Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLVIII—XLIX — 1986

СТРУКТУРА ОДНОЙ ФОРМУЛЫ А. СЕЛЬБЕРГА В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. Предварительные замечания

Пусть (см. [5], стр. 10)

$$X(t)=\frac{1}{2}\,t^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}\pi t}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),\qquad s=\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,$$

($X(t)$ — действительная функция для действительных t). В мемуаре [5], А. Сельберг получил следующую формулу, (см. [5], стр. 55):

$$\int_T^{T+U}X^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{U}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\ln\frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2}+2c\right)+O(T^{1/2}\xi^5),\tag{1}$$

где (ср. [5], стр. 18, $a=1/2+\varepsilon$, $\varepsilon>0$)

$$U=T^{1/2+\varepsilon},\quad \xi=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\varepsilon/10},\quad \varepsilon\leqq\frac{1}{10},\quad P_0=\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\tag{2}$$

и μ_1, μ_2 — натуральные числа, удовлетворяющие условиям

$$(\mu_1,\mu_2)=1,\qquad \mu_1,\mu_2\leqq\xi,$$

(c — постоянная Эйлера).

Так как (см. [6], стр. 94, [5], стр. 10, (2.3))

$$Z^2(t)=\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|^2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}X^2(t)\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

т. е.

$$X^2(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}Z^2(t)\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

и (см. [6], стр. 109)

$$Z(t) = O(t^{1/6} \ln t),$$

то формулу (1) напишем как:

$$\int_T^{T+U} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t = \frac{U}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\ln \frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2} + 2c\right) + O(T^{1/2}\xi^5). \tag{3}$$

Заметим, что в случае $\mu_1 = \mu_2 = 1$, формула А. Сельберга (3) переходит в формулу Г. Х. Харди—Д. Е. Литтлвуда—А. Е. Ингама (см. [1], стр. 122, 151—156, [2], стр. 59—61, [3], [4] стр. 274, 294, ср. [6], стр. 142)

$$\int_T^{T+U} Z^2(t)\,\mathrm{d}t = U \ln \frac{T}{2\pi} + 2cU + O(T^{1/2}\xi^5).$$

В настоящей работе мы приступаем к изучению структуры формулы А. Сельберга (3) т. е. мы попробуем получить формулы типа А. Сельберга относительно некоторых систем несвязныцх множеств, входящих, в основном, в промежуток $\langle T, T+U\rangle$. Мы применим к этому вопросу метод, изложенный нами в работах [8], [9].

А именно, с помощью семейства последовательностей $\{g_\nu(\tau)\}$, (см. [9], (6)), мы вводим два семейства несвязных множеств $G_5(x)$, $G_6(y)$ относительно промежутка $\langle T, T+U\rangle$ и получаем следующие результаты:

(А) в случае $\mu_1, \mu_2 \geqq 2$, $(\mu_1, \mu_2) = 1$, асимптотические формулы для величин

$$\frac{1}{m(G_5)}\int_{G_5} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{m(G_6)}\int_{G_6} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t,$$

($m(G_5)$, $m(G_6)$ — меры множеств G_5, G_6) не содержат новых членов по сравнению с формулой А. Сельберга ($T \to \infty$)

$$\frac{1}{U}\int_T^{T+U} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t \sim \frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\ln \frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2} + 2c\right), \tag{4}$$

(Б) в случае $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu \geqq 2$, асимптотические формулы для величин

$$\frac{1}{m(G_5)}\int_{G_5} Z^2(t)\cos(t \ln \mu)\,\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{m(G_6)}\int_{G_6} Z^2(t)\cos(t \ln \mu)\,\mathrm{d}t,$$

содержат члены нового типа по сравнению с формулой А. Сельберга (4):

$$\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\sin x}{x}, \quad -\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\sin y}{y},$$

соответственно, где $d(\mu)$ — число делителей μ.

Наконец заметим, что дискретные средства полученные в настоящей работе, мы используем в одной из последующих работ, при изучении теорем А. Сельберга о нулях функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$, (см. [5], Теорема А и С, стр. 46, 49).

А именно, мы получим дополнение к Теореме С А. Сельберга для промежутка $\langle T, T+U\rangle$, в случае некоторого бесконечного семейства множеств нулевой меры (т.е. в случае исключительных множеств для Теоремы С А. Сельберга).

Кроме того мы покажем, что дискретной основой для Теоремы А Атле Сельберга о плотности нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$, является одна закономерность, которую естественно назвать обобщенным законом Грама для семейства последовательностей $\{g_\nu(\tau)\}$.

2. Дискретные формулы. (Формулировка результатов)

Пусть $\{g_\nu(\tau)\}$ обозначает семейство последовательностей, определенных соотношением (см. [9], (6))

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau)] = \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\tau}{2}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \tau \in \langle -\pi, \pi\rangle, \tag{5}$$

где

$$\vartheta_1(t) = \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{\pi}{8}. \tag{6}$$

Имеют место следующие дискретные формулы.

Теорема 1

$$\sum_{T\leqq g_\nu \leqq T+U} Z^2[g_\nu(\tau)]\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}g_\nu(\tau)} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{U\ln P_0}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\ln\frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2}+2c\right) + O(T^{1/2}\xi^5\ln T) \tag{7}$$

для $(\mu_1, \mu_2) = 1$ и O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

Теорема 2.

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu Z^2[g_\nu(\tau)] \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{ig_\nu(\tau)} = O(T^{1/2}\xi \ln T) \tag{8}$$

для $2 \leqq \mu_1, \mu_2 \leqq \xi$, $(\mu_1, \mu_2) = 1$, равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Теорема 3.

$$\begin{aligned} &\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} (-1)^\nu Z^2[g_\nu(\tau)] \cos \{g_\nu(\tau) \ln \mu\} = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}} U \ln P_0 \cos \tau + O(T^{1/2}\xi^5 \ln T), \end{aligned} \tag{9}$$

для $2 \leqq \mu \leqq \xi$ и O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, ($d(\mu)$ — число делителей μ).

Из (7), (8) получаем

Следствие 1.

$$\begin{aligned} &\sum_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu}(\tau)] \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{ig_{2\nu}(\tau)} = \frac{U \ln P_0}{\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}} \left(\ln \frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2} + 2c\right) + O(T^{1/2}\xi^5 \ln T), \\ &\sum_{T \leqq g_{2\nu+1} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu+1}(\tau)] \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{ig_{2\nu+1}(\tau)} = \\ &= \frac{U \ln P_0}{\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}} \left(\ln \frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2} + 2c\right) + O(T^{1/2}\xi^5 \ln T), \end{aligned} \tag{10}$$

для $2 \leqq \mu_1, \mu_2 \leqq \xi$, $(\mu_1, \mu_2) = 1$ и O — оценки имеют место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Из (7), (9) получаем

Следствие 2.

$$\begin{aligned} &\sum_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu}(\tau)] \cos \{g_{2\nu}(\tau) \ln \mu\} = \\ &= \frac{U \ln P_0}{\pi\sqrt{\mu}} \left(\ln \frac{P_0^2}{\mu} + 2c + d(\mu) \cos \tau\right) + O(T^{1/2}\xi^5 \ln T), \\ &\sum_{T \leqq g_{2\nu+1} \leqq T+U} Z^2[g_{2\nu+1}(\tau)] \cos \{g_{2\nu+1}(\tau) \ln \mu\} = \\ &= \frac{U \ln P_0}{\pi\sqrt{\mu}} \left(\ln \frac{P_0^2}{\mu} + 2c - d(\mu) \cos \tau\right) + O(T^{1/2}\xi^5 \ln T), \end{aligned} \tag{11}$$

для $2 \leqq \mu \leqq \xi$ и O — оценки имеют место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

3. Интегральные формулы относительно несвязных множеств. (Формулировка результатов)

