UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLVI—XLVII—1985

ЗАДАЧА ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА И ГИПОТЕЗА ЛИНДЕЛЁФА

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. Харди и Литтлвуд получили в работе [1] следующую оценку

$$\int_{2T}^{2T+2M} Z(t)\,\mathrm{d}t = O(T^{1/4+\delta}) = o(M),\quad M = T^{1/4+\varepsilon},\quad 0<\delta<\varepsilon\,,$$

(см. [1], стр. 178, ср. [9], (11), (14), обозначения см. там же). В связи с этой оценкой, Харди и Литтлвуд сделали следующее замечание ([1], стр. 125; $N_0(T)$ обозначает число нулей функции

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right),\quad t\in(0,\,T))\,.$$

«Мы надеялись показать, модифицируя наше доказательство, что $N_0(T) = \Omega(T^{1-\delta})$. Но наши попытки в этом направлении до сих пор были неудачными.»

Из контекста следует (см. [1], стр. 125, 177—184), что Харди и Литтлвуд стремились доказать следующую оценку:

$$\int_{T'}^{T'+\bar{M}} Z(t)\,\mathrm{d}t = o(\bar{M}),\quad \bar{M} = (T')^{\delta}\,,$$

где $0<\delta$ — сколь угодно малое число.

Эта трудная задача до сих пор не изучалась. В настоящей работе мы получим в этом направлении — в предположении справедливости гипотезы Линделёфа — следующую метрическую теорему.

Пусть

$$U = T^{5/12+\eta}\ln^3 T\,, \tag{1}$$

($0<\eta$ — сколь угодно малое число) и $R = R(T,\,\eta,\,\varepsilon)$ обозначает множество тех $T'\in\langle T,\,T+U\rangle$, для которых имеет место оценка

$$\int_{T'}^{T'+H_1} Z(t)\,\mathrm{d}t = o(H_1),\quad H_1 = 2\pi\frac{T^\varepsilon}{\ln\frac{T}{2\pi}},\quad 0<\varepsilon\leqq\eta/2\,. \tag{2}$$

Пусть $m(R)$ обозначает меру множества R. Имеет место

Теорема. По гипотезе Линделёфа,

$$m(R)\sim U,\quad T\to\infty\,,$$

т. е. мера множества тех значений $T'\in\langle T, T+U\rangle$, для которых не имеет место оценка (2), есть $o(U)$.

При доказательстве теоремы используются следующие средства:

(а) дискретный аналог одной леммы Харди—Литтлвуда ([2], Лемма 18) полученный нами в работе [10], (20),
(б) свойство «наследственности» (см. часть 3 предлагаемой работы),
(в) наше доказательство интегральных теорем о среднем, линейных относительно $Z(t)$, (см. [9]),
(г) теорема А. А. Карацубы о гипотезе Линделёфа ([3], стр. 89).

В процессе доказательства теоремы мы получили, например, результат (см. теорему 3), который выражает влияние гипотезы Линделёфа на интегральные теоремы о среднем, линейные относительно $Z(t)$, в том случае, когда соответствующие несвязные множества расположены в коротких промежутках (длиною $\sim H_1$).

В целом, предлагаемая работа посвящена анализу дальнейших возможностей кроющихся в дискретном методе Е. К. Титчмарша (см. [11] и [12], стр. 260—262).

2. Пусть

$$\vartheta_1(t) = \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi \tag{3}$$

и $\{h_\nu(\tau)\}$ обозначает бесконечное семейство последовательностей, определенных согласно условию (ср. [9])

$$\vartheta_1[h_\nu(\tau)] = \pi\nu + \tau,\quad \nu = 1, 2, \ldots,\quad \tau\in\langle -\pi, \pi\rangle\,. \tag{4}$$

Рассмотрим семейство сумм ($h_\nu(0) = h_\nu$)

$$\sum_{k=0}^{M_1} Z(h_\nu + 2k\omega),\quad h_\nu\in\langle T, T+U\rangle\,,$$

где

$$\omega = \frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}},\quad M_1 = [T^\varepsilon],\quad 0<\varepsilon\leqq\eta/2 \tag{5}$$

(относительно условия $\varepsilon \leqq \eta/2$ см. (14)) и

$$Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \tag{6}$$

$$Z(t)=2\sum_{n\leq \bar{t}}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)+O(t^{-1/4}),\quad \bar{t}=\sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \tag{7}$$

$$\vartheta=\vartheta(t)=-\frac{1}{2}t\ln\pi+\operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)=$$

$$=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi+O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{8}$$

(см. [12], стр. 94, 383; (7) есть формула Римана—Зигеля).

