пункте 1.

3. В случае \geq и 10 повернем на $3\pi/2$ а в случае \geq и 01 на π в отрицательном направлении и конструкция окончится как в пункте 1.

Таким образом, мы показали эквивалентность определений 2 и 3. Определение 2 отражает мотивацию, с которой классы \mathcal{E}_N возникли, т.е. моделировать в одной матрице какую-то «разумную линию», которая репрезентирована цепью. Определение 3 подчеркивает монотонность и оно полезно для дальнейшего исследования.

Лемма 1. Для мощности класса \mathcal{E}_N справедливо

$$|\mathcal{E}_N| \sim {}^1) 4C_{2N}^N. \quad (1)$$

Доказательство: Подсчитаем число матриц в \mathcal{E}_N по определению 2. Сначала определим число цепей, соединяющих вершины $(1/2, 1/2)$ и $(N + 1/2, N + 1/2)$. Это число совпадает с решением задачи о нахождении числа путей длины $2N$ в городе с прямоугольными улицами и оно равно $\binom{2N}{N}$. Если бы все эти цепи определяли разные матрицы тоже после вращения, доказательство было бы окончено. Но для $(N - 1) + (N - 1)$ цепей после вращения определенные матрицы совпадают и две матрицы инвариантны к вращению: нулевая и единичная. Число матриц равно

$$(C_{2N}^N - N - 1) \cdot 4 + 2 = 4C_{2N}^N - 4N - 2,$$

что асимптотически равно $4C_{2N}^N$. Значение $|\mathcal{E}_N|$ можно приблизительно оценить как

$$\frac{2^{2N+2}}{\sqrt{\pi N}}.$$

Таким образом, декомпозицией матриц, являющихся моделями каких-то сложных (по сложности реализации) визуальных образов мы получили относительно богатый (по мощности) класс матриц. Сделаем теперь ком-

¹⁾ символ $a(n) \leq b(n)$ означает $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} \leq 1$, $a(n) \sim b(n) \Leftrightarrow a(n) \leq b(n)$ и $b(n) \leq a(n)$
и, значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 1$

позицию: определим класс матриц, который можно этим подходом реализовать проще, чем в общем случае.

Определение 4. Пусть $N = u \cdot r^2$, тогда матрица $A \in \mathcal{H}_N$ принадлежит классу $\mathcal{A}_{N,r}$, если A состоит из $\left(\frac{N}{r}\right)^2$ подматриц размера r , каждая из которых принадлежит классу \mathcal{E}_r .

(Теперь уже ответ на вопрос о существовании подходящего разбиения упомянутого выше не сложен. Достаточно только, чтобы матрица данного образа принадлежала классу $\mathcal{A}_{N,r}$.)

Лемма 2.

$$|\mathcal{A}_{N,r}| \sim \left(\frac{2^{2r+2}}{\sqrt{\pi r}}\right)^{\left(\frac{N}{r}\right)^2} \quad (2)$$

2. Сложность реализации классов \mathcal{E}_N и $\mathcal{A}_{N,r}$

Для оценки функциональной и временной сложности классов \mathcal{E}_N справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для $N \rightarrow \infty$ одновременно справедливо

$$L(\mathcal{E}_N) \sim^3 \frac{2N + 2}{\log(N + 1)}, \quad (3)$$

$$T(\mathcal{E}_N) \sim \log(N + 1). \quad (4)$$

Доказательство: Нижние оценки:

1. на нижнюю оценку сложности первой функции Шеннона используем теорему Д.1. из [6] об оценке сложности (n, m) -операторов. Как показано в [1] булеву матрицу можно рассматривать как булеву функцию с $2 \lceil \log N \rceil$ переменными, которая является $(2 \lceil \log N \rceil, 1)$ -оператором. С помощью (1) определяем $J(\mathcal{E}_N)$ и потому что

$$\frac{2 \lceil \log N \rceil + 1}{2N + 2 - 1/2 \log \pi N} \rightarrow 0$$

$$\log(2N + 2 - 1/2 \log \pi N)$$

²⁾ это условие не так важно, потому что классы $\mathcal{A}_{N,r}$ можно определить и без него и все результаты остаются справедливыми, надо только всюду вместо $\frac{N}{r}$ взять $\left\lceil \frac{N}{r} \right\rceil$