Пусть (ср. [8], [9])

$$G_5 = G_5(x, T, U) = \bigcup_{T \leqq g_{2\nu} \leqq T+U} \{t\colon g_{2\nu}(-x) < t < g_{2\nu}(x)\}, \qquad 0 < x \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$G_6 = G_6(y, T, U) = \bigcup_{T \leqq g_{2\nu+1} \leqq T+U} \{t\colon g_{2\nu+1}(-y) < t < g_{2\nu+1}(y)\},$$

$$0 < y \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно (см. [9], (59), $U = T^{1/2+\varepsilon}$)

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} 1 = \frac{1}{\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{2\varepsilon}), \tag{12}$$

и (см. [9], (13), $U_1 \to U$)

$$\begin{aligned} m(G_5) &= \frac{x}{\pi} U + O(xT^{2\varepsilon}), \\ m(G_6) &= \frac{y}{\pi} U + O(yT^{2\varepsilon}). \end{aligned} \tag{13}$$

Имеет место

Теорема 4.

$$\begin{aligned} \int_{G_5} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t &= \frac{xU}{\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\ln \frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2} + 2c\right) + O(xT^{1/2}\xi^5), \\ \int_{G_6} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t &= \frac{yU}{\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\ln \frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2} + 2c\right) + O(yT^{1/2}\xi^5), \end{aligned} \tag{14}$$

для $2 \leqq \mu_1, \mu_2 \leqq \xi$, $(\mu_1, \mu_2) = 1$.

Из теоремы 4, в силу (2), (13), получаем

Следствие 3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(G_5)} \int_{G_5} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t &= \frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\ln \frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2} + 2c\right) + O(T^{-\varepsilon/2}), \\ \frac{1}{m(G_6)} \int_{G_6} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t &= \frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\ln \frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2} + 2c\right) + O(T^{-\varepsilon/2}), \end{aligned} \tag{15}$$

для $2 \leqq \mu_1, \mu_2 \leqq \xi$, $(\mu_1, \mu_2) = 1$.

Замечание 1. Итак, средние значения функции

$$Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it}, \tag{16}$$

относительно семейств несвязных множеств G_5, G_6, асимптотически равны среднему значению этой функции на отрезке $\langle T, T+U\rangle$ (см. формулу А. Сельберга (4)).

Особо отметим (см. (15))

Следствие 4.

$$\frac{1}{m\{G_5(x)\}}\int_{G5(x)} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t \sim \frac{1}{m\{G_6(y)\}}\int_{G6(y)} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t, \qquad T\to\infty, \tag{17}$$

для $2 \leqq \mu_1, \mu_2 \leqq \xi$, $(\mu_1, \mu_2) = 1$ и любых $x, y \in (0, \pi/2\rangle$.

Замечание 2. Интересно сравнить соотношение (17), выражающее асимптотическое равенство средних значений функции (16) относительно несвязных множеств $G_5(x)$, $G_6(y)$ при любых $x, y\in(0, \pi/2\rangle$ и соотношение (см. [9], (16))

$$\frac{1}{m\{G_3(x)\}}\int_{G3(x)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{m\{G_4(x)\}}\int_{G4(x)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t \sim 4\,\frac{\sin x}{x}, \qquad T\to\infty, \tag{18}$$

выражающее асимметрию в поведении среднего значению функции $Z^2(t)$, относительно несвязных множеств $G_3(x)$, $G_4(x)$, при любом $x\in(0, \pi/2\rangle$.

Далее имеет место

Теорема 5.

$$\int_{G5} Z^2(t)\cos(t\ln\mu)\,\mathrm{d}t = \frac{xU}{\pi\sqrt{\mu}}\left(\ln\frac{P_0^2}{\mu}+2c\right)+\frac{d(\mu)}{\pi\sqrt{\mu}}\,U\sin x + O(xT^{1/2}\xi^5),$$

(19)

$$\int_{G6} Z^2(t)\cos(t\ln\mu)\,\mathrm{d}t = \frac{yU}{\pi\sqrt{\mu}}\left(\ln\frac{P_0^2}{\mu}+2c\right)-\frac{d(\mu)}{\pi\sqrt{\mu}}\,U\sin y + O(yT^{1/2}\xi^5),$$

для $2 \leqq \mu \leqq \xi$.

Из теоремы 5, в силу (2), (13), получаем

Следствие 5.

$$\frac{1}{m(G_5)}\int_{G5} Z^2(t)\cos(t\ln\mu)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\ln\frac{P_0^2}{\mu}+2c\right)+\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\sin x}{x} + O(T^{-\varepsilon/2}),$$

(20)

$$\frac{1}{m(G_6)}\int_{G_6} Z^2(t)\cos(t\ln\mu)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\ln\frac{P_0^2}{\mu}+2c\right)-\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\sin y}{y}+O(T^{-\varepsilon/2}),$$

для $2 \leqq \mu \leqq \xi$.

Замечание 3. В формулах (20), выражающих средние значения функции

$$Z^2(t)\cos(t\ln\mu), \tag{21}$$

относительно семейств несвязных множеств $G_5(x)$, $G_6(y)$, появляются члены нового типа

$$\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\sin x}{x}, \quad -\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\sin y}{y},$$

по сравнению с формулой А. Сельберга (4), $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu$.

Особо отметим (см. (20))

Следствие 6.

$$\frac{1}{m\{G_5(x)\}}\int_{G_5(x)} Z^2(t)\cos(t\ln\mu)\,\mathrm{d}t - \tag{22}$$

$$-\frac{1}{m\{G_6(x)\}}\int_{G_6(x)} Z^2(t)\cos(t\ln\mu)\,\mathrm{d}t \sim 2\,\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\sin x}{x},$$

для $2 \leqq \mu \leqq \xi$.

Замечание 4. Итак, в поведении функции (21) относительно семейств несвязных множеств $G_5(x)$, $G_6(x)$, проявляется асимметрия, выражаемая формулой (22), (ср. (18)).

4. Z^2-преобразование некоторых тригонометрических сумм относительно несвязных множеств $G_5(x)$, $G_6(y)$

Напомним, что имеют место следующие формулы ($\xi = P_0^{\varepsilon/5}$, см. (2)):

$$\sum_{2\leqq p\leqq\xi}\frac{\ln p}{p} = \ln\xi + O(1) = \frac{\varepsilon}{5}\ln P_0 + O(1),$$

$$\sum_{2\leqq p\leqq\xi}\frac{1}{p} = \ln\ln\xi + O(1) = \ln\ln P_0 + O(1),$$

$$\sum_{2\leqq p\leqq\xi}\frac{1}{\sqrt{p}} < \sum_{2\leqq\mu\leqq\xi}\frac{1}{\sqrt{\mu}} = O(\sqrt{\xi}) = O(T^{\varepsilon/20}),$$

где p пробегает простые числа.

Теперь из (20) получаем Z^2-преобразование тригонометрической суммы

$$\sum_{2 \leq p \leq \xi} \frac{1}{\sqrt{p}} \cos(t \ln p)$$

по простым числам. А именно, имеет место

Следствие 7.

$$\frac{1}{m(G_5)} \int_{G_5} \left\{ \sum_{2 \leq p \leq \xi} \frac{1}{\sqrt{p}} \cos(t \ln p) \right\} Z^2(t)\, \mathrm{d}t = 2 \ln P_0 \ln\ln P_0 + O(\ln P_0),$$

$$\frac{1}{m(G_6)} \int_{G_6} \left\{ \sum_{2 \leq p \leq \xi} \frac{1}{\sqrt{p}} \cos(t \ln p) \right\} Z^2(t)\, \mathrm{d}t = 2 \ln P_0 \ln\ln P_0 + O(\ln P_0),$$

для любых $x, y \in (0, \pi/2\rangle$.

