UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLVIII—XLIX — 1986

ГИПОТЕЗА РИМАНА И ПОВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. Формулировка результатов

Пусть

(1) $$\begin{cases} M^{(+)} = \{t\colon t\in\langle T,\ T+H\rangle,\ Z(t)>0\}, \\ M^{(-)} = \{t\colon t\in\langle T,\ T+H\rangle,\ Z(t)<0\}, \\ M^{(0)} = \{t\colon t\in\langle T,\ T+H\rangle,\ Z(t)=0\}, \end{cases}$$

где

(2) $$\ln_r T \leqq H \leqq T, \qquad r = 1, 2, \ldots$$

и $\ln_1 T = \ln T$, $\ln_2 T = \ln\ln T, \ldots$, (относительно $Z(t)$ см. [5], стр. 94). Очевидно $m(M^{(0)}) = 0$, ($m(M^{(0)})$ — обозначает меру множества $M^{(0)}$).

Так как (K — натуральное число)

$$\operatorname{sgn} Z(t) = \operatorname{sgn} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}},$$

то $m(M^{(+)})$, $m(M^{(-)})$ являются инвариантами относительно преобразования

$$Z(t) \to \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}}, \qquad t\in\langle T,\ T+H\rangle.$$

Это обстоятельство является обоснованием для изучения поведения функции

$$\{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}}, \qquad t\in\langle T,\ T+H\rangle,$$

при очень больших K, скажем, для K удовлетворяющего условию

(3) $$K = K(T, r) = [HT \ln T].$$

Имеет место

Теорема 1. По гипотезе Римана,

$$\int_T^{T+H} |Z(t)|^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t = H + O(1). \tag{4}$$

Так как

$$\left|\int_T^{T+H} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t\right| \leqq \int_T^{T+H} |Z(t)|^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t \neq 0,$$

$(Z(t) \not\equiv 0, t \in \langle T, T+H\rangle)$, то, независимо от какой бы то ни было гипотезы, существует

$$\Omega = \Omega(T, H) \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$

такое, что

$$\int_T^{T+H} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t = \left(\int_T^{T+H} |Z(t)|^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t\right)\cdot \cos\Omega.$$

Отсюда, в силу (4), получаем

Следствие 1. По гипотезе Римана,

$$\int_T^{T+H} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t = H\cos\Omega + O(1). \tag{5}$$

Основой доказательства теоремы 1 является следующая

Лемма. По гипотезе Римана,

$$\int_T^{T+H} |Z(t)|^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t \geqq H - |O(1)|. \tag{6}$$

Теперь мы покажем, каким образом завершается

Доказательство теоремы 1 с помощью леммы. Так как по гипотезе Римана имеет место следующая оценка Д. Е. Литтлвуда (см. [5], стр. 350, ср. стр. 94)

$$|Z(t)| = \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| < A\exp\left(A\frac{\ln t}{\ln_2 t}\right) < \exp\left(A\frac{\ln t}{\ln_2 t}\right), \tag{7}$$

то, (см. (3)),

$$|Z(t)|^{\frac{1}{2K+1}} < \exp\left(\frac{A\ln T}{K\ln_2 T}\right) < \exp\left(\frac{A}{HT\ln_2 T}\right) = \tag{8}$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{HT}\right), \qquad t \in \langle T, T+H\rangle.$$

Следовательно,

$$(9)\qquad \int_T^{T+H} |Z(t)|^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t < H\left\{1 + O\left(\frac{1}{TH}\right)\right\} = H + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Теперь оценки (6), (9) приводят нас к асимптотическому соотношению (4).

2. Оценки снизу для мер некоторых множеств

2.1. Напомним, что в работе [7] мы определили бесконечное семейство последовательностей $\{t_\nu(\tau)\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$, согласно условию

$$\vartheta[t_\nu(\tau)] = \pi\nu + \tau,$$

(относительно t_ν, $\vartheta(t)$ см. [4], стр. 98, 100; $t_\nu(0) = t_\nu$).

