

Werk

Titel: Der Frühdruck im Dienste der öffentlichen Verwaltung

Autor: Schottenloher, Karl

Ort: Mainz

Jahr: 1949

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?366382810_1944-49|log28

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

О ЧИСЛЕ ЕДИНИЦ ПОЧТИ ВСЕХ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

ДАНИЕЛ ОЛЭЯР, Братислава

В предлагаемой работе рассматривается число единичных элементов квадратных булевых матриц порядка N . Пусть A_N — любая булева матрица из m_N — класса всех квадратных булевых матриц порядка N . Тогда число единичных элементов матрицы A_N обозначается $t(A_N)$.

Доказывается, что для почти всех квадратных булевых матриц порядка N имеет место оценка

$$|N^2/2 - t(A_N)| < \eta(N) \cdot N,$$

где $\eta(N) \rightarrow \infty$ и $\eta^3(N) = o(N)$.

Основные понятия и определения

Булевой матрицей $A_{m,n}$ понимается матрица типа $m \times n$, элементы которой принимают значение из множества $\{0, 1\}$. Вместо $A_{N,N}$ будем для обозначения квадратной булевой матрицы типа $N \times N$ использовать обозначение A_N . Класс всех квадратных булевых матриц порядка N обозначим m_N . Если M множество или класс, символом $|M|$ обозначаем мощность M . Верхнюю целую часть действительного числа a обозначаем через $[a]$ и символ $[a]$ обозначает нижнюю целую часть a . Пусть P некоторое свойство булевых матриц. Множество всех матриц из m_N , обладающих свойством P , обозначим $P(m_N)$. Будем говорить, что почти все булевые матрицы класса m_N обладают свойством P , если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |P(m_N)|/|m_N| = 1.$$

Оценка числа единиц почти всех булевых матриц

Теорема. Пусть $\eta(N)$ любая последовательность действительных чисел, для которой выполняются следующие условия

$$\eta(N) \rightarrow \infty \quad \text{для } N \rightarrow \infty \text{ и} \quad (1)$$

$$\eta^3(N) = o(N); \quad (2)$$

тогда для почти всех булевых матриц из класса $\mathcal{M}_N$ при $N \rightarrow \infty$ имеет место

$$|N^2/2 - t(A_N)| < \eta(N) \cdot N, \quad (3)$$

где $t(A_N)$ обозначает число единиц булевой матрицы A_N . Докажем сначала вспомогательную лемму:

Лемма. Пусть $\eta(N)$ любая вещественная последовательность, для которой выполнены условия (1) и (2). Тогда для $N \rightarrow \infty, j = 0, 1, \dots, [\eta(N) \cdot N]$ имеют место следующие неравенства

$$\frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot e^{-2j^2/N^2} \cdot e^{-c_1 \eta^3(N)/N} \leq \binom{N^2}{[N^2/2] - j} \quad (4)$$

и

$$\binom{N^2}{[N^2/2] - j} \leq \frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot e^{-2j^2/N^2} \cdot e^{c_2 \eta^3(N)/N}, \quad (5)$$

где c_1, c_2 некоторые константы.

Доказательство леммы. Оценим сначала биномиальный коэффициент $C_{N^2}^{[N^2/2]}$. Используя точную формулу Стирлинга получаем

$$\frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \left(1 - \frac{c_3}{N^2}\right) \leq \binom{N^2}{[N^2/2]} \leq \frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot e^{1/12N^2},$$

где c_3 — константа, $1 < c_3 < 2$.

Биномиальные коэффициенты $C_{N^2}^{[N^2/2]}$ и $C_{N^2}^{[N^2/2] - j}$ связаны следующим отношением

$$\binom{N^2}{N^2/2} = \binom{N^2}{[N^2/2] - j} \cdot A, \quad (6)$$

где

$$A = \prod_{k=0}^j A_k \quad \text{и} \quad A_k = \frac{[N^2/2] + 1 + k}{[N^2/2] - k}.$$

Для A_k имеет место

$$A_k \leq 1 + \frac{4k + 4}{N^2 - 2k - 1} \leq \exp \left\{ \frac{4k + 4}{N^2 - 2k - 1} \right\}.$$

Следовательно,

$$A \leq \prod_{k=0}^j \exp \left\{ \frac{4k+4}{N^2-2k-1} \right\} \leq \exp \left\{ \frac{2(j+1)(j+2)}{N^2-2j-1} \right\} \quad (7)$$