³⁾ все логарифмы в этой работе берутся при основании 2

выполнено предположение теоремы Д.1. из [6], из которой непосредственно получаем

$$L(\mathcal{E}_N) > \frac{2N + 2 - 1/2 \log \pi N}{\log(2N + 2 - 1/2 \log \pi N)}. \quad (5)$$

2. нижнюю оценку второй функции Шеннона получаем с помощью леммы 5 из [7], полагая $T = (1 - \delta) \log(N + 1)$. По этой лемме справедливо, что число элементов в каждой схеме, задержка которой не превосходит $(1 - \delta) \log(N + 1)$ не превышает

$$c \cdot (1 - \delta) \log(N + 1) \cdot 2^{(1 - \delta) \log(N + 1)} = c \frac{(N + 1) \log(N + 1)}{N^\delta} = \bar{\delta} \left(\frac{2N + 2}{\log(N + 1)} \right)$$

По оценке (5) ясно, что тогда для $N > N_\delta$ не все матрицы из \mathcal{E}_N можно реализовать при помощи такой схемы. Из того для $N > N_\delta$ следует

$$T(\mathcal{E}_N) > (1 - \delta) \log(N + 1). \quad (6)$$

Верхние оценки:

1. теперь построим схему для реализации произвольной матрицы $A \in \mathcal{E}_N$ и оценим ее сложность.

а) сначала рассмотрим матрицы, исполняющие условие 1 определения 2. Каждой такой матрице сопоставим однозначно функцию, которую используем при реализации соответствующей матрицы. Конкретно, матрице A сопоставим функцию φ_A , представляющую $(\log(N + 1), \log(N + 1))$ -оператор, которая по координате i выдаст номер $q(i)$, т. е. вторую координату элемента $(i, q(i))$ из определения 2. Из определений 2 и 3 ясно, что φ_A монотонная. По основной теореме из [4] сложность реализации

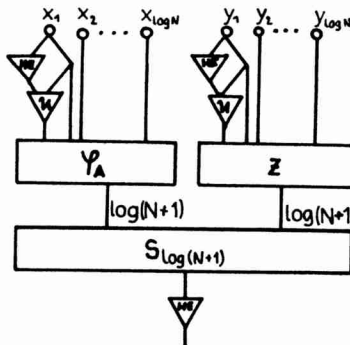


Рис. 2

$$L(\varphi_A) \sim \frac{2N + 2}{\log(N + 1)}. \quad (7)$$

Потом схему для реализации матриц определенных условием 1 строим по рис. 2 (блок Z служит для выравнивания задержки — о его строении см. [7] стр. 52).

Из определения 2 ясно, что достаточно сравнить входное значение y со значением $\varphi_A(x)$: если $y > \varphi_A(x)$, $a_{xy} = 0$, в обратном случае $a_{xy} = 1$.

Так как сложность реализации сравнения только

$$c_1 \log(N + 1) = \bar{o}\left(\frac{2N + 2}{\log(N + 1)}\right)^4$$

и сложность блока Z по теореме 15 в [7] равна $c_2 \log(N + 1)$, основным членом оценки поведения первой функции Шеннона будет оценка сложности реализации функции φ_A — (7).

б) при реализации матриц, исполняющих условие 2 определения 2 добавим перед построенную схему еще схему реализации вращения (ее можно построить с помощью вычитания и константного набора).

Так как сложность реализации вычитания и константного набора тоже $\bar{o}\left(\frac{2N + 2}{\log(N + 1)}\right)$, можно для каждой матрицы из \mathcal{E}_N построить схему

со сложностью асимптотически не превышающей $\frac{2N + 2}{\log(N + 1)}$, т. е.

$$L(\mathcal{E}_N) \lesssim \frac{2N + 2}{\log(N + 1)}. \quad (8)$$

Сравнением (5) и (8)

$$\frac{\frac{2N + 2 - 1/2 \log \pi N}{\log(2N + 2 - 1/2 \log \pi N)}}{\frac{2N + 2}{\log(N + 1)}} \rightarrow 1$$

уже непосредственно получаем утверждение (3) теоремы об асимптотике первой функции Шеннона.