Аналогично случаю [4], (42), $H\to U$, получаем, что

$$\begin{gathered} h_{\nu+1}(\tau)-h_\nu(\tau)=2\omega+O\left(\frac{U}{T\ln^2 T}\right), \\ \sum_{T\leq h_\nu(\tau)\leq T+U}1=\frac{1}{2\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O(1), \end{gathered} \tag{9}$$

для $h_\nu(\tau)$, $h_{\nu+1}(\tau)\in\langle T, T+U\rangle$, притом O — оценки имеют место равномерно относительно $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$.

Пусть теперь $G_1(T, U, M_1)$ обозначает количество тех $h_\nu\in\langle T, T+U\rangle$, для которых имеет место оценка

$$\sum_{k=0}^{M_1}Z(h_\nu+2\omega k)=O(T^{3\varepsilon/4})=o(M_1). \tag{10}$$

Имеет место

Теорема 1. По гипотезе Линделёфа,

$$G_1(T, U, M_1)\sim\frac{1}{2\pi}U\ln T,\quad T\to\infty, \tag{11}$$

т. е. количество тех значений $h_\nu\in\langle T, T+U\rangle$, для которых не имеет место (10), $=o(U\ln T)$, (ср. (9)).

Значение. Содержание теоремы 1, для краткости, можно выразить так: свойство (10) имеет место для «почти всех» значений $h_\nu\in\langle T, T+U\rangle$.

3. Доказательство теоремы 1 опирается на следующие вспомогательные средства.

Пусть $\{g_\nu(\tau)\}$ обозначает бесконечное семейство последовательностей, определенных согласно условию (ср. (4) и [10], (6))

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau)] = \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\tau}{2}, \quad \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle , \tag{12}$$

$(g_\nu(0) = g_\nu)$. Пусть (ср. [10], (19))

$$J_1 = J_1(T, U, M_1) = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \left\{ \sum_{l=0}^{2M_1} Z(g_\nu + l\omega) \right\}^2 ,$$

Имеет место (ср. [10], (20))

Лемма 1.

$$J_1 = AM_1 U \ln^2 T + o(M_1 U \ln^2 T) , \tag{13}$$

$(0 < A$ — абсолютная постоянная).

Эта лемма доказывается способом [10], (41)—(101). Только в силу (1), O — оценки в соотношениях [10], (70), (71) нужно заменить $(\psi \to T^\eta)$ на

$$O(M_1 T^{1/4+2\eta} \ln^{12} T), \; O(T^{1/12+11\eta} \ln^{34} T), \; O(T^{1/6+4\eta} \ln^{12} T)$$

соответственно, и, оценки лежащие в конце главы V, нужно заменить на

$$O\left(\frac{1}{M_1}\right), \; O\left(\frac{M_1^2}{T^\eta \ln^2 T}\right), \; O\left(\frac{M_1^2 T^\eta \ln T}{T^{1/12}}\right), \; O\left(\frac{M_1}{T^{1/12}}\right), \tag{14}$$

(относительно M_1 см. (5)).

Пусть далее

$$S(a, b) = \sum_{a \leqq n \leqq b \leqq 2a} n^{it}, \quad b \leqq \sqrt{\frac{t}{2\pi}} . \tag{15}$$

Положим

$$F(\tau, T, H_2) = \sum_{T \leqq h_\nu \leqq T+H_2} Z[h_\nu(\tau)], \quad H_2 \in (0, \sqrt[4]{T}\rangle . \tag{16}$$

Имеет место

Лемма 2. Если

$$|S(a, b)| < A(\Delta)\sqrt{a} t^\Delta , \quad \Delta \in (0, 1/6\rangle , \tag{17}$$

то

$$F(\tau, T, H_2) - F(0, T, H_2) = O(T^\Delta \ln T) , \tag{18}$$

где O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Следствие 1 (свойство наследственности). Если для некоторого $\bar{\tau} \in \langle -\pi, \pi \rangle$ имеет место

$$F(\bar{\tau}, T, H_2) = O(T^\Delta \ln T) ,$$

то

$$F(\tau, T, H_2) = O(T^{\Delta} \ln T)$$

для всех $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Следствие 2. По гипотезе Линделёфа ($\Delta \to \varepsilon/2$, [3], стр. 89)

$$F(\tau, T, H_2) - F(0, T, H_2) = O(T^{3\varepsilon/4}) \tag{19}$$

($0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число) и O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

4. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 2. Так как (см. (3), (8))

$$\vartheta(t) - \vartheta_1(t) = O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{20}$$

то из (7) получаем (ср. [10], (93)), что

$$Z(t) = 2 \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta_1 - t \ln n) + O(T^{-1/4}), \quad P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}},$$

для $t \in \langle T, T+H_2 \rangle$. Далее, из соотношения (см. (4))

$$\vartheta_1[h_\nu(\tau)] - \vartheta_1(h_\nu) = \tau,$$

способом [4], (40)—(42), получаем

$$h_\nu(\tau) - h_\nu = \frac{\tau}{\ln P_0} + O\left(\frac{H_2}{T \ln^2 T}\right),$$

для $h_\nu, h_\nu(\tau) \in \langle T, T+H_2 \rangle$. Следовательно,

$$\sin\left(\frac{\tau}{2} - \frac{h_\nu(\tau) - h_\nu}{2} \ln n\right) = \sin\left\{\frac{\tau}{\pi} X(n)\right\} + O\left(\frac{H_2}{T \ln T}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\tau}{2} - \frac{h_\nu(\tau) + h_\nu}{2} \ln n\right) = \sin\left\{\frac{\tau}{\pi} X(n) - h_\nu \ln n\right\} + O\left(\frac{H_2}{T \ln T}\right),$$

где

$$X(n) = \frac{\pi}{2} \frac{\ln \frac{P_0}{n}}{\ln P_0}, \quad 0 < X(n) \leqq \pi/2,$$

для $1 \leqq n < P_0$. Теперь (см. (4))

$$Z[h_\nu(\tau)] - Z(h_\nu) =$$

$$= 4(-1)^{\nu+1} \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left\{\frac{\tau}{\pi} X(n)\right\} \sin\left\{\frac{\tau}{\pi} X(n) - h_\nu \ln n\right\} +$$

$$+O\left(T^{1/4}\cdot\frac{H_2}{T\ln T}\right)+O(T^{-1/4})=$$

$$=4(-1)^{\nu+1}\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin^2\left\{\frac{\tau}{\pi}X(n)\right\}\cos(h_\nu\ln n)+$$

$$+2(-1)^{\nu}\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left\{\frac{2\tau}{\pi}X(n)\right\}\sin(h_\nu\ln n)+O(T^{-1/4}).$$

Отсюда (см. (16), [4], (59))

$$F(\tau,T,H_2)-F(0,T,H_2)=\sum_{T\le h_\nu\le T+H_2}\{Z[h_\nu(\tau)]-Z(h_\nu)\}=$$

$$=-4\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin^2\left\{\frac{\tau}{\pi}X(n)\right\}\sum_{T\le h_\nu\le T+H_2}(-1)^{\nu}\cos(h_\nu\ln n)+$$

$$+2\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left\{\frac{2\tau}{\pi}X(n)\right\}\sum_{T\le h_\nu\le T+H_2}(-1)^{\nu}\sin(h_\nu\ln n)+O(\ln T)=$$

$$=-4W_1+2W_2+O(\ln T).$$

В сумму W_1 входит следующий типичный член (ср. [4], (54))

$$W_{11}=\sum_{n<P_0}\sin\left\{\frac{\tau}{\pi}X(n)\right\}\frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{n}}\sin\varphi,$$

где (ср. [4], (43), (50))

$$\varphi=h_\nu\ln n,\quad \frac{\omega}{2}=\frac{\pi}{2}\frac{\ln n}{\ln P_0}=\frac{\pi}{2}-X(n),\quad \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\operatorname{ctg}X(n).$$

Следовательно,

$$W_{11}=\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2\sum_{n<P_0}X\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\tau}{\pi}X\right)}{\left(\frac{\tau}{\pi}X\right)^2}\cdot\frac{X}{\sin X}\cdot\cos X\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\varphi.$$

Так как в случае (17)

$$\sum_{1\le n<P_1\le P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\varphi=O(T^{\Delta}\ln T)$$

то, применяя к сумме W_{11} несколько раз преобразование Абеля, получаем оценку

$$W_{11}=O(T^{\Delta}\ln T)$$

и, следовательно,

$$W_1 = O(T^{\Delta} \ln T).$$

Аналогичную оценку получаем для W_2, так как

$$\sin(h_\nu \ln n) = \cos\left(h_\nu \ln n - \frac{\pi}{2}\right).$$

5. В этой части мы приведем

Доказательство теоремы 1.