Преобразуем выражение (7)

$$\exp \left\{ \frac{2(j+1)(j+2)}{N^2-2j-1} \right\} = \exp \left\{ \frac{2j^2}{N^2} + \frac{4j^3 + 2j^2 + 6Nj^2 + 4N^2}{N^4 - 2N^2j - N^2} \right\}. \quad (8)$$

Второй член суммы в фигурных скобках возрастает с ростом j ($j = 0, 1, \dots, [\eta(N) \cdot N]$) и принимает максимальное значение для $j = [\eta(N) \cdot N]$. Отсюда получаем следующую верхнюю оценку A

$$A \leq \exp \{2j^2/N^2\} \cdot \exp \{c_1 \eta^3(N)/N\}, \quad (9)$$

где c_1 — константа, $c_1 > 4$.

На основе (6) и (9) получаем

$$\left(\frac{N^2}{[N^2/2]} \right) \cdot \exp \{2j^2/N^2\} \cdot \exp \{-c_1 \eta^3(N)/N\} \leq \left(\frac{N^2}{[N^2/2] - j} \right). \quad (10)$$

Для верхней оценки $C_{N^2}^{[N^2/2]-j}$ используем точную формулу Стирлинга. Имеем

$$\left(\frac{N^2}{[N^2/2] - j} \right) = \frac{\sqrt{2\pi N^2} (N^2)^{N^2}}{\sqrt{4\pi^2([N^2/2] - j)([N^2/2] + j)([N^2/2] - j)^{([N^2/2] - j)}}} \cdot \frac{\exp \{\Theta_1/12N^2\}}{([N^2/2] + j)^{([N^2/2] + j)} \cdot \exp \{\Theta_2/12([N^2/2] - j) + \Theta_3/12([N^2/2] + j)\}};$$

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ — константы из интервала $\langle 0, 1 \rangle$.

Для четного N постепенно получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{N^2}{[N^2/2] - j} \right) &= \sqrt{\frac{2\pi N^2}{\pi^2(N^2 - 2j)(N^2 + 2j)}} 2^{N^2} \cdot \frac{(N^2)^{N^2}}{(N^2 - 2j)^{N^2/2 - j} (N^2 + 2j)^{N^2/2 + j}} \cdot \\ &\cdot \exp \{\Theta_1/12N^2 - \Theta_2/12(N^2/2 - j) - \Theta_3/12(N^2/2 + j)\} = \\ &= \sqrt{\frac{2N^2}{\pi(N^4 - 4j^2)}} \cdot 2^{N^2} \left(\frac{N^4}{N^4 - 4j^2} \right)^{N^2/2} \left(\frac{N^2 - 2j}{N^2 + 2j} \right)^j \cdot \\ &\cdot \exp \{\Theta_1/12N^2 - \Theta_2/(6N^2 - 12j) - \Theta_3/(6N^2 + 12j)\} = \\ &= \sqrt{\frac{2N^2}{\pi(N^4 - 4j^2)}} 2^{N^2} \left(1 + \frac{4j^2}{N^4 - 4j^2} \right)^{N^2/2} \left(1 - \frac{4j^2}{N^2 + 2j} \right)^j \cdot \\ &\cdot \exp \{\Theta_1/12N^2 - \Theta_2/(6N^2 - 12j) - \Theta_3/(6N^2 + 12j)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя неравенство $(1+x) \leq e^x$ получаем следующие оценки

$$\left(1 + \frac{4j^2}{N^4 - 4j^2}\right)^{N^2/2} \leq \exp \left\{ \frac{2N^2j^2}{N^4 - 4j^2} \right\} \quad (12)$$

$$\left(1 - \frac{4j}{N^2 + 2j}\right) \leq \exp \left\{ -\frac{4j^2}{N^2 + 2j} \right\}, \quad (13)$$

Подставим (12), (13) в (11), положим $\Theta_1 = 1$, $\Theta_2 = \Theta_3 = 0$ и преобразуем

$$\binom{N^2}{N^2/2 - j} \leq \frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi(N^4 - 4j^2)/2N^2}} \cdot \exp \{-2j^2/N^2\} \cdot \exp \left\{ \frac{8j^3N^2 - 8j^4}{N^6 - 4j^2N^2} + \frac{1}{12N^2} \right\}.$$

Функция

$$\frac{8j^3N^2 - 8j^4}{N^6 - 4j^2N^2} + \frac{1}{12N^2}$$

монотонно возрастает для $j \in \langle 0, N^2/2 \rangle$ и для $j \in \langle 0, [\eta(N) \cdot N] \rangle$ ее можно сверху ограничить выражением

$$\frac{c_4 \eta(N)}{N},$$

где c_4 — константа ($c_4 > 8$ при $N \rightarrow \infty$).