⁴⁾ буквой c , с индексом или без индекса, означает константа, зависящая только от базиса; символ $a(n) = \bar{o}(b(n))$ означает $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 0$

2. Верхнюю оценку второй функции Шеннона получим следующим образом: в случае а) в схеме выступает монотонная функция φ , имеющая по основной теореме из [4] временную сложность $T(\varphi) \sim \log(N+1)$. Для сложности $T(Z)$ по лемме 15 из [7] имеет место оценка $T(Z) \sim \log(N+1)$. Для временной сложности блока сравнения $S_{\log(N+1)}$ по лемме 2 из [4] справедливо $T(S_{\log(N+1)}) \leq c_3 \log \log(N+1)$. В случае б) в схеме выступает еще оператор вычитания $R_{\log N}$. Так как вычитание — сложение по модулю 2 (и временная сложность сложения по мод 2 равна $\bar{o}(1)$) по лемме 1 в [4] $T(R_{\log N}) \leq c_4 \log \log N$. Тогда для обоих случаев имеем

$$T(\mathcal{E}_N) \leq \log(N+1) + c_5 \log \log(N+1). \quad (9)$$

Из сравнений (9) с нижней оценкой (6) вытекает утверждение (4) теоремы.

Для приближенной реализации классов \mathcal{E}_N справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. Пусть $k = \bar{o}(N)$, тогда имеет место

$$L(\mathcal{E}_N^k)^5 \geq \frac{2 \left\lceil \frac{N}{k+1} \right\rceil + 2}{\log \left(\left\lceil \frac{N}{k+1} \right\rceil + 1 \right)}. \quad (10)$$

Доказательство: Пусть A , произвольная матрица класс \mathcal{E}_N ; она состоит из $\left\lceil \frac{N}{k+1} \right\rceil^2$ квадратных подматриц $A_{r,s}$ ($r, s = 0, 1, \dots, \left\lceil \frac{N}{k+1} \right\rceil - 1$) размера k , причем краевые $2 \left\lceil \frac{N}{k+1} \right\rceil - 1$ подматрицы могут иметь также меньший размер. Построим теперь матрицу B , k -близку к A (значит принадлежащую в k -сеть \mathcal{E}_N) следующим образом:

1. если все элементы подматрицы $A_{r,s}$ принимают значение 1, тогда значения элементов соответствующей подматрицы $B_{r,s}$ положим равными 1;
2. если подматрица $A_{r,s}$ нулевая, то положим, значения всех элементов соответствующей подматрицы $B_{r,s}$ равны 0;
3. если подматрица $A_{r,s}$ ни нулевая, ни единичная в смысле пункта 1 и если в этой подматрице существует элемент не являющийся k -гранич-

⁵⁾ \mathcal{M}_N^k означает k -сеть класса \mathcal{M}_N , т.е. множество матриц k -близких (могут различаться только на множестве граничных точек «ширины» k) к матрицам из \mathcal{M}_N ; реализация k -сети по определению является приближенной реализацией класса \mathcal{M}_N

ным, то все элементы с обратным значением должны быть k -граничными и потому значения всех элементов подматрицы $B_{r,s}$ положим равными значению этого элемента;

4. если все элементы подматрицы $A_{r,s}$ являются k -граничными, подматрицу $B_{r,s}$ определим как нулевую матрицу.

Из этой конструкции очевидно, что матрица B фактически k -близка к A , значит $B \in \mathcal{E}_N^k$. Определим теперь изображение сопоставляющее каждой матрице B матрицу $B' \in \mathcal{E}_{\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor}$ такую, что $b'_{rs} = 0$, если $B_{r,s}$ -нулевая подматрица и $b'_{rs} = 1$ в обратном случае. Можно легко убедиться в том, что это изображение взаимно однозначно (биективно). Из этого вытекает, что

$$|\mathcal{E}_N^k| \sim \left| \mathcal{E}_{\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor} \right| \quad (11)$$

и

$$|\mathcal{E}_N^k| \sim \frac{2^2 \left\lfloor \frac{N}{k+1} \right\rfloor + 2}{\sqrt{\pi \left\lfloor \frac{N}{k+1} \right\rfloor}}$$

При помощи этого отношения убедимся в том, что выполнены предположения теоремы Д.1. из [6], из которой получаем утверждение (10).