Далее имеют место следующие формулы:

$$\sum_{2 \leq \mu \leq \xi} \frac{1}{\mu} = \ln \xi + O(1) = \frac{\varepsilon}{5} \ln P_0 + O(1),$$

$$\sum_{2 \leq \mu \leq \xi} \frac{\ln \mu}{\mu} = \frac{1}{2} \ln^2 \xi + O(1) = \frac{\varepsilon^2}{50} \ln^2 P_0 + O(1),$$

$$\sum_{2 \leq \mu \leq \xi} \frac{d(\mu)}{\mu} = \frac{1}{2} \ln^2 \xi + O(\ln \xi) = \frac{\varepsilon^2}{50} \ln^2 P_0 + O(\ln P_0), \tag{23}$$

$$\sum_{2 \leq \mu \leq \xi} \frac{d^2(\mu)}{\mu} = \frac{1}{4\pi^2} \ln^4 \xi + O(\ln^3 \xi) = \frac{1}{2500\pi^2} \ln^4 P_0 + O(\ln^3 P_0), \tag{24}$$

$$\sum_{2 \leq \mu \leq \xi} \frac{d(\mu) \ln \mu}{\mu} = O(\ln^3 P_0),$$

$$\sum_{2 \leq \mu \leq \xi} \frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}} = O\{\sqrt{\xi} \cdot \max_{\mu} d(\mu)\} = O(\sqrt{\xi} \cdot T^{\varepsilon/20}) = O(T^{\varepsilon/10}).$$

Заметим, что формулу (24) получил А. Е. Ингам (см. [4], стр. 296), суммированием по частям, из формулы Рамануджана

$$D_2(x) = \sum_{m \leq x} d^2(n) = \frac{1}{\pi^2} x \ln^3 x + O(x \ln^2 x), \qquad x \leq \xi.$$

Аналогичным образом получается формула (23), исходя из формулы Дирихле

$$D_1(x) = \sum_{n \leq x} d(n) = x \ln x + O(x).$$

Пользуясь вышеприведенными формулами, мы получаем Z^2-преобразование тригонометрической суммы

$$\sum_{2 \leqq \mu \leqq \xi} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cos (t \ln \mu),$$

(μ — пробегает натуральные числа). А именно, имеет место (см. (20))

Следствие 8.

$$\frac{1}{m(G_5)} \int_{G_5} \left\{ \sum_{2 \leqq \mu \leqq \xi} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cos (t \ln \mu) \right\} Z^2(t) \, \mathrm{d}t =$$
$$= \left(\frac{2}{5} \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{50} + \frac{\varepsilon^2}{50} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) \ln^2 P_0 + O(\ln P_0),$$
$$\frac{1}{m(G_6)} \int_{G_6} \left\{ \sum_{2 \leqq \mu \leqq \xi} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cos (t \ln \mu) \right\} Z^2(t) \, \mathrm{d}t =$$
$$= \left(\frac{2}{5} \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{50} - \frac{\varepsilon^2}{50} \cdot \frac{\sin y}{y} \right) \ln^2 P_0 + O(\ln P_0),$$

для любых $x, y \in (0, \pi/2\rangle$.

Наконец мы получим Z^2-преобразование тригонометрической суммы, содержащей $d(\mu)$:

$$\sum_{2 \leqq \mu \leqq \xi} \frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}} \cos (t \ln \mu).$$

А именно, имеет место (см. (20)).

Следствие 9.

$$\frac{1}{m(G_5)} \int_{G_5} \left\{ \sum_{2 \leqq \mu \leqq \xi} \frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}} \cos (t \ln \mu) \right\} Z^2(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2500\pi^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \ln^4 P_0 + O(\ln^3 P_0),$$

(25)

$$\frac{1}{m(G_6)} \int_{G_6} \left\{ \sum_{2 \leqq \mu \leqq \xi} \frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}} \cos (t \ln \mu) \right\} Z^2(t) \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2500\pi^2} \cdot \frac{\sin y}{y} \ln^4 P_0 + O(\ln^3 P_0),$$

для любых $x, y \in (0, \pi/2\rangle$.

Замечание 4. Итак, выражения нового типа

$$\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\sin x}{x}, \quad -\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\sin y}{y},$$

входящие в асимптотические формулы (20), при Z^2-преобразовании тригонометрической суммы содержащей $d(\mu)$, играют решающую роль: они порождают главные члены (притом, обратных знаков) в асимптотических формулах (25).

5. Завершение доказательства теорем 4, 5

5.1. В этой части мы завершим доказательство теоремы 4, используя соотношения (10). Так как, (ср. [9], часть 8, $U_1 \to U$)

$$\int_{-x}^{x} Z^2[g_{2\nu}(\tau)]\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{ig_{2\nu}(\tau)} d\tau =$$

$$= 2\ln P_0 \cdot \int_{g_{2\nu}(-x)}^{g_{2\nu}(x)} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} dt + O(xT^{-1/6+\varepsilon}\ln T),$$

то, интегрируя первое соотношение в (10) по τ в промежутке $\langle -x, x\rangle$, получаем первое соотношение в (14), и, аналогичным образом — второе.

5.2. Так как, (ср. [9], часть 8, $U_1 \to U$),

$$\int_{-x}^{x} Z^2[g_{2\nu}(\tau)] \cos\{g_{2\nu}(\tau)\ln\mu\}\, d\tau =$$

$$= 2\ln P_0 \cdot \int_{g_{2\nu}(-x)}^{g_{2\nu}(x)} Z^2(t)\cos(t\ln\mu)\, dt + O(xT^{-1/6+\varepsilon}\ln T),$$

то, способом 5.1, из (11), получаем (19).

6. Вспомогательные утверждения

Нам остается доказать теоремы 1—3. Доказательства названных теорем опираются на следующие вспомогательные утверждения.

Пусть

$$F(\alpha, \gamma) = \int_{T}^{T+U} \left(\frac{t}{e\alpha}\right)^{i(t+\gamma)} \ln\frac{t}{2\pi}\, dt. \tag{26}$$

Имеет место, (ср. [5], стр. 6, Лемма 2),

Лемма 1. Если $0 \leqq \gamma \leqq 1$ и $\alpha > 0$, то

$$F(\alpha, \gamma) =$$

$$= O(T^{2\varepsilon}), \qquad 0 < \alpha < 3\pi, \tag{27}$$

$$= O\left(\frac{\ln T}{\ln \dfrac{T+\sqrt{T}}{\alpha}}\right), \qquad 3\pi \leqq \alpha \leqq T, \tag{28}$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} \sqrt{2\pi\alpha}\, e^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)} \ln \frac{T}{2\pi} + \tag{29}$$

$$+ O\left(\frac{\ln T}{\ln \dfrac{\alpha}{T-\sqrt{T}}} + \frac{\ln T}{\ln \dfrac{T+U+\sqrt{T}}{\alpha}}\right), \qquad T \leqq \alpha \leqq T+U,$$

$$= O\left(\frac{\ln T}{\ln \dfrac{\alpha}{T+U-\sqrt{T}}}\right), \qquad \alpha \geqq T+U. \tag{30}$$

Пусть

$$f_1(\nu;\, \alpha,\, \gamma,\, \tau) \equiv f_1(\nu) = \frac{1}{2\pi}\{g_\nu(\tau)+\gamma\} \ln \frac{g_\nu(\tau)}{e\alpha}.$$

Имеет место

Лемма 2. Если

$$2\pi P_0^{-2\varepsilon/5} < \alpha < 2\pi P_0^{2+2\varepsilon/5}, \qquad 0 \leqq \gamma \leqq 1, \tag{31}$$

то

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} e^{2\pi \mathrm{i} f_1(\nu)} = \frac{1}{\pi} F(\alpha,\, \gamma) + O(1), \tag{32}$$

где O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi,\, \pi\rangle$.