(a) Пусть Q_1 обозначает количество $g_\nu \in \langle T, T+U \rangle$. Так как ([10], (21))

$$Q_1 = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} 1 = \frac{1}{\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O(1), \tag{21}$$

то (см. (13))

$$\frac{J_1}{Q_1} \sim AM_1 \ln T, \quad T \to \infty. \tag{22}$$

Пусть Q_2 обозначает количество тех $g_\nu \in \langle T, T+U \rangle$, для которых

$$\left| \sum_{l=0}^{2M_1} Z(g_\nu + l\omega) \right| \leqq (T^{\varepsilon/4} M_1 \ln T)^{1/2} = O(T^{3\varepsilon/4}) \tag{23}$$

и Q_3 количество остальных — т. е. таких значений g_ν, для которых

$$\left| \sum_{l=0}^{2M_1} Z(g_\nu + l\omega) \right| > (T^{\varepsilon/4} M_1 \ln T)^{1/2}.$$

Теперь из (22) следует, что

$$2AM_1 \ln T > \frac{1}{Q_1} \sum_2 + \frac{1}{Q_1} \sum_3 > \frac{Q_3}{Q_1} T^{\varepsilon/4} M_1 \ln T$$

(где $\sum_2$, $\sum_3$ обозначают суммирование по количеству значений Q_2, Q_3 соответственно) и отсюда (см. (21))

$$Q_3 < 2A \frac{Q_1}{T^{\varepsilon/4}} < A \frac{U \ln T}{T^{\varepsilon/4}}.$$

Так как $Q_1 = Q_2 + Q_3$, то

$$Q_2 \sim \frac{1}{\pi} U \ln T. \tag{24}$$

Пусть далее Q_{21} обозначает количество тех значений $g_{2\nu} \in \langle T, T+U \rangle$ для которых

$$\left| \sum_{l=0}^{2M_1} Z(g_{2\nu} + l\omega) \right| \leqq (T^{\varepsilon/4} M_1 \ln T)^{1/2} \tag{25}$$

и Q_{22} количество $g_{2\nu+1} \in \langle T, T+U \rangle$, для которых имеет место оценка типа (25). Так как (см. (4), (12))

$$g_{2\nu} = h_\nu, \quad g_{2\nu+1} = h_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{26}$$

то (см. (9), (24))

$$Q_{21} \sim \frac{1}{2\pi} U \ln T, \quad Q_{22} \sim \frac{1}{2\pi} U \ln T. \tag{27}$$

(б) Теперь мы преобразуем сумму входящую в (23). Прежде всего (ср. [10], (41))

$$g_{\nu+l} = g_\nu + l\omega + O\left(\frac{lU}{T \ln^2 T}\right) = g_\nu + l\omega + O\left(\frac{M_1 U}{T \ln^2 T}\right). \tag{28}$$

Далее (ср. [4], (22), [7], (10), (43), $\Delta = \varepsilon/2$ и [3], стр. 89), по гипотезе Линделёфа,

$$\begin{aligned} Z(t) &= O(T^{\varepsilon/2} \ln T) = O(T^{3\varepsilon/4}), \\ Z'(t) &= O(T^{\varepsilon/2} \ln^2 T) = O(T^{3\varepsilon/4}), \end{aligned} \tag{29}$$

для $t \in \langle T, T+U \rangle$. Следовательно (см. (1), (26)),

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{2M_1} Z(g_\nu + l\omega) &= \sum_{l=0}^{2M_1} Z\left\{ g_{\nu+l} + O\left(\frac{M_1 U}{T \ln^2 T}\right)\right\} = \\ &= \sum_{l=0}^{2M_1} Z(g_{\nu+l}) + O\left(M_1 \cdot \frac{M_1 U}{T \ln^2 T} \cdot T^{3\varepsilon/4}\right) = \sum_{g_\nu \leqq g_m \leqq g_{\nu+2M_1}} Z(g_m) + O(T^{-1/2}) = \\ &= \sum_{g_\nu \leqq g_{2n} \leqq g_{\nu+2M_1}} Z(g_{2n}) + \sum_{g_\nu \leqq g_{2n+1} \leqq g_{\nu+2M_1}} Z(g_{2n+1}) + O(T^{-1/2}) = \\ &= \sum_{g_\nu \leqq h_n \leqq g_{\nu+2M_1}} Z(h_n) + \sum_{g_\nu \leqq h_n(\pi/2) \leqq g_{\nu+2M_1}} Z[h_n(\pi/2)] + O(T^{-1/2}). \end{aligned} \tag{30}$$