Далее, с помощью семейства последовательностей $\{t_\nu(\tau)\}$ мы определили два семейства несвязных множеств ([7], (3)):

$$(10)\qquad \begin{aligned} G_1(x) = G_1(x, T, H_1) &= \bigcup_{T \leqq t_{2\nu} \leqq T + H_1} \{t\colon t_{2\nu}(-x) < t < t_{2\nu}(x)\}, \\ &\qquad 0 < x \leqq \pi/2, \\ G_2(y) = G_2(y, T, H_1) &= \bigcup_{T \leqq t_{2\nu+1} \leqq T + H_1} \{t\colon t_{2\nu+1}(-y) < t < t_{2\nu+1}(y)\}, \\ &\qquad 0 < y \leqq \pi/2, \end{aligned}$$

где

$$(11)\qquad H_1 = T^{1/6}\psi^2 \ln^5 T,$$

($0 < \psi = \psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к ∞ функция при $T \to \infty$).

Относительно семейств несвязных множеств $G_1(x)$, $G_2(y)$ мы получили интегральные теоремы о среднем, линейные относительно $Z(t)$, ([7], (5)):

$$(12)\qquad \begin{aligned} \int_{G_1(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{2}{\pi} H_1 \sin x + O(T^{1/6}\psi \ln^4 T), \\ \int_{G_2(y)} Z(t)\,\mathrm{d}t &= -\frac{2}{\pi} H_1 \sin y + O(T^{1/6}\psi \ln^4 T). \end{aligned}$$

Напомним, что Г. Х. Харди и Д. Е. Литтлвуд, (см. [1], стр. 122, 151—156), получили формулу

$$\int_0^T Z^2(t)\,\mathrm{d}t \sim T\ln T, \qquad T\to\infty \tag{13}$$

и, А. Е. Ингам, (см. [2], стр. 277), получил формулу

$$\int_0^T Z^4(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{2\pi^2}\,T\ln^4 T, \qquad T\to\infty. \tag{14}$$

В связи с формулами (13), (14) делаем следующее

Замечание 1. Формулы (12) представляют собой первые теоремы о среднем для нечетной степени функции $Z(t)$.

2.2. Пусть

$$\tilde{G}_1(x) = G_1(x)\cap\langle T,\, T+H_1\rangle, \quad \tilde{G}_2(y)\cap\langle T,\, T+H_1\rangle.$$

Ясно, что из (12), в силу [7], (16), следуют асимптотические формулы

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{G}_1(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\,H_1\sin x + O(T^{1/6}\psi\ln^4 T),\\ &\int_{\tilde{G}_2(y)} Z(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{\pi}\,H_1\sin y + O(T^{1/6}\psi\ln^4 T). \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть

$$\begin{cases} M_1^{(+)} = \{t\colon t\in\langle T,\, T+H_1\rangle,\, Z(t)>0\},\\ M_1^{(-)} = \{t\colon t\in\langle T,\, T+H_1\rangle,\, Z(t)<0\},\\ M_1^{(0)} = \{t\colon t\in\langle T,\, T+H_1\rangle,\, Z(t)=0\}. \end{cases} \tag{16}$$

Очевидно, $m(M_1^{(0)}) = 0$. Пусть далее,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1^{(+)}(x) &= \{t\colon t\in\tilde{G}_1(x),\, Z(t)>0\},\\ \tilde{G}_1^{(-)}(x) &= \{t\colon t\in\tilde{G}_1(x),\, Z(t)<0\},\\ \tilde{G}_1^{(0)}(x) &= \{t\colon t\in\tilde{G}_1(x),\, Z(t)=0\},\\ \tilde{G}_2^{(+)}(y) &= \{t\colon t\in\tilde{G}_2(y),\, Z(t)>0\},\\ \tilde{G}_2^{(-)}(y) &= \{t\colon t\in\tilde{G}_2(y),\, Z(t)<0\},\\ \tilde{G}_2^{(0)}(y) &= \{t\colon t\in\tilde{G}_2(y),\, Z(t)=0\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Так как $G_1(x)\cap G_2(y) = \emptyset$, (см. (10)), то перечисленные множества попарно непересекаются. Очевидно,

$$m\{\tilde{G}_1^{(0)}(x)\} = m\{\tilde{G}_2^{(0)}(y)\} = 0.$$

Теперь (см. (17))

$$\int_{\tilde{G}_1(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\tilde{G}_1^{(+)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\tilde{G}_1^{(-)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t \leqq \tag{18}$$

$$\leqq \int_{\tilde{G}_1^{(+)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t < \mu\cdot m\{\tilde{G}_1^{(+)}(x)\},$$