Теперь, из леммы 1 и 2, получается

Лемма 3. Если $0 \leqq \gamma \leqq 1$, то

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \left(\frac{g_\nu(\tau)}{e\alpha}\right)^{\mathrm{i}(g_\nu(\tau)+\gamma)} =$$

$$= O T^{2\varepsilon}), \qquad 2\pi P_0^{-2\varepsilon/5} < \alpha < 3\pi, \tag{33}$$

$$= O\left(\frac{\ln T}{\ln \dfrac{T+\sqrt{T}}{\alpha}}\right), \qquad 3\pi \leqq \alpha \leqq T, \tag{34}$$

(35) $$= \frac{2}{\pi} e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} \sqrt{2\pi a}\, e^{-\mathrm{i}(a+\gamma)} \ln P_0 +$$

$$+ O\left(\frac{\ln T}{\ln \dfrac{a}{T-\sqrt{T}}} + \frac{\ln T}{\ln \dfrac{T+U+\sqrt{T}}{a}}\right), \qquad T \leqq a \leqq T+U,$$

(36) $$= O\left(\frac{\ln T}{\ln \dfrac{a}{T+U-\sqrt{T}}}\right), \qquad T+U \leqq a \leqq 2\pi P_0^{2+2\varepsilon/5},$$

где O — оценки имеют место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Наконец, имеет место

Лемма 4. Если $-1 \leqq \gamma \leqq 1$ и λ — действительное число, удовлетворяющее условию

$$P_0^{\frac{A}{1+2\varepsilon/5}} < |\lambda| < \left(1 + \frac{2\varepsilon}{5}\right) \ln P_0,$$

то,

(37) $$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \left(\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}\right)^{\mathrm{i}\gamma} e^{\mathrm{i}\lambda g_\nu(\tau)} = O\left(\frac{\ln T}{|\lambda|}\right),$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Замечание 5. Леммы 3, 4 представляют собой дискретные аналоги Леммы 2, 3 А. Сельберга (см. [5], стр. 6, 8).

7. Завершение доказательства теоремы 1

В этой части мы завершим доказательство теоремы 1 с помощью лемм 3, 4.

7.1. Исходим из формулы Римана-Зигеля

$$Z(t) = 2 \sum_{n \leqq \bar{t}} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta - t \ln n) + O(t^{-1/4}), \qquad \bar{t} = \sqrt{\frac{t}{2\pi}},$$

где, (см. [6], стр. 383),

(38) $$\vartheta = \vartheta(t) = \frac{1}{2} t \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \pi + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Для $t \in \langle T, T+U \rangle$ имеем, (см. (2), (6), (38), ср. [7], (57), $H \to U$),

$$Z(t) = 2 \sum_{n < P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta - t \ln n) + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{T}} \cdot \frac{U}{\sqrt{T}}\right) + O(T^{-1/4}) =$$

$$= 2 \sum_{n < P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta_1 - t \ln n) + O\left(\frac{1}{T} \sum_{n < P_0} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O(T^{-1/4+\varepsilon}) =$$

$$= 2 \sum_{n < P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta_1 - t \ln n) + O(T^{-1/4+\varepsilon}) =$$

$$= 2 \sum_{n < P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta_1 - t \ln n) + O(T^{-3/20}).$$

Следовательно, (см. (6)),

(39)
$$Z(t) = Y(t) + \bar{Y}(t) + O(T^{-3/20}),$$

$$Y(t) = e^{\mathrm{i}\vartheta_1(t)} \sum_{n < P_0} n^{-1/2 - \mathrm{i}t} = \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{\mathrm{i}t/2} e^{-\mathrm{i}\pi/8} \sum_{n < P_0} n^{-1/2 - \mathrm{i}t}.$$

Отсюда получаем

$$Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}t} = Y^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}t} + \bar{Y}^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}t} + 2Y(t)\bar{Y}(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}t} + R_1(t) + O(T^{-3/10}),$$

где

(40)
$$R_1(t) = O\left(T^{-3/20} \cdot \left|\sum_{n < P_0} n^{-1/2 - \mathrm{i}t}\right|\right).$$

Теперь, (см. (5), (12)),

(41)
$$\sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} Z^2[g_\nu(\tau)]\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}g_\nu(\tau)} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + O(T^{-3/10} \cdot U \ln T),$$

где

(42)
$$W_1 = \sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} Y^2[g_\nu(\tau)]\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}g_\nu(\tau)},$$

$$W_2 = \sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} \bar{Y}^2[g_\nu(\tau)]\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}g_\nu(\tau)},$$

$$W_3 = 2 \sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} Y[g_\nu(\tau)]\bar{Y}[g_\nu(\tau)]\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\mathrm{i}g_\nu(\tau)},$$

$$W_4 = \sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} R_1[g_\nu(\tau)].$$

7.2. В этой части мы изучим величину W_1. Имеем, (см. (39)),

$$W_1 = e^{-i\pi/4} \sum_{m,\, n < P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} \left(\frac{\mu_2 g_\nu(\tau)}{2\pi e m n \mu_1}\right)^{ig_\nu(\tau)} = \tag{43}$$

$$= e^{-i\pi/4} \sum_{m,\, n < P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} \left(\frac{g_\nu(\tau)}{e\alpha_1}\right)^{ig_\nu(\tau)} = W_1(\alpha_1),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{2\pi m n \mu_1}{\mu_2}. \tag{44}$$

Внутренняя сумма в (43) выражается с помощью леммы 3, $\gamma = 0$. В случае (33) имеем, (см. (44)),

$$mn < \frac{3\mu_2}{2\mu_1} < 2\mu_2 \leqq 2\xi,$$

$$\sum_{m,\, n < 2\xi}\sum 1 = O(\xi^2).$$

Следовательно,

$$W_1(2\pi P_0^{-2\varepsilon/5} < \alpha_1 < 3\pi) = O(\xi^2 T^{2\varepsilon}) = O(T^{1/2}\xi^2 \ln T). \tag{45}$$

В случае $\alpha_1 \geqq 3\pi$, (см. (34)—(36)), мы получаем способом А. Сельберга (см. [5], (4.10), (4.14), $h = k = 0$) соотношение

$$W_1(\alpha_1 \geqq 3\pi) = \begin{cases} O(T^{1/2}\xi^2 \ln T), & \mu_2 \geqq \mu_1, \\ \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{U \ln P_0}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\cdot \displaystyle\sum_{\frac{P_0}{\mu_1} < n < \frac{P_0}{\mu_2}} \frac{1}{n} + O(T^{1/2}\xi^2 \ln T), & \mu_2 < \mu_1, \end{cases} \tag{46}$$

(ср. [5], стр. 54). Теперь, (см. (45), (46)),

$$W_1 = \begin{cases} O(T^{1/2}\xi^2 \ln T), & \mu_2 \geqq \mu_1, \\ \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{U \ln P_0}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\cdot \displaystyle\sum_{\frac{P_0}{\mu_1} < n < \frac{P_0}{\mu_2}} \frac{1}{n} + O(T^{1/2}\xi^2 \ln T), & \mu_2 < \mu_1. \end{cases} \tag{47}$$

7.3. В этой части мы изучим величину W_2. Имеем, (см. (39)),

$$W_2 = e^{i\pi/4} \sum_{m,\, n < P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} \left(\frac{2\pi e m n \mu_2}{\mu_1 g_\nu(\tau)}\right)^{ig_\nu(\tau)} =$$

$$= e^{i\pi/4} \sum_{m,\, n < P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} \left(\frac{g_\nu(\tau)}{e\alpha_2}\right)^{-ig_\nu(\tau)},$$

где

$$\alpha_2 = \frac{2\pi mn\mu_2}{\mu_1}.$$

Переходя в лемме 3, $\gamma = 0$, к сопряженным величинам, то, способом 7.2, получаем соотношение

$$W_2 = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cdot\frac{U \ln P_0}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\cdot \sum\limits_{\frac{P_0}{\mu_2}<n<\frac{P_0}{\mu_1}} \frac{1}{n} + O(T^{1/2}\xi^2 \ln T), & \mu_2 > \mu_1, \\ O(T^{1/2}\xi^2 \ln T), & \mu_2 \leqq \mu_1. \end{cases} \tag{48}$$

7.4. Пусть

$$\mu' = \max(\mu_1, \mu_2), \quad \mu'' = \min(\mu_1, \mu_2).$$

Тогда, (см. (47), (48), ср. [5], стр. 54),

$$W_1 + W_2 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{U \ln P_0}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\cdot \sum_{\frac{P_0}{\mu'}<n<\frac{P_0}{\mu''}} \frac{1}{n} + O(T^{1/2}\xi^2 \ln T). \tag{49}$$