Отсюда, для значения g_ν удовлетворяющего соотношению (23), получаем

$$\sum_{g_\nu \leqq h_n \leqq g_{\nu+2M_1}} Z(h_n) + \sum_{g_\nu \leqq h_n(\pi/2) \leqq g_{\nu+2M_1}} Z[h_n(\pi/2)] = O(T^{3\varepsilon/4}) \tag{31}$$

— это и есть первое основное соотношение.

(в) В случае справедливости гипотезы Линделёфа имеет место (см. (18), $H_2 \to g_{\nu+2M_1} - g_\nu$, $\Delta \to \varepsilon/2$)

$$\sum_{g_\nu \leqq h_n(\pi/2) \leqq g_{\nu+2M_1}} Z[h_n(\pi/2)] - \sum_{g_\nu \leqq h_n \leqq g_{\nu+2M_1}} Z(h_n) = O\{(g_\nu)^{3\varepsilon/4}\} = O(T^{3\varepsilon/4}) \quad (32)$$

— это и есть второе основное соотношение. Притом учтено (29) и соотношение (см. (9))

$$\sum_{g_\nu \leqq h_n \leqq g_{\nu+2M_1}} 1 = \sum_{g_\nu \leqq h_n(\pi/2) \leqq g_{\nu+2M_1}} 1 + O(1) .$$

Теперь (см. (31), (32)) получаем оценку

$$\sum_{g_\nu \leqq h_n \leqq g_{\nu+2M_1}} Z(h_n) = O(T^{3\varepsilon/4}) , \quad (33)$$

для значения g_ν удовлетворяющего соотношению (23).

(г) Наконец мы преобразуем соотношение (33). Положим

$$\bar{n} = \bar{n}(\nu) = \min\{n\colon h_n \in \langle g_\nu, g_{\nu+2M_1}\rangle\} ,$$
$$\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{n}}(\nu) = \max\{n\colon h_n \in \langle g_\nu, g_{\nu+2M_1}\rangle\} .$$

Очевидно $\bar{\bar{n}} - \bar{n} = M_1 + O(1)$, (ср. (26), (30), (33)). Имеет место (ср. (9), $\tau = 0$)

$$h_{\bar{n}+k} = h_{\bar{n}} + 2\omega k + O\left(\frac{kU}{T\ln^2 T}\right) = h_{\bar{n}} + 2\omega k + O\left(\frac{M_1 U}{T \ln^2 T}\right), \quad k = 0, 1, \dots, M_1 .$$

Теперь (см. (29), (30))

$$\sum_{g_\nu \leqq h_n \leqq g_{\nu+2M_1}} Z(h_n) = \sum_{k=0}^{M_1} Z(h_{\bar{n}} + 2\omega k) + O(T^{3\varepsilon/4}) + O(T^{-1/2}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{M_1} Z(h_{\bar{n}} + 2\omega k) + O(T^{3\varepsilon/4}) .$$

Следовательно (см. (33))

$$\sum_{k=0}^{M_1} Z(h_{\bar{n}} + 2\omega k) = O(T^{3\varepsilon/4}) ,$$

для значения $h_{\bar{n}} = g_{2\bar{n}}$ (см. (26)), удовлетворяющего оценке (23). Отсюда (см. (25), (27)) следует утверждение теоремы 1.

6. В этой части мы получим одно асимптотическое соотношение. Напомним, что в работах [5], (21)—(52), [6], (31)—(51), (ср. [8]) мы показали, что имеет место теорема: из (17) следует

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H_2} (-1)^\nu Z(t_\nu) = \frac{1}{\pi} H_2 \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^\Delta \ln T) . \quad (34)$$

где $H_2 \in (0, \sqrt[4]{T}\rangle$ и $\{t_\nu\}$ обозначает последовательность, определенную соотношением $\vartheta(t_\nu) = \pi\nu$.