где

(19)
$$\mu = \mu(T, H_1) = \max_{t\in\langle T,\, T+H_1\rangle} |Z(t)|.$$

Следовательно, (см. (15) первое соотношение, (18)),

$$\mu\cdot m\{\tilde{G}_1^{(+)}(x)\} > A(x)H_1, \qquad x\in(0, \pi/2\rangle,$$

т. е. имеет место

Теорема 2.

(20)
$$m\{\tilde{G}_1^{(+)}(x)\} > A(x)\,\frac{H_1}{\mu}, \qquad x\in(0, \pi/2\rangle,$$
$$m\{\tilde{G}_2^{(-)}(y)\} > A(y)\,\frac{H_1}{\mu}, \qquad y\in(0, \pi/2\rangle.$$

Заметим, что вторая оценка в (20) получается аналогичным образом из второй асимптотической формулы в (15).

Так как, (см. (16), (17)),

$$\tilde{G}_1^{(+)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \subset M_1^{(+)}, \quad \tilde{G}_2^{(-)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \subset M_1^{(-)},$$

то из (20) получаем

Следствие 2.

(21)
$$m(M_1^{(+)}),\ m(M_1^{(-)}) > A\,\frac{H_1}{\mu}.$$

Так как (см. (19)):

независимо от какой бы то ни было гипотезы имеет место, например, оценка Г. А. Колесника, (см. [6]),

$$\mu(T) < A(\varepsilon)T^{173/1067+\varepsilon},$$

в случае справедливости гипотезы Линделёфа, (см. [5], стр. 97, 323),

$$\mu(T) < A(\varepsilon)T^{\varepsilon},$$

в случае справедливости гипотезы Римана (см. оценку Д. Е. Литтлвуда (7))

(22)
$$\mu(T) < T^{\frac{A}{\ln\ln T}},$$

то из (21), (см. (11)), получается

Следствие 3. Имеют место следующие оценки:

(а) независимо от какой бы то ни было гипотезы,

$$m(M_1^{(+)}),\ m(M_1^{(-)}) > AT^{\frac{29}{6402}-\varepsilon}\psi^2 \ln^5 T, \tag{23}$$

(б) по гипотезе Линделёфа,

$$m(M_1^{(+)}),\ m(M_1^{(-)}) > A(\varepsilon)T^{\frac{1}{6}-\varepsilon}\psi^2 \ln^5 t, \tag{24}$$

(в) по гипотезе Римана,

$$m(M_1^{(+)}),\ m(M_1^{(-)}) > AT^{\frac{1}{6}-\frac{A}{\ln\ln T}}\psi^2 \ln^5 T. \tag{25}$$

Замечание 2. Так как

$$m(M_1^{(+)}) + m(M_1^{(-)}) = H_1,$$

то соотношения (23)—(25) показывают, что в предположении справедливости гипотезы Римана, имеет место наинизшая допустимая степень асимметрии в поведении мер множеств $M_1^{(+)}$, $M_1^{(-)}$.