7.5. В этой части мы изучим величину W_3. Имеем, (см. (39), (42)),

$$W_3 = 2 \sum\sum_{m,\, n<P_0} \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} \left(\frac{n\mu_2}{m\mu_1}\right)^{ig_\nu(\tau)} =$$

$$= W_3(n\mu_2 = m\mu_1) + W_3(n\mu_2 \neq m\mu_1) = W_{31} + W_{32}.$$

В силу (12), (ср. [5], (4.18)),

$$W_{31} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{U \ln P_0}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \sum_{n<\frac{P_0}{\mu'}} \frac{1}{n} + O(T^{2\varepsilon} \ln T).$$

Далее, по лемме 4, $\gamma = 0$, способом [5], стр. 25, получаем оценку

$$W_{32} = O(T^{1/2}\xi^5 \ln T).$$

Следовательно,

$$W_3 = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{U \ln P_0}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\cdot \sum_{n<\frac{P_0}{\mu'}} \frac{1}{n} + O(T^{1/2}\xi^5 \ln T). \tag{50}$$

7.6. В силу (49), (50), (ср. [5], стр. 54),

$$W_1 + W_2 + W_3 = \tag{51}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{U \ln P_0}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\sum_{\frac{P_0}{\mu'}<n<\frac{P_0}{\mu''}} \frac{1}{n} + 2\sum_{n<\frac{P_0}{\mu'}} \frac{1}{n}\right) + O(T^{1/2}\xi^5 \ln T) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{U \ln P_0}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \left(\sum_{n < \frac{P_0}{\mu'}} \frac{1}{n} + \sum_{n < \frac{P_0}{\mu''}} \frac{1}{n} \right) + O(T^{1/2} \xi^5 \ln T) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{U \ln P_0}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \left(\ln \frac{P_0^2}{\mu_1 \mu_2} + 2c \right) + O(T^{1/2} \xi^5 \ln T),$$

по известной формуле

$$\sum_{n < x} \frac{1}{n} = \ln x + c + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Далее, используя в надлежащем месте лемму 4, (ср. [5], стр. 19),

$$\sum_{g_\nu} \left| \sum_n n^{-1/2 - ig_\nu(\tau)} \right| \leqq \left(\sum_{g_\nu} 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{m, n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} \left(\frac{n}{m} \right)^{ig_\nu(\tau)} \right)^{1/2} <$$

$$< A \sqrt{U \ln T} \left(AU \ln T \sum \frac{1}{n} + \sum_{m \neq n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} \left(\frac{n}{m} \right)^{ig_\nu(\tau)} \right)^{1/2} <$$

$$< A \sqrt{U \ln T} (AU \ln^2 T + AT^{1/2} \ln T)^{1/2} < AU (\ln T)^{3/2}$$

и, следовательно, (см. (40), (42)),

$$W_4 = O(T^{-3/20} \cdot U (\ln T)^{3/2}) = O(T^{1/2} \xi^5 \ln T). \tag{52}$$

Наконец, из (41), в силу (51), (52), следует (7).

8. Завершение доказательства теоремы 2

В этой части мы завершим доказательство теоремы 2 с помощью леммы 4.

8.1. Имеет место, (см. (5), (39)),

$$Y[g_\nu(\tau)] = e^{i \frac{\pi}{2} \nu + i \frac{\tau}{2}} \sum_{n < P_0} n^{-\frac{1}{2} - ig_\nu(\tau)}.$$

Следовательно, (ср. (41), (42)),

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T + U} (-1)^\nu Z^2[g_\nu(\tau)] \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{ig_\nu(\tau)} = \tag{53}$$

$$= W_1' + W_2' + W_3' + W_4' + O(T^{-3/10} U \ln T),$$

где

$$W_1' = e^{i\tau}\sum_{m,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} \left(\frac{mn\mu_1}{\mu_2}\right)^{-ig_\nu(\tau)},$$

(54)
$$W_2' = e^{-i\tau}\sum_{m,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} \left(\frac{mn\mu_2}{\mu_1}\right)^{ig_\nu(\tau)},$$

$$W_3' = 2\sum_{m,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} (-1)^\nu \left(\frac{n\mu_2}{m\mu_1}\right)^{ig_\nu(\tau)}$$

и (ср. (52), здесь использована лемма 4)

(55)
$$W_4' + O(T^{-3/10}U \ln T) = O(T^{1/2}\xi^2 \ln T).$$

8.2. Сначала обратим внимание на величину W_1'. Прежде всего заметим, что из равенства

$$mn\mu_1 = \mu_2$$

следует

$$1 = (\mu_1, \mu_2) = (\mu_1, mn\mu_1) = \mu_1,$$

что противоречит условию $2 \leqq \mu_1, \mu_2$. Значит,

$$\frac{mn\mu_1}{\mu_2} \neq 1,$$

и, по лемме 4, $\gamma = 0$,

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \left(\frac{mn\mu_1}{\mu_2}\right)^{-ig_\nu(\tau)} = O\left(\frac{\ln T}{\left|\ln \dfrac{mn\mu_1}{\mu_2}\right|}\right).$$

Так как, в случае $mn\mu_1 > \mu_2$

$$\left|\ln \frac{mn\mu_1}{\mu_2}\right| \geqq \ln \frac{\mu_2 + 1}{\mu_2} > \frac{A}{\mu_2},$$

а в случае $mn\mu_1 < \mu_2$,

$$\left|\ln \frac{mn\mu_1}{\mu_2}\right| = \ln \frac{\mu_2}{mn\mu_1} \geqq \ln \frac{\mu_2}{\mu_2 - 1} > \frac{A}{\mu_2},$$

то, (см. (54)),

(56)
$$W_1' = O\left(\mu_2 \ln T \cdot \sum_{m,n < P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}}\right) = O(T^{1/2}\xi \ln T).$$

Аналогичным образом получаем оценку

$$W_2' = O(T^{1/2}\xi \ln T). \tag{57}$$

8.3. Теперь мы изучим величину W_3'. Положим

$$W_3' = W_3'(n\mu_2 = m\mu_1) + W_3'(n\mu_2 \neq m\mu_1) = W_{31}' + W_{32}'. \tag{58}$$

Очевидно,

$$W_{31}' = 2\sum_{m,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} (-1)^\nu = O(T^{1/2}). \tag{59}$$

В случае W_{32}', внутреннюю сумму напишем так:

$$\begin{gathered}\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} e^{2\pi i \varphi(\nu)},\\ \varphi(\nu) = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2\pi} g_\nu(\tau) \ln \frac{n\mu_2}{m\mu_1}.\end{gathered} \tag{60}$$

Так как, (см. [9], (46), $U_2(T_0) \to U$),

$$T - \frac{A}{\ln T} < g_\nu(\tau) < T + U + \frac{A}{\ln T}, \qquad g_\nu \in \langle T, T+U \rangle, \tag{61}$$

то обычным образом получаем оценку, (см. (2), (7), (8)),

$$\varphi'(\nu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\ln \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}} \ln \frac{n\mu_2}{m\mu_1} <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln (P_0\mu_2)}{\ln \frac{T - \frac{A}{\ln T}}{2\pi}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\ln P_0 + \ln \xi}{\ln P_0 + O\left(\frac{1}{T \ln T}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\varepsilon}{5}\right)(1 + o(1)) < \frac{1}{2} + 0{,}26,$$

т. е.

$$\frac{1}{2} < \varphi'(\nu) < \frac{1}{2} + 0{,}26 < 1, \qquad n\mu_2 > m\mu_1,$$

и, аналогичным способом,

$$\frac{1}{2} - 0{,}26 < \varphi'(\nu) < \frac{1}{2}, \qquad n\mu_2 < m\mu_1.$$

Конечно,

$$\varphi''(\nu) < 0, \qquad n\mu_2 > m\mu_1,$$
$$\varphi''(\nu) > 0, \qquad n\nu_2 < m\mu_1.$$

Следовательно, методом ван дер Корпута, (см. [6], стр. 78, Лемма 2 и стр. 73, Лемма 1), получаем оценку

$$\sum_{T \leqq g\nu \leqq T+U} e^{2\pi i\varphi(\nu)} = O(1).$$

Значит, (см. (54)),

$$W'_{32} = O\left(\sum_{m,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}}\right) = O(T^{1/2}). \tag{62}$$

Наконец, из (53), (см. (56)—(62)), получаем (8).