В силу (20) ясно, что относительно последовательности $\{h_\nu\}$ (см. (4)) имеет место теорема: из (17) следует

$$\sum_{T \leq h_\nu \leq T+H_2} (-1)^\nu Z(h_\nu) = \frac{1}{\pi} H_2 \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^\Delta \ln T) . \tag{35}$$

Далее (см. (9), $\tau = 0$, $T \to g_\nu$, $H_2 \to g_{\nu+2M_1} - g_\nu = H_3$, $\langle g_\nu, g_{\nu+2M_1}\rangle \subset \langle T, T+U\rangle$)

$$\sum_{g_\nu \leqq h_n \leqq g_{\nu+2M_1}} 1 = \frac{1}{2\pi} H_3 \ln \frac{g_\nu}{2\pi} + O(1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} H_3 \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{H_3 U}{T}\right) + O(1) = \frac{1}{2\pi} H_3 \ln \frac{T}{2\pi} + O(1) . \tag{36}$$

С другой стороны (ср. (30))

$$\sum_{g_\nu \leqq h_n \leqq g_{\nu+2M_1}} 1 = M_1 + O(1) .$$

Следовательно, (см. (5)),

$$H_3 = 2\pi \frac{T^\varepsilon}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{1}{\ln T}\right) . \tag{37}$$

Полагая теперь в (35) $\Delta = \varepsilon/2$, $T = g_\nu$, $H_2 = H_3$ получаем, что имеет место

Лемма 3. По гипотезе Линделёфа,

$$\sum_{g_\nu \leqq h_n \leqq g_{\nu+2M_1}} (-1)^n Z(h_n) = \frac{1}{\pi} H_3 \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{3\varepsilon/4}) , \tag{38}$$

для всех $\langle g_\nu, g_{\nu+2M_1}\rangle \subset \langle T, T+U\rangle$.

7. Теперь мы посмотрим, как ведут себя соотношения (33), (38) относительно трансляций $h_n \to h_n(\tau)$.

Прежде всего, в силу свойства «наследственности» (следствие 1) из (33) получается

Лемма 4. По гипотезе Линделёфа, оценка

$$\sum_{g_\nu \leqq h_n \leqq g_{\nu+2M_1}} Z[h_n(\tau)] = O(T^{3\varepsilon/4}) \tag{39}$$

имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$ для «почти всех» $g_\nu \in \langle T, T+U\rangle$.

Далее, способом [9], (48) получается

Лемма 5. По гипотезе Линделёфа, соотношение

$$\sum_{g_\nu \leqq h_n \leqq g_{\nu+2M_1}} (-1)^n Z[h_n(\tau)] = \frac{1}{\pi} H_3 \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \cos\tau + O(T^{3\varepsilon/4}) \tag{40}$$

имеет место для всех $\langle g_\nu, g_{\nu+2M_1}\rangle \subset \langle T, T+U\rangle$.

Теперь из (39), (40) следует

Теорема 2. По гипотезе Линделёфа, соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{g_\nu \leqq h_{2n} \leqq g_{\nu+2M_1}} Z[h_{2n}(\tau)] &= \frac{1}{2\pi} H_3 \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \cos\tau + O(T^{3\varepsilon/4}), \\ \sum_{g_\nu \leqq h_{2n+1} \leqq g_{\nu+2M_1}} Z[h_{2n+1}(\tau)] &= -\frac{1}{2\pi} H_3 \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \cos\tau + O(T^{3\varepsilon/4}) \end{aligned} \tag{41}$$

имеют место для «почти всех» $g_\nu \in \langle T, T+U\rangle$, притом O — оценки имеют место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

8. Пусть теперь (ср. [9], (3))

$$\begin{aligned} G_2 = G_2(x, T, H_3, g_\nu) &= \bigcup_{g_\nu \leqq h_{2n} \leqq g_{\nu+2M_1}} \{t\colon h_{2n}(-x) < t < h_{2n}(x)\}, \quad 0 < x \leqq \pi/2, \\ G_3 = G_3(y, T, H_3, g_\nu) &= \bigcup_{g_\nu \leqq h_{2n+1} \leqq g_{\nu+2M_1}} \{t\colon h_{2n+1}(-y) < t < h_{2n+1}(y)\}, \quad 0 < y \leqq \pi/2, \end{aligned} \tag{42}$$

где

$$\langle g_\nu, g_{\nu+2M_1}\rangle \subset \langle T, T+U\rangle,\ H_3 = g_{\nu+2M_1} - g_\nu \sim 2\pi \frac{T^\varepsilon}{\ln \frac{T}{2\pi}}, \tag{43}$$

(см. (37)). Заметим, что для количества значений g_ν, не удовлетворяющих первому условию в (43), имеем оценку $O(T^\varepsilon) = o(U \ln T)$ (см. (36), (37)), так что на это количество значений не нужно обращать внимание.