Теорема 2. Пусть $k = 2^\lambda - 1$ ($\lambda = 0, 1, \dots, \lfloor \log \log N \rfloor$), $N \rightarrow \infty$, тогда для функциональной и временной сложности классов \mathcal{E}_N^k одновременно справедливо

$$L(\mathcal{E}_N^k) \sim \frac{2 \left\lfloor \frac{N}{k+1} \right\rfloor + 2}{\log \left(\left\lfloor \frac{N}{k+1} \right\rfloor + 1 \right)}, \quad (12)$$

$$T(\mathcal{E}_N^k) \sim \log \left(\left\lfloor \frac{N}{k+1} \right\rfloor + 1 \right). \quad (13)$$

Доказательство: Верхние оценки:

1. Используем изображение между \mathcal{E}_N^k и $\mathcal{E}_{\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor}$ из доказательства леммы 3. Схемы для реализации матриц из \mathcal{E}_N^k будем строить тем же способом как схему для реализации класса $\mathcal{E}_{\lfloor \frac{N}{k+1} \rfloor}$, но ее входные наборы имеют длину $\log N$, так что мы должны преобразовать их на длину $\log \left\lfloor \frac{N}{k+1} \right\rfloor$. Так как $k = 2^\lambda - 1$, это преобразование проходит тривиально.

2. Оценку второй функции Шеннона получим как при первой функции, потому что преобразование входных наборов тривиально тоже во времени.

Нижние оценки:

1. Нижняя оценка для $L(\mathcal{E}_N^k)$ совпадает с утверждением (10) леммы 3.

2. Нижнюю оценку для $T(\mathcal{E}_N^k)$ получим так, как в доказательстве теоремы 1 с помощью леммы 5 из [7] для

$$T = (1 - \delta) \log \left(\left[\frac{N}{k+1} \right] + 1 \right)$$

и оценки (10).

Теорема 3. Пусть $k \neq 2^\lambda - 1$ ($\lambda = 0, 1, \dots, [\log \log N]$), тогда одновременно справедливо

$$L(\mathcal{E}_N^k) \leq c_6 \left[\frac{N}{k+1} \right] \log N, \quad (14)$$

$$T(\mathcal{E}_N^k) \approx^6 \log \left[\frac{N}{k+1} \right]. \quad (15)$$

Доказательство: Теорема доказывается аналогично теореме 2, кроме оценки преобразования длины наборов. Это преобразование обеспечивают два монотонных оператора. Так как они являются

$$\left(\log N, \log \left[\frac{N}{k+1} \right] \right)\text{-операторами,}$$

по лемме 3 из [4] реализуются со сложностью меньшей, чем $\left[\frac{N}{k+1} \right] \log N$

во времени меньшем, чем $\log \left[\frac{N}{k+1} \right]$. Эти оценки образуют основную сложность схемы. Нижнюю оценку для временной сложности получим с помощью леммы 5 из [7].

Для оценки сложности реализации классов $\mathcal{A}_{N,r}$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. При $r = \log N, \log \log N, \dots, \frac{N}{\log N}, N \rightarrow \infty$ одновременно справедливо

⁶⁾ $a(n) = O(b(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = c, a(n) \approx b(n) \Leftrightarrow a(n) = O(b(n)) \wedge b(n) = O(a(n))$