3. Новое необходимое условие для справедливости гипотезы Римана

Прежде всего, из (4), (5), (см. (1)), следуют соотношения

$$\int_{M^{(+)}} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2k+1}}\,\mathrm{d}t - \int_{M^{(-)}} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t = H + O(1),$$

$$\int_{M^{(+)}} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t + \int_{M^{(-)}} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t = H\cos\Omega + O(1).$$

Отсюда получаем

Следствие 4. По гипотезе Римана,

$$\begin{aligned} &\int_{M^{(+)}} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1+\cos\Omega}{2}H + O(1), \\ &-\int_{M^{(-)}} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos\Omega}{2}H + O(1). \end{aligned} \tag{26}$$

Далее, (см. (8), (26)),

$$\left\{1 + O\left(\frac{1}{TH}\right)\right\} m(M^{(+)}) > \frac{1+\cos\Omega}{2}H - |O(1)|,$$

$$\left\{1 + O\left(\frac{1}{TH}\right)\right\} m(M^{(-)}) > \frac{1-\cos\Omega}{2} H - |O(1)|,$$

т. е. $(m(M^{(+)}), m(M^{(-)}) \leqq H)$ имеет место

Следствие 5. По гипотезе Римана,

$$m(M^{(+)}) > \frac{1+\cos\Omega}{2} H + O(1),$$

(27)

$$m(M^{(-)}) > \frac{1-\cos\Omega}{2} H + O(1).$$

Теперь мы положим в (27), первое соотношение, $H = H_1$ и применим очевидное равенство

$$m(M_1^{(+)}) = H_1 - m(M_1^{(-)}).$$

Тогда (см. (21), ср. (16) и (1), $H = H_1$) мы получим следующее неравенство

$$H_1 > \frac{1+\cos\bar{\Omega}}{2} H_1 + m(M_1^{(-)}) + O(1) >$$

$$> \frac{1+\cos\bar{\Omega}}{2} H_1 + A\frac{H_1}{\mu(T)} + O(1), \qquad \bar{\Omega} = \Omega(T, H_1)$$

и отсюда,

$$1 > \cos\bar{\Omega} + \frac{A}{\mu(T)} + O\left(\frac{1}{H_1}\right),$$

т. е. (см. (11, (22))

$$\cos\bar{\Omega} < 1 - AT^{-\frac{A}{\ln\ln T}}. \tag{28}$$

Аналогичным образом получаем из второго соотношения в (27) неравенство

$$\cos\bar{\Omega} > -1 + AT^{-\frac{A}{\ln\ln T}}. \tag{29}$$

Значит, в силу (28), (29), имеет место

Следствие 6. По гипотезе Римана,

$$\bar{\Omega} = \Omega(T, H_1) \in \left(AT^{-\frac{A}{\ln\ln T}}, \pi - AT^{-\frac{A}{\ln\ln T}}\right) \cup \tag{30}$$

$$\cup \left(\pi + AT^{-\frac{A}{\ln\ln T}}, 2\pi - AT^{-\frac{A}{\ln\ln T}}\right), \qquad T \to \infty.$$

Замечание 3. Условие (30) является необходимым условием для справедливости гипотезы Римана. Оно выражает ограничение на функцию $\tilde{\Omega}(T, H_1)$, которая, в свою очередь, определяет поведение мер множеств $M_1^{(+)}$, $M_1^{(-)}$ составляющих в основном (см. (16)) промежуток $\langle T, T+H_1\rangle$.

4. Доказательство леммы

4.1. На отрезке

$$s = \frac{5}{4} + \mathrm{i}t, \qquad t \in \langle T, T+H\rangle \tag{31}$$

мы полагаем (ср. [3], стр. 11)

$$\{\zeta(s)\}_0^{\frac{1}{2K+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(2K+1)}{n^s}, \qquad \alpha_1(2K+1) = 1. \tag{32}$$

Пользуясь произведением Эйлера, получаем

$$\{\zeta(s)\}_0^{\frac{1}{2K+1}} = \prod_p (1-p^{-s})^{-\frac{1}{2K+1}} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2K+1}}{m} p^{-ms},$$

(p пробегает простые числа). Так как

$$0 < (-1)^m \binom{\frac{-1}{2K+1}}{m} \leqq 1,$$

то, полагая

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_j^{m_j}$$

получаем

$$\alpha_n = (-1)^{m_1+\ldots+m_j} \binom{\frac{-1}{2K+1}}{m_1} \ldots \binom{\frac{-1}{2K+1}}{m_j}, \qquad n = 2, 3, \ldots .$$