Так как

$$\sqrt{\frac{N^2}{N^4 - 4j^2}} \leq \sqrt{\frac{N^2}{N^4 - 4N^2\eta^2(N)}} \leq \frac{1}{N} \cdot \exp \left\{ \frac{2\eta^2(N)}{N^2 - 4\eta^2(N)} \right\},$$

то для четного N имеет место

$$\binom{N^2}{N^2/2 - j} \leq \frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot \exp \{-2j^2/N^2\} \cdot \exp \{c_4 \eta^3(N)/N\}. \quad (14)$$

Аналогичным образом получаем для не-четного N

$$\binom{N^2}{[N^2/2] - j} \leq \frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot \exp \{-2j^2/N^2\} \cdot \exp \{c_5 \eta^3(N)/N\}. \quad (15)$$

Пусть $c_2 = \max \{c_4, c_5\}$, тогда из (14), (15) и (10) вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Примечание. Если параметр j будет принимать значение из множества $\{0, 1, \dots, [cN]\}$, где c — константа, то для биномиального коэффициента $C_{N^2}^{[N^2/2] - j}$ получаем следующую оценку

$$\frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot \exp \{-2j^2/N^2\} \cdot \exp \{-c'N\} \leq \binom{N^2}{[N^2/2] - j} \quad (16)$$

$$\binom{N^2}{[N^2/2] - j} \leq \frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot \exp \{-2j^2/N^2\} \cdot \exp \{c''N\} \quad (17)$$

где $c' > 4c^3 + 6c$ и $c'' > 8c^3$.

Доказательство аналогично доказательству леммы.

Доказательство теоремы

Оценим сумму

$$S = \sum_{j=0}^{[\eta(N) \cdot N]} \binom{N^2}{[N^2/2] - j}. \quad (18)$$

(Число $2S$ — это число матриц из $\mathcal{M}_N$, для которых выполняется (3).)

Используем оценки биномиального коэффициента (4), (5)

$$\frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot \exp \{-c_1 \eta^3(N)/N\} \sum_{j=0}^{[\eta(N) \cdot N]} \exp \{-2j^2/N^2\} \leq S \quad (19)$$

и

$$S \leq \frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot \exp \{c_2 \eta^3(N)/N\} \sum_{j=0}^{[\eta(N) \cdot N]} \exp \{-2j^2/N^2\}. \quad (20)$$

В неравенствах (19), (20) выступает сумма

$$S_0 = \sum_{j=0}^{[\eta(N) \cdot N]} \exp \{-2j^2/N^2\}.$$

Оценим S_0 . Функция e^{-x^2} монотонно убывает в интервале $\langle 0, \infty \rangle$. Тогда имеют место следующие неравенства

$$\int_j^{j+1} \exp \{-2t^2/N^2\} dt \leq \exp \{-2j^2/N^2\} \leq \int_{j-1}^j \exp \{-2t^2/N^2\} dt \quad (21)$$

На основе (21) для S_0 получаем

$$S_0 - 1 \leq \sum_{j=1}^{[\eta(N) \cdot N]} \int_{j-1}^j \exp \{-2t^2/N^2\} dt \leq \int_0^{\eta(N) \cdot N} \exp \{-2t^2/N^2\} dt \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} S_0 &\geq \sum_{j=0}^{[\eta(N) \cdot N]} \int_j^{j+1} \exp \{-2t^2/N^2\} dt = \int_0^{[\eta(N) \cdot N] + 1} \exp \{-2t^2/N^2\} dt \geq \\ &\geq \int_0^{\eta(N) \cdot N} \exp \{-2t^2/N^2\} dt. \end{aligned} \quad (23)$$

В интеграле из (22), (23) введем обозначение $t = iN/2$:

$$\int_0^{\eta(N) \cdot N} \exp \{-2t^2/N^2\} dt = N/2 \int_0^{2\eta(N)} e^{-i^2/2} di. \quad (24)$$

Интеграл (24) представляет собой функцию Лапласа $\Phi(x)$, имеющую предел $\sqrt{\pi/2}$ для $x \rightarrow \infty$. На основе этого, отношений (22), (23) и (24), S_0 можно ограничить следующим образом

$$N\sqrt{\pi/8} \leq S_0 \leq N\sqrt{\pi/8} + 1.$$

Подставим верхнюю оценку S_0 в (20) и нижнюю в (19)

$$2^{N^2-1} \cdot \exp \{-c_1 \eta^3(N)/N\} \leq S \leq 2^{N^2-1} \cdot \exp \{c_2 \eta^3(N)/N\} (1 + \bar{o}(1)). \quad (25)$$

Разделим оба неравенства в (25) на 2^{N^2-1}

$$\exp \{-c_1 \eta^3(N)/N\} \leq S/2^{N^2-1} \leq \exp \{c_2 \eta^3(N)/N\} (1 + \bar{o}(1)). \quad (26)$$

Так как $\eta^3(N)/N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, из неравенств (26) следует

$$S \sim 2^{N^2-1}.$$

Теорема доказана.