$$L(\mathcal{A}_{N,r}) \approx \frac{2N^2(2r+2)}{r^2 \log(r+1)}, \quad (16)$$

$$T(\mathcal{A}_{N,r}) \approx 2 \log N - 2 \log r. \quad (17)$$

Доказательство: Нижние оценки доказываются также как в теореме 1. Для оценки функциональной сложности используется теорема Д.1. из [6] и лемма 2 и для оценки временной сложности реализации лемма 5 из [7]. Доказательство верхних оценок состоит из построения схемы, реализующей каждую матрицу из $\mathcal{A}_{N,r}$ и оценки ее функциональной и временной сложности. Схема основана на следующей идее: чтобы определить значение элемента (i, j) (и следовательно реализовать матрицу) сначала обсудим, в которой подматрице $B \in \mathcal{E}_r$ лежит этот элемент и после преобразования длины входных наборов впускаем их в подсхему построенную по доказательству теоремы 1. Так как значение входных наборов может быть произвольным, вся схема содержит $\frac{N^2}{r^2}$ таких подсхем. Нужна еще подсхема для отбора правильного результата той из подсхем, в которой лежит элемент с входными координатами; добавляются тоже элементы задержки. Ограничения на значение r выходят из рассуждений об основном члене оценки сложности схемы.

О приближенной реализации классов $\mathcal{A}_{N,r}$ можно утверждать теоремы и леммы похожие на результаты относительно приближенной реализации классов \mathcal{E}_N . Доказательства этих утверждений основаны на расширении изображения, показанного в доказательстве леммы 3, и тоже на результатах относительно класса \mathcal{E}_N .

В заключение благодарю рецензента за полезные замечки к этой статье.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хаверлик, И.: Синтез логических сетей для реализации классов булевских матриц с данным числом угловых клеток, Сборник ММЦ. Ш. Банаха, Дискретна математика, Варшава 1978.
- [2] Хаверлик, И.: О некоторых классах функций допускающих простую схемную реализацию, Дисертационная работа, МГУ, Москва 1976.
- [3] Kim, C. E.: On the cellular convexity of complexes, IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell., Vol. PAMI-3, No. 6 (1981), 617—625.
- [4] Липатов, Е. П.: Об асимптотически оптимальном по сложности и задержке синтезе классов вектор-функций, Дискретный анализ 24, Новосибирск 1974, 69—83.

- [5] Лупанов, О. Б.: О синтезе некоторых классов управляющих систем, Сборник Проблемы кибернетики 10, Москва 1963, 63—98.
- [6] Лупанов, О. Б.: Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования, Проблемы кибернетики 14, Москва 1965, 31—110.
- [7] Лупанов, О. Б.: О схемах из функциональных элементов с задержками, Проблемы кибернетики 23, Москва 1970, 43—81.
- [8] Редькин, Н. П.: О реализации монотонных булевых функций контактными схемами, Проблемы кибернетики 35, Москва 1979.
- [9] Rosenfeld, A.: Connectivity in Digital Pictures, J. of the ACM, Vol. 17 (1970), 146—160.

Адрес автора:

RNDr. Milan Ftáčnik
Katedra teoretickej kybernetiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina
842 15 Bratislava
Czechoslovakia

Поступило: 8. 2. 1984

SÚHRN

ZLOŽITOSTNÁ CHARAKTERIZÁCIA NIEKTORÝCH BOOLEOVSKÝCH MODELOV OBRAZOV

Milan Ftáčnik, Bratislava

V článku sa skúmajú niektoré triedy booleovských matíc ako modelov vizuálnych obrazov. Dokazujú sa asymptotické ohodnotenia funkcionálnej a časovej zložitosti realizácie jednotlivých tried matíc schémami z logických prvkov. Dôkazy obsahujú tiež prostriedky pre riešenie úloh vlastného spracovania obrazu. Skúmané triedy matíc, triedy \mathcal{E}_N — všetky booleovské matice rádu N reprezentujúce akúsi monotónnu čiaru a triedy $\mathcal{A}_{N,r}$, ktoré sú kompozíciou matíc z \mathcal{E}_r , sú zaujímavé pre svoju relatívne jednoduchú realizáciu.

SUMMARY

THE COMPLEXITY CHARACTERIZATION OF SOME BOOLEAN MODELS OF IMAGES

Milan Ftáčnik, Bratislava

Some classes of Boolean matrices representing the models of visual images are investigated in the paper. The asymptotic evaluations of combinational and delay complexity of single classes of matrices are accomplished. The proofs involve also the means to solve the tasks of image processing proper. The classes investigated, the classes \mathcal{E}_N which contain all square Boolean matrices of order N representing some monotonous line and classes $\mathcal{A}_{N,r}$, composed by matrices from \mathcal{E}_r , are interesting because of their relatively small complexity.