Тепер ясно, что из (41), повторением рассуждений из нашей работы [9], (50)—(53), получается

Теорема 3. По гипотезе Линделёфа, интегральные теоремы о среднем

$$\begin{aligned} \int_{G_2} Z(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{2}{\pi} H_3 \sin x + O(T^{3\varepsilon/4}), \\ \int_{G_3} Z(t)\,\mathrm{d}t &= -\frac{2}{\pi} H_3 \sin y + O(T^{3\varepsilon/4}) \end{aligned} \tag{44}$$

имеют место для «почти всех» $g_\nu \in \langle T, T+U\rangle$.

Из теоремы 3, действуя способом [9], (7)—(18), получаем

Следствие 3. По гипотезе Линделёфа, соотношения

$$\frac{1}{m(G_2)}\int_{G_2} Z(t)\,\mathrm{d}t \sim 2\,\frac{\sin x}{x}\,,$$
$$\frac{1}{m(G_3)}\int_{G_3} Z(t)\,\mathrm{d}t \sim -2\,\frac{\sin y}{y}\,, \tag{45}$$

$$\int_{G_2\cup G_3} Z(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(\sin x - \sin y)H_3 + O(T^{3\varepsilon/4}), & x \neq y\,, \\ O(T^{3\varepsilon/4}), & x = y\,, \end{cases} \tag{46}$$

$$\int_{g_\nu}^{g_\nu+H_3} Z(t)\,\mathrm{d}t = O(T^{3\varepsilon/4}) = o(H_3)\,, \tag{47}$$

имеют место для «почти всех» $g_\nu \in \langle T, T+U\rangle$, ($m(G_2)$, $m(G_3)$ обозначают меры множеств G_2, G_3 соответственно).

Еще заметим, что второе соотношение в (46) выражает своего рода «интегральное равновесье» функции $Z(t)$ относительно множеств G_2, G_3, $(x=y)$, которое нарушается, коль скоро $x\neq y$ (см. первое соотношение в (46)).

9. В этой части мы завершим

Доказательство теоремы.

(а) Так как

$$\int_{g_\nu}^{g_\nu+H_3} Z(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{g_\nu}^{g_\nu+H_1} + \int_{g_\nu+H_1}^{g_\nu+H_3}\right) Z(t)\,\mathrm{d}t$$

и (см. (2), (29), (37))

$$\int_{g_\nu+H_1}^{g_\nu+H_3} Z(t)\,\mathrm{d}t = O(|H_3 - H_1|\cdot|Z(T)|) = O(T^{3\varepsilon/4})\,,$$

то (см. (47))

$$\int_{g_\nu}^{g_\nu+H_1} Z(t)\,\mathrm{d}t = O(T^{3\varepsilon/4}) = o(H_1)\,. \tag{48}$$

(б) Пусть $\bar{g}_\nu$ обозначает такое g_ν, для которого имеет место (48). Способом аналогичным (а) мы получаем (см. также (28), $l=1$), что

$$\int_{T'}^{T'+H_1} Z(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{T'}^{\bar{g}_\nu} + \int_{\bar{g}_\nu}^{\bar{g}_\nu+H_1} - \int_{T'+H_1}^{\bar{g}_\nu+H_1}\right) Z(t)\,\mathrm{d}t = O(T^{3\varepsilon/4}) = o(H_1)\,,$$

для всех $T' \in \langle \bar{g}_\nu, \bar{g}_{\nu+1}\rangle$.

Так как (см. (21), (24), (28), $l=1$)

$$\sum_{T \leqq \bar{g}_\nu \leqq T+U} 1 \sim \frac{1}{\pi} U \ln \frac{T}{2\pi}, \quad \bar{g}_{\nu+1} - \bar{g}_\nu \sim \frac{\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}},$$

то

$$U \geqq m(R) \geqq \sum_{T \leqq \bar{g}_\nu \leqq T+U} (\bar{g}_{\nu+1} - \bar{g}_\nu) = U + o(U),$$

т. е. $m(R) \sim U$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of distribution of Primes, Acta Math., 41 (1918), 118—196.