9. Завершение доказательства теоремы 3

В этой части мы завершим доказательство теоремы 3 с помощью леммы 4.

В случае $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu \geqq 2$ имеем, (см. (54)),

$$W'_1 = e^{i\tau}\sum_{m,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g\nu} \left(\frac{mn}{\mu}\right)^{-ig\nu(\tau)} = \tag{63}$$

$$= W'_1(mn = \mu) + W'_1(mn \neq \mu) = W'_{11} + W'_{12}.$$

Прежде всего, (см. (12)),

$$W'_{11} = e^{i\tau} \sum_{\substack{m,n < P_0 \\ mn = \mu}}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq g\nu \leqq T+U} 1 = \tag{64}$$

$$= e^{i\tau}\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{1}{\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{2\varepsilon})\right) =$$

$$= e^{i\tau}\frac{d(\mu)}{\pi\sqrt{\mu}} U \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{2\varepsilon}),$$

(очевидно, $d(\mu) < \mu^{1/2}$). Так как способом изложенным в 8.2 получаем оценку

$$W'_{12} = O(T^{1/2}\xi \ln T), \tag{65}$$

то, (см. (75)—(77)),

(66) $$W_1' = \frac{2}{\pi} e^{i\tau} \frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}} U \ln P_0 + O(T^{1/2}\xi \ln T).$$

Далее, (см. (66)),

$$W_2' = e^{-i\tau} \sum_{m,\,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} (mn\mu)^{ig_\nu(\tau)}.$$

Поскольку $mn\mu \geqq 2$, то, способом изложенным в 8.2, получаем оценку

(67) $$W_2' = O(T^{1/2}\xi \ln T).$$

Еще, (см. (54)), способом изложенным в 8.3, получаем

(68) $$W_3' = 2 \sum_{m,\,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{g_\nu} (-1)^\nu \left(\frac{n\mu}{m}\right)^{ig_\nu(\tau)} =$$

$$= W_3'(n\mu = m) + W_3'(n\mu \neq m) = W_{31}' + W_{32}' = O(T^{1/2}).$$

Наконец, (см. (53), (55), (66)—(68)), получаем (9).

10. Доказательство леммы 1

Пусть

$$f_2(t,\,\alpha,\,\gamma) \equiv f_2(t) = (t + \gamma) \ln \frac{t}{e\alpha}, \qquad h(t) = \ln \frac{t}{2\pi}.$$

Имеет место

$$\frac{f_2'(t)}{h(t)} = \frac{\ln \frac{t}{\alpha} + \frac{\gamma}{t}}{\ln \frac{t}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{f_2'(t)}{h(t)}\right)' = \frac{1}{t \ln^2 \frac{t}{2\pi}} \left(\ln \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\gamma}{t} \ln \frac{et}{2\pi}\right).$$

10.1. Интеграл (26), в случае $3\pi \leqq \alpha \leqq T$, оцениваем способом [6], стр. 73, Лемма 2, (ср. [5], стр. 7):

$$\left|\int_T^{T+U} h(t) e^{if_2(t)}\, \mathrm{d}t\right| \leqq \frac{4}{m},$$

где

$$\frac{f_2'(t)}{h(t)} \geqq m > 0,$$

или $\leqq -m < 0$, если $h(t)/f_2'(t)$ — монотонна, (или, так как $h(t) > 0$, если $f_2'(t)/h(t)$ монотонна). Именно, так как

$$\left(\frac{f_2'(t)}{h(t)}\right)' > 0, \qquad 3\pi \leqq \alpha \leqq T,$$

то, пользуясь оценками

$$\frac{f_2'(t)}{h(t)} > A\,\frac{\ln\dfrac{T}{\alpha}}{\ln T} > A\,\frac{\ln\dfrac{T+\sqrt{T}}{\alpha}}{\ln T}, \qquad 3\pi \leqq \alpha \leqq T - \sqrt{T}, \quad t \in \langle T, T+U\rangle;$$

$$\frac{f_2'(t)}{h(t)} > A\,\frac{\ln\dfrac{T+\sqrt{T}}{\alpha}}{\ln T}, \qquad T-\sqrt{T} \leqq \alpha \leqq T, \quad t \in \langle T+\sqrt{T}, T+U\rangle;$$

$$\sqrt{T} < \frac{A}{\ln\dfrac{T+\sqrt{T}}{\alpha}}, \qquad T-\sqrt{T} \leqq \alpha \leqq T, \quad t \in \langle T, T+\sqrt{T}\rangle,$$

получаем (28).

10.2. В случае $\alpha \geqq T+U$ мы имеем

$$\left(-\frac{f_2'(t)}{h(t)}\right)' < 0.$$

Интервал (26) оцениваем как в 10.1. А именно, пользуясь оценками

$$-\frac{f_2'(t)}{h(t)} > A\,\frac{\ln\dfrac{\alpha}{T+U} - \dfrac{\gamma}{T}}{\ln T} > A\,\frac{\ln\dfrac{\alpha}{T+U-\sqrt{T}}}{\ln T},$$
$$\alpha \geqq T+U+\sqrt{T}, \quad t \in \langle T, T+U\rangle;$$

$$-\frac{f_2'(t)}{h(t)} > A\,\frac{\ln\dfrac{\alpha}{T+U-\sqrt{T}} - \dfrac{\gamma}{T}}{\ln T} > A\,\frac{\ln\dfrac{\alpha}{T+U-\sqrt{T}}}{\ln T},$$
$$T+U \leqq \alpha \leqq T+U+\sqrt{T}, \quad t \in \langle T, T+U-\sqrt{T}\rangle;$$

$$\sqrt{T} < \frac{A}{\ln \dfrac{a}{T + U - \sqrt{T}}},$$

$$T + U \leqq a \leqq T + U + \sqrt{T}, \quad t \in \langle T + U - \sqrt{T}, T + U \rangle,$$

получаем (30).

10.3. Имеем, (см. (26)),

$$F(a, \gamma) = \ln \frac{T}{2\pi} \int_T^{T+U} \left(\frac{t}{ea}\right)^{i(t+\gamma)} dt + O\left(\frac{U}{T} \cdot U\right) = \tag{69}$$

$$= F_1(a, \gamma) \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U^2}{T}\right).$$

В случае функции $F_1(a, \gamma)$, $T \leqq a \leqq T + U$, делаем как А. Сельберг, [5], стр. 7, 8. Только члену $O(T/U)$ у А. Сельберга, ([5], стр. 8), соответствует в нашем случае член

$$O\left(\frac{T}{U} \ln T\right).$$

Однако,

$$\frac{U^2}{T} < \frac{T}{U} \ln T,$$

для $U < T^{2/3} (\ln T)^{1/3}$, это условие удовлетворяется, так как $U = T^{1/2 + \varepsilon}$, $\varepsilon \leqq 1/10$, см. (2)) и

$$\frac{T}{U} < \frac{A}{\ln \dfrac{a}{T - \sqrt{T}}}.$$

Значит, способом А. Сельберга получаем (29).

10.4. В случае $0 < a \leqq 3\pi$, в силу [5], стр. 6, Лемма 2, первая оценка, имеем

$$F_1(a, \gamma) = O\left(\frac{1}{\ln \dfrac{T + \sqrt{T}}{a}}\right) = O\left(\frac{1}{\ln \dfrac{T + \sqrt{T}}{3\pi}}\right) = O\left(\frac{1}{\ln T}\right).$$

Следовательно, (см. (2), (69)),

$$F(a, \gamma) = O(1) + O(T^{2\varepsilon}) = O(T^{2\varepsilon}),$$

т. е. (27).