Примечание. Функция $\eta(N)$ из (18) может возрастать очень медленно, но заменить ее какой-то константой невозможно. Покажем, что доля тех матриц из m_N для которых

$$|N^2/2 - t(A_N)| < cN \quad (27)$$

будет $(N \rightarrow \infty) 1 - \varepsilon_c$, где $\varepsilon_c \in (0, 1)$.

Доказательство.

Оценим сумму

$$S' = \sum_{j=0}^{[cN]} \binom{N^2}{[N^2/2] - j}. \quad (28)$$

($2S'$ — это число матриц из m_N для которых выполняется (27).) Для оценки S' используем неравенства (16) и (17) из примечания.

$$\frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot \exp \{-c'/N\} \cdot \sum_{j=0}^{[cN]} \exp \{-2j^2/N^2\} \leq S', \quad (29)$$

$$S' \leq \frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot \exp (c''N) \cdot \sum_{j=0}^{[cN]} \exp \{-2j^2/N^2\}. \quad (30)$$

Применяя аналогичные преобразования к неравенствам (29), (30) как были те, которые мы использовали для конструкции оценки суммы (18), приходим к следующим отношениям для (28)

$$\frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot \exp(-c'/N) \cdot \int_0^{cN} \exp(-2t^2/N^2) dt \leq S' \quad (31)$$

и

$$S' \leq \frac{2^{N^2}}{\sqrt{\pi N^2/2}} \cdot \exp(c''/N) \left\{ \int_0^{cN} \exp\{-2t^2/N^2\} dt + 1 \right\}. \quad (32)$$

Интеграл в (31), (32) представляет собой функцию $\Phi(x)$. Применяя постановку $t = cN/2$, получаем

$$2^{N^2} \cdot \exp(-c'/N) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2c} e^{-i^2/2} di = 2^{N^2} \cdot \exp(-c'/N) \cdot \Phi(2c) \leq S'$$

и

$$2^{N^2} \cdot \exp(c''/N) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2c} e^{-i^2/2} di + \frac{2}{N} \right) = 2^{N^2} \cdot \exp(c''/N) \cdot \Phi(2c) (1 + \bar{o}(1)) \geq S'$$

На основе этого

$$\exp(-c'/N) \cdot 2\Phi(2c) \leq S'/2^{N^2-1} \leq \exp(c''/N) \cdot 2\Phi(2c) (1 + \bar{o}(1)). \quad (33)$$

Так как $2\Phi(2c) = (1 - \varepsilon_c)$, ε_c — константа, $\varepsilon_c \in (0, 1)$, верхняя и нижняя оценки выражения (33) имеют своим пределом (при $\rightarrow \infty$) $(1 - \varepsilon_c)$. Это значит, что

$$S' < 2^{N^2-1}$$

для любой константы c .

Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kaucký, J.: Kombinatorické identity, Veda, Bratislava 1975.
- [2] Olejár, D.: Niektoré vlastnosti booleovských funkcií a booleovských matic ako diskretných matematických modelov biosystémov. Práca k odbornej skúške, Bratislava 1982.
- [3] Rényi, A.: Teorie pravděpodobnosti. Academia, Praha 1972.
- [4] Šalát, T.: Nekonečné rady. Academia, Praha 1974.

Адрес автора:

Daniel Olejár
Katedra teoretickej kybernetiky
Matematicko-fyzikálnej fakulty UK,
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступило: 8. 2. 1984

SÚHRN

O POČTE JEDNOTIEK SKORO VŠETKÝCH BOOLEOVSKÝCH MATÍC

Daniel Olejár, Bratislava

V práci je určený odhad počtu jednotkových prvkov skoro všetkých štvorcových booleovských matic A_N .

SUMMARY

THE NUMBER OF ONES IN ALMOST ALL BOOLEAN MATICES

Daniel Olejár, Bratislava

The number of ones in almost all square boolean matrices A_N is estimated in this paper.