Следовательно,

$$0 < \alpha_n(2K+1) \leqq 1, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Теперь, (см. (2)),

$$\int_{5/4+\mathrm{i}T}^{5/4+\mathrm{i}(T+H)} \{\zeta(s)\}^{\frac{1}{2K+1}} \,\mathrm{d}s = \mathrm{i}H + O\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^{5/4} \ln n}\right) = \mathrm{i}H + O(1). \tag{33}$$

4.2. Пусть $Z(T) \neq 0$. Обозначим через P_1 прямоугольник с вершинами в точках

$$\frac{1}{2} + \mathrm{i}T, \quad \frac{5}{4} + \mathrm{i}T, \quad \frac{5}{4} + \mathrm{i}(T+H), \quad \frac{1}{2} + \mathrm{i}(T+H).$$

Нули функции $\zeta(s)$, лежащие на отрезке

$$\frac{1}{2} + \mathrm{i}t, \qquad t \in \langle T, T+H \rangle, \tag{34}$$

мы обходим по дугам полуокружностей, лежащих в P_1 (центр такой полуокружности — нуль функции $\zeta(s)$, радиус — достаточно малое положительное число ε). Аналогичным образом мы обходим и точку $\frac{1}{2} + \mathrm{i}(T+H)$, до точки пересечения с отрезком

$$\frac{1}{2} + \mathrm{i}(T+H), \quad \frac{5}{4} + \mathrm{i}(T+H).$$

Пусть $C(\varepsilon)$ обозначает видоизмененный отрезок (34) и $P_2 = P_2(\varepsilon)$ — видоизмененный прямоугольник P_1.

Так как, по гипотезе Римана, $\zeta(s) \neq 0$, $s \in P_2$, то многозначная функция

$$\{\zeta(s)\}^{\frac{1}{2K+1}} \tag{35}$$

распадается в области P_2 на однозначные аналитические ветви, (нули функции $\zeta(s)$, играющие роль точек ветвления многозначной функции (35), отсутствуют в P_2). Мы фиксируем одну ветвь следующим образом:

$$\left\{\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}T\right)\right\}_1^{\frac{1}{2K+1}} = \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}T\right)\right|^{\frac{1}{2K+1}} \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\alpha_0}{2K+1}},$$

где

$$\alpha_0 = \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}T\right),$$

(т. е. мы фиксируем значение ветви в единственной точке).

Соединим точку $\frac{1}{2} + \mathrm{i}T$ с точкой $\frac{5}{4} + \mathrm{i}(T+H)$ непрерывной кривой λ, состоящей из $C(\varepsilon)$ и отрезка

$$\sigma + \mathrm{i}(T+H), \qquad \sigma \in \left\langle \frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{5}{4} \right\rangle.$$

Так как $\zeta(s) \neq 0$, $s \in \lambda$, то значение фиксированной ветви многозначной функции (35) изменяется непрерывно вдоль λ.

Следовательно, мы придем в точку $\frac{5}{4} + \mathrm{i}(T + H)$ с одним из $2K + 1$ значений функции (35) в этой точке. Значит, (см. (31), (32)),

$$\left\{\zeta\left(\frac{5}{4} + \mathrm{i}t\right)\right\}_1^{\frac{1}{2K+1}} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi L}{2K+1}} \left\{\zeta\left(\frac{5}{4} + \mathrm{i}t\right)\right\}_0^{\frac{1}{2K+1}}, \tag{36}$$

для $t \in \langle T, T + H \rangle$, где L — некоторое целое число $\in \langle 0, 2K \rangle$.