11. Доказательство леммы 2

Прежде всего, (см. (5), (6); теперь предполагаем, что соотношением (5) последовательность $\{g_\nu(\tau)\}$ определена для всех $\nu \geqq 1$),

$$\frac{dg_\nu(\tau)}{d\nu} = \frac{\pi}{2\vartheta_1'[g_\nu(\tau)]} = \frac{\pi}{\ln \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}},$$

(70)

$$\frac{d^2 g_\nu(\tau)}{d\nu^2} = -\frac{\pi^2}{g_\nu(\tau)\ln^3 \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}.$$

Далее, (относительно $f_1(\nu)$ см. часть 6),

(71)
$$f_1'(\nu) = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{g_\nu(\tau)}{\alpha} + \frac{\gamma}{g_\nu(\tau)}\right)\frac{1}{\ln \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}},$$

(72)
$$f_1''(\nu) = \frac{\pi}{2g_\nu(\tau)\ln^3 \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}\left(\ln \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\gamma}{g_\nu(\tau)}\ln \frac{eg_\nu(\tau)}{2\pi}\right).$$

В силу (61)

$$(1-\delta)P_0^2 < \frac{g_\nu(\tau)}{2\pi} < (1+\delta)P_0^2,$$

($0 < \delta$ — сколь угодно малое число), и, (см. (31)),

$$\ln \frac{g_\nu(\tau)}{\alpha} < \ln\left((1+\delta)P_0^2 \cdot P_0^{2\varepsilon/5}\right) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{5}\right)\ln P_0^2 + \ln(1+\delta)$$

$$\ln \frac{g_\nu(\tau)}{\alpha} > \ln \frac{(1-\delta)P_0^2}{P_0^{2+2\varepsilon/5}} = -\frac{\varepsilon}{5}\ln P_0^2 + \ln(1-\delta).$$

Следовательно,

$$f_1'(\nu) < \frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{\varepsilon}{5}\right)\ln P_0^2 + \ln(1+\delta) + \frac{A}{T}\right\}\cdot\frac{1}{\ln((1-\delta)P_0^2)} < \frac{3}{4},$$

$$f_1'(\nu) > \frac{1}{2}\left\{-\frac{\varepsilon}{5}\ln P_0^2 + \ln(1-\delta)\right\}\cdot\frac{1}{\ln((1+\delta)P_0^2)} > -\frac{\varepsilon}{11},$$

т. е.

(73) $$|f_1'(v)| < \frac{3}{4}.$$

(A) Сначала рассмотрим случай $\gamma > 0$.

11.1. Если $\alpha \leqq 2\pi$, то $f_1''(v) < 0$, т. е. $f_1'(v)$ — монотонна. Следовательно, по известной лемме (см. [6], стр. 78) получаем

(74) $$\sum_{T \leqq g_v \leqq T+U} e^{2\pi i f_1(v)} = \sum_{v=\bar{v}}^{\bar{v}+N} e^{2\pi i f_1(v)} =$$
$$= \int_{\bar{v}}^{\bar{v}+N} e^{2\pi i f_1(x)}\,\mathrm{d}x + O(1) = F_2(\alpha, \gamma, \tau) + O(1),$$

где

(75) $$\bar{v} = \min\{v\colon g_v \in \langle T, T+U\rangle\},$$
$$\bar{v} + N = \max\{v\colon g_v \in \langle T, T+U\rangle\}.$$

Полагая $t = g_x(\tau)$, получаем (см. (70))

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}g_x(\tau)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \quad \frac{\mathrm{d}g_x(\tau)}{\mathrm{d}x} = \frac{\pi}{\ln\dfrac{g_x(\tau)}{2\pi}},$$

(76) $$\left(\frac{\mathrm{d}g_x(\tau)}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} = \frac{1}{\pi}\ln\frac{t}{2\pi}.$$

Следовательно, (ср. (26)),

(77) $$F_2(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{1}{\pi}\int_{g_{\bar{v}}(\tau)}^{g_{\bar{v}+N}(\tau)} e^{i(t+\gamma)\ln\frac{t}{e\alpha}}\cdot\ln\frac{t}{2\pi}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_T^{T+U}\left(\frac{t}{e\alpha}\right)^{i(t+\gamma)}\ln\frac{t}{2\pi}\,\mathrm{d}t + O(1) = \frac{1}{\pi}F(\alpha, \gamma) + O(1),$$

так как (см. [9], (46), $U_2(T_0) \to U$)

(78) $$g_{v+1}(\tau) - g_v(\tau) = \frac{\pi}{\ln\dfrac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{U}{T\ln^2 T}\right) = O\left(\frac{1}{\ln T}\right),$$

для $g_v, g_{v+1} \in \langle T, T+U\rangle$. Значит, соотношение (32) имеет место в случае $\alpha \leqq 2\pi$.

11.2. Аналогичным образом получаем соотношение (32) и в случае $\alpha \geqq 2\pi + \delta$, ($0 < \delta$ — сколь угодно малое число), так как тогда $f_1''(v) > 0$, (см. (72)). Значит, $f_1'(v)$ — монотонна, и, кроме того, имеет место оценка (73).

11.3. Остается изучить случай $2\pi < \alpha < 2\pi + \delta$. Значения α, удовлетворяющие этому условию, мы подразделим на два класса.

В первый класс входят те значения α, для которых имеет место $f_1''(\nu;\alpha,\gamma,\tau) \neq 0$, $\nu \in \langle \bar{\nu}, \bar{\nu}+N \rangle$, ($\nu$ — пробегает весь указанный промежуток), при любом но фиксированном $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Для таких α мы получаем соотношение (32) как в 11.1.

Во второй класс входят те значения α, для которых уравнение $f_1''(\nu;\alpha,\gamma,\tau) = 0$ имеет корень (в переменной ν). Пусть $\bar{\alpha}$ входит во второй класс. Имеем (см. (70), (72))

$$f_3(\nu;\bar{\alpha},\gamma,\tau) = \ln\frac{\bar{\alpha}}{2\pi} - \frac{\gamma}{g_\nu(\tau)}\ln\frac{eg_\nu(\tau)}{2\pi},$$

$$f_3'(\nu;\bar{\alpha},\gamma,\tau) = \frac{\pi\gamma}{g_\nu^2(\tau)} > 0.$$

Значит, $f_3(\nu;\bar{\alpha},\gamma,\tau)$ возрастает при $\nu \in \langle \bar{\nu}, \bar{\nu}+N \rangle$. Так как, однако, корень $\tilde{\nu}$ уравнения $f_1''(\nu;\bar{\alpha},\gamma,\tau) = 0$ является и корнем уравнения $f_3(\nu;\bar{\alpha},\gamma,\tau) = 0$, (см. (72)) а последнее уравнение имеет единственный корень $\tilde{\nu} \in \langle \bar{\nu}, \bar{\nu}+\mathrm{N} \rangle$, то $\tilde{\nu}$ является единственным корнем уравнения $f_1''(\nu;\bar{\alpha},\gamma,\tau) = 0$. Теперь ($\nu_0 = [\tilde{\nu}]$)

$$\sum_{\nu=\bar{\nu}}^{\bar{\nu}+N} e^{2\pi i f_1(\nu)} = \sum_{\nu=\bar{\nu}}^{\nu_0-1} + \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\bar{\nu}+N} + O(1) = \int_{\bar{\nu}}^{\nu_0-1} + \int_{\nu_0+1}^{\bar{\nu}+N} + O(1) = \int_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}+N} + O(1),$$

так как на промежутках $\langle \bar{\nu}, \nu_0 - 1 \rangle$, $\langle \nu_0 + 1, \bar{\nu}+\mathrm{N} \rangle$ функция $f_1''(\nu)$ сохраняет знак. Следовательно, на этих промежутках можно действовать как в 11.1. Кроме того,

$$\int_{\nu_0-1}^{\nu_0+1} = O(1).$$

(Б) Теперь мы изучим случай $\gamma = 0$.