[2] —, The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line, Math. Zs., 10 (1921), 283—317.

[3] Карацуба, А. А.: Основы аналитической теории чисел, Москва, 1975.

[4] Мозер, Ян: Об одной сумме в теории дзета-функции Римина, Acta Arith., 31 (1976), 31—43.

[5] —, Об одной теореме Харди—Литтлвуда в теории здета-функции Римина, Acta Arith., 31 (1976), 45—51.

[6] —, Добавление к работе: «Об одной теореме Харди—Литтлвуда в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 45—51,‘ Acta Arith., 35 (1979), 403—404.

[7] —, О корнях уравнения $Z'(t) = 0$, Acta Arith., 40 (1981), 79—89.

[8] —, Исправление к работам: „Acta Arith., 31 (1976), 31—43; 31 (1976), 45—51; 35 (1979), 403—404," Acta Arith., 40 (1981), 97—107.

[9] —, Новые следствия из формулы Римана—Зигеля, Acta Arith., 42 (1982), 1—10.

[10] —, Улучшение теоремы Харди—Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta(1/2 + it)$, Acta Arith., Vol. 43, 3 (1983), 21—47.

[11] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, IV, Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105.

[12] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

Адрес автора:
Ján Moser
MFF UK, Katedra matematickej analýzy
Matematický pavilón
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 3. 3. 1983

SÚHRN

HARDYHO—LITTLEWOODOV PROBLÉM A LINDELÖFOVA HYPOTÉZA

Ján Moser, Bratislava

Ako vyplýva z Hardyho—Littlewoodovej práce z r. 1918 (pozri str. 125, 177—184), menovaní učenci sa snažili dokázať odhad

$$\int_T^{T+M} Z(t)\,\mathrm{d}t = o(M), \quad M = T^\delta ,$$

($0 < \delta$ — ľubovoľne malé číslo), z ktorého vyplýva, že úsečka $\frac{1}{2} + iT, \frac{1}{2} + i(T+M)$ obsahuje nulový bod nepárneho rádu funkcie $\zeta(s)$. V tomto smere je v práci dokázaná, za predpokladu platnosti Lindelöfovej hypotézy, nasledovná metrická veta. Nech $U = T^{5/12+\eta} \ln^3 T$, ($0 < \eta$ — ľubovoľne malé číslo) a $T = R(T, \eta, \varepsilon)$ označuje množinu tých $T' \in \langle T, T+U \rangle$, pre ktoré platí odhad

$$\int_{T'}^{T'+H_1} Z(t)\,\mathrm{d}t = o(H_1), \quad H_1 = 2\pi \frac{T^\varepsilon}{\ln \frac{T}{2\pi}}, \quad 0 < \varepsilon \leqq \eta/2 . \tag{1}$$

Potom $m(R) \sim U$, $T \to \infty$, t. j. miera množiny tých hodnôt $T' \in \langle T, T+U \rangle$, pre ktoré neplatí odhad (1) je $= o(U)$, ($m(R)$ je miera množiny R).

SUMMARY

HARDY—LITTLEWOOD'S PROBLEM AND LINDELÖF HYPOTHESIS

Ján Moser, Bratislava

As it follows from the Hardy—Littlewood's paper in 1918 (see pp. 125, 177—184) the mentioned scientis tried to prove the estimate

$$\int_T^{T+M} Z(t)\,\mathrm{d}t = o(M), \quad M = T^\delta ,$$

($0 < \delta$ — arbitrary small number) from which it follows that the segment $\frac{1}{2} + iT, \frac{1}{2} + i(T+M)$ contains a zero point of odd order of the function $\zeta(s)$. In this direction the following metric theorem under the Lindelöf's hypothesis is proved in the paper. Let $U = T^{5/12+\eta} \ln^3 T$, ($0 < \eta$ — arbitrary small number) and $R = R(T, \eta, \varepsilon)$ denote the set of those $T' \in \langle T, T+U \rangle$ for which the following estimate is true

$$\int_{T'}^{T'+H_1} Z(t)\,\mathrm{d}t = o(H_1), \quad H_1 = 2\pi \frac{T^\varepsilon}{\ln \frac{T}{2\pi}}, \quad 0 < \varepsilon \leqq n/2 . \tag{1}$$

Then $m(R) \sim U$, $T \to \infty$, i.e. the measure of the set of those values $T' \in < T, T+U >$ for which (1) fails is $o(U)$, ($m(R)$ is the measure of the set R).