4.3. Нам еще нужны оценки интегралов по горизонтальным отрезкам. Так как (см. [5], стр. 97)

$$|\zeta(\sigma + \mathrm{i}t)| < t^{1/3}, \qquad \sigma \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\rangle,$$

то (см. (33))

$$\int_{1/2 + \mathrm{i}T}^{5/4 + \mathrm{i}T} \{\zeta(s)\}_1^{\frac{1}{2K+1}} \, \mathrm{d}s, \int_{1/2 + \varepsilon + \mathrm{i}(T + H)}^{5/4 + \mathrm{i}(T + H)} \{\zeta(s)\}_1^{\frac{1}{2K+1}} \, \mathrm{d}s = O\left(T^{\frac{1}{6K+3}}\right) = O(1). \tag{37}$$

Теперь мы применим теорему Коши в случае P_2 и фиксированной ветви многозначной функции (35). Следовательно, в силу (33), (36), (37), получаем соотношение

$$\int_{C(\varepsilon)} \{\zeta(s)\}_1^{\frac{1}{2K+1}} \, \mathrm{d}s = \mathrm{i}He^{\mathrm{i}\frac{2\pi L}{2K+1}} + O(1). \tag{38}$$

Переходя в (38) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и, далее, к модулям получаем оценку (6) в случае $Z(T) \neq 0$, а по непрерывности и в случае $Z(T) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: Contributions to the theory of the Riemann zeta--function and the theory of distribution of primes, Acta Math., 41 (1918), 119—196.

[2] Ingham, A. E.: Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 27 (1926), 273—300.

[3] Selberg, A.: On the zeros of Riemann's zeta-function, Skr. Norske vid. Akad. Oslo, 10 (1942), 1—59.

[4] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Rieman (IV), Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105.

[5] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.
[6] Колесник, Г. А.: Об оценках некоторых тригонометрических сумм, Acta Arithm., 25 (1973), 7—30.
[7] Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана-Зигеля, Acta Arithm., 42 (1982), 1—10.

Адрес автора:
Ján Moser
MFF UK, Katedra matematickej analýzy
Matematický pavilón
Mlynská dolina
Bratislava
842 15

Поступило: 20. 2. 1984

SUMMARY

THE RIEMANN HYPOTHESIS AND THE BEHAVIOUR OF CERTAIN SETS ON THE CRITICAL LINE

Ján Moser, Bratislava

Using the Riemann hypothesis the following mean value theorem is proved:

$$\int_T^{T+K} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}} \, dt = H \cos \Omega + O(1), \qquad \Omega \in \langle 0, 2\pi \rangle, \tag{1}$$

where $K = [HT \ln T]$, $\ln_r T \leqq H \leqq T$, $r = 1, 2, \ldots$, $\ln_1 T = \ln T$, $\ln_2 T = \ln\ln T, \ldots$. On the basis of (1) a new necessary condition for the validity of the Riemann hypothesis is proved: Ω does not belong into certain sufficiently small neighbourhoods of the points 0, π, 2π. Beside the mentioned results certain lower estimates for the sets $M_1^{(+)}$, $M_1^{(-)}$, where $M_1^{(+)} = \{t\colon t \in \langle T, T + H_1 \rangle$, $Z(t) > 0, \ldots$, for certain H_1 are proved.

SÚHRN

RIEMANNOVA HYPOTÉZA A SPRÁVANIE SA ISTÝCH MNOŽÍN NA KRITICKEJ PRIAMKE

Ján Moser, Bratislava

V práci je na základe Riemannovej hypotézy dokázaná nasledujúca veta o strednej hodnote:

$$\int_T^{T+H} \{Z(t)\}^{\frac{1}{2K+1}} \, dt = H \cos \Omega + O(1), \qquad \Omega \in \langle 0, 2\pi \rangle, \tag{1}$$

kde $K = [HT \ln T]$, $\ln_r T \leqq H \leqq T$, $r = 1, 2, \ldots$, $\ln_1 T = \ln T$, $\ln_2 T = \ln\ln T, \ldots$. Na základe (1) je dokázaná nová nutná podmienka pre platnosť Riemannovej hypotézy: Ω nemôže patriť do istých, dostatočne malých, okolí bodov 0, π, 2π. Okrem toho sú dokázané odhady zdola pre miery množín $M_1^{(+)}$, $M_1^{(-)}$, kde $M_1^{(+)} = \{t\colon t \in \langle T, T + H_1 \rangle, Z(t) > 0\}, \ldots$, pri istom H_1.