11.4. Пусть $\gamma = 0$, $\alpha = 2\pi$. Тогда, (см. (5), (6)),

$$f_1(\nu) = \frac{1}{2\pi} g_\nu(\tau)\ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi e} = \frac{1}{2\pi}\left\{g_\nu(\tau)\ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi} - g_\nu(\tau)\right\} = \frac{1}{2\pi}\left(\pi\nu + \tau + \frac{1}{4}\pi\right)$$

и следовательно,

$$\sum_{T \leq g_\nu \leq T+U} e^{2\pi i f_1(\nu)} = e^{i\left(\tau+\frac{\pi}{4}\right)} \sum_{g_\nu} (-1)^\nu = O(1),$$

т.е. имеет место (32).

11.5. Пусть $\gamma = 0$, $\alpha \neq 2\pi$. Тогда, (см. (72)),

$$f_1''(\nu) = \frac{\pi}{g_\nu(\tau)\ln^3 \dfrac{g_\nu(\tau)}{2\pi}} \ln\frac{a}{2\pi} \neq 0, \qquad \nu \in \langle \bar\nu,\ \bar\nu + N \rangle,$$

т. е. срабатывает способ 11.1 приводящий к соотношению (32).

Заметим, что все встречающиеся в разделе 11 оценки имеют место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi,\ \pi \rangle$.

12. Доказательство леммы 4

Положим, (см. (75)),

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \left(\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi}\right)^{i\gamma} e^{i\lambda g_\nu(\tau)} = \sum_{\nu=\bar\nu}^{\bar\nu+N} e^{2\pi i f_4(\nu)}, \tag{79}$$

где

$$f_4(\nu) \equiv f_4(\nu;\ \lambda,\ \tau) = \frac{1}{2\pi}\left(\gamma \ln\frac{g_\nu(\tau)}{2\pi} + \lambda g_\nu(\tau)\right).$$

Имеем, (ср. (71), (72)),

$$f_4'(\nu) = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{\gamma}{g_\nu(\tau)}\right)\frac{1}{\ln\dfrac{g_\nu(\tau)}{2\pi}},$$

$$f_4''(\nu) = -\frac{\pi}{2g_\nu(\tau)\ln^2\dfrac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}\left(\frac{\lambda}{\ln\dfrac{g_\nu(\tau)}{2\pi}} + \frac{\gamma}{g_\nu(\tau)} + \frac{\gamma}{g_\nu(\tau)\ln\dfrac{g_\nu(\tau)}{2\pi}}\right).$$

Следовательно, (см. условие для λ в лемме 4; $\varepsilon \leqq 1/10$, см. (2)),

$$|f_4'(\nu)| < 3/4, \qquad \nu \in \langle \bar\nu,\ \bar\nu + N \rangle,$$

$$f_4''(\nu) < 0; \qquad \lambda > 0, \quad \nu \in \langle \bar\nu,\ \bar\nu + N \rangle,$$

$$f_4''(\nu) > 0; \qquad \lambda < 0, \quad \nu \in \langle \bar\nu,\ \bar\nu + N \rangle.$$

Далее способом (74)—(78) получаем

$$\sum_{\nu=\bar\nu}^{\bar\nu+N} e^{2\pi i f_4(\nu)} = \int_{\bar\nu}^{\bar\nu+N} e^{2\pi i f_4(x)}\,dx + O(1) = \tag{80}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_T^{T+U} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{i\gamma} e^{i\lambda t} \ln\frac{t}{2\pi}\,dt + O(1) = \frac{1}{\pi}F_3(\gamma,\ \lambda) + O(1).$$

Интегрируя по частям, (ср. [5], стр. 9), получаем оценку

$$F_3(\gamma, \lambda) = O\left(\frac{\ln T}{|\lambda|}\right) - \frac{\gamma}{2\pi\lambda}\int_T^{T+U} e^{i\lambda t}\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{i\gamma - 1} \cdot \tag{81}$$

$$\cdot\left\{\frac{i\gamma}{2\pi}\ln\frac{t}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\right\}\mathrm{d}t = O\left(\frac{\ln T}{|\lambda|}\right).$$

Теперь, из (79), в силу (80), (81), следует (37).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of distribution of primes, Acta Math., 41 (1918), 119—196.

[2] Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 21 (1922), 39—74.

[3] Littlewood, J. E.: Researches in the theory of the Riemann ζ-function, proc. Lond. Math. Soc. (2), 20 (1922), Records XXII—XXVIII.

[4] Ingham, A. E.: Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 27 (1926), 273—300.

[5] Selberg, A.: On the zeros of Riemann's zeta-function, Skr. Norske vid. Akad. Oslo, 10 (1942), 1—59.

[6] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

[7] Мозер, Ян: Об одной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Arithm., 31 (1976), 31—43.

[8] Мозер, Ян: Новыие следствия из формулы Римана-Зигеля, Acta Arithm., 42 (1982), 1—10.

[9] Мозер, Ян: Новые теоремы о среднем для функции $\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2$, Acta Math. Univ. Comen. 46—47, (1985), 21—40.

Адрес автора:
Ján Moser
MFF UK, Katedra matematickej analýzy
Matematický pavilón
Mlynská dolina
Bratislava
842 15

Поступило: 20. 2. 1984

SUMMARY

THE STRUCTURE OF AN A. SELBERG FORMULA IN THE THEORY OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

A. Selberg has proved the following asymptotic formula:

$$\frac{1}{U}\int_T^{T+U} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t \sim \frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\ln\frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2}+2c\right), \qquad T\to\infty,$$

where $(\mu_1, \mu_2) = 1$, $U = T^{1/2+\varepsilon}$, $P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$, c is the Euler constant and $Z(t)$ is the well known function in the theory $\zeta(s)$. In the present paper it is proved that the A. Selberg formula may be decomposed into two infinite collections of analogical formulas, with respect to two collections of disconnected sets $G_5(x)$, $G_6(y)$. The last sets are defined for the segment $\langle T, T+U\rangle$, on the basis of a collection of sequences $\{g_\nu(\tau)\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $\tau\in\langle-\pi, \pi\rangle$. Moreover the following holds:

(a) In the case $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu \leqq 2$ the obtained asymptotic formulas contain the members of the following new type:

$$\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\sin x}{x}, \quad -\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\sin y}{y},$$

where $d(\mu)$ is the number of divisors of the number μ.

(b) In the case μ_1, $\mu_2 \geqq 2$, $(\mu_1, \mu_2) = 1$, the obtained asymptotic formulas do not contain members of new type if compared with the A. Selberg formula.

SÚHRN

ŠTRUKTÚRA JEDNÉHO A. SELBERGOVHO VZORCA V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

A. Selberg dokázal asymptotický vzorec:

$$\frac{1}{U}\int_T^{T+U} Z^2(t)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{it} \mathrm{d}t \sim \frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\left(\ln\frac{P_0^2}{\mu_1\mu_2}+2c\right), \qquad T\to\infty,$$

kde $(\mu_1, \mu_2) = 1$, $U = T^{1/2+\varepsilon}$, $P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$, c je Eulerova konštanta a $Z(t)$ je známa funkcia v teórii $\zeta(s)$. V práci je dokázané, že Selbergov vzorec sa dá rozložiť na dva nekonečné systémy analogických vzorcov, vzhľadom na dva systémy nesúvislých množín $G_5(x)$, $G_6(y)$. Tieto množiny sú definované pre interval $\langle T, T+U\rangle$, na základe systému postupností $\{g_\nu(\tau)\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $\tau\in\langle-\pi, \pi\rangle$. Pritom platí:

(a) V prípade $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu \geqq 2$, získané asymptotické vzorce obsahujú členy nového typu:

$$\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\sin x}{x}, \quad -\frac{d(\mu)}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\sin y}{y},$$

kde $d(\mu)$ je počet deliteľov čísla μ.

(b) V prípade μ_1, $\mu_2 \geqq 2$, $(\mu_1, \mu_2) = 1$, získané asymptotické vzorce neobsahujú členy nového typu v porovnaní so Selbergovým vzorcom.