UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLVI—XLVII—1985

О ПОВЕДЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $Z(t)$ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

В работе [2] (обозначения см. там же) мы получили интегральные теоремы о среднем, линейные относительно $Z(t)$, для систем несвязных множеств $G_1(x)$, $G_2(y)$:

$$\begin{aligned} &\int_{G_1(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}H\sin x+O(T^{1/6}\psi\ln^4 T)\,, \\ &\int_{G_2(y)} Z(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{\pi}H\sin y+O(T^{1/6}\psi\ln^4 T)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x\in(0,\pi/2\rangle$, $y\in(0,\pi/2\rangle$, $H=T^{1/6}\psi^2\ln^5 T$ и $G_1(x)$, $G_2(y)$ определены с помощью семейства последовательностей $\{t_\nu(\tau)\}$, (см. [2], (1)—(5)).

Формулы (1) мы получили в связи с изучением структуры оценки типа Харди—Литтлвуда

$$\int_T^{T+\Omega} Z(t)\,\mathrm{d}t=o(\Omega)\,,$$

т. е. в связи с изучением поведения функции $Z(t)$ относительно некоторых подмножеств отрезка $\langle T,T+H\rangle$.

В предлагаемой работе мы делаем следующий шаг. Именно, мы применяем асимптотические формулы (1) к изучению вопроса о поведении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$, $t\in G_1(x)\cup G_2(x)$, т. е. к вопросу о поведении функции $Z(t)$ уже относительно некоторых подмножеств множества $G_1(x)\cup G_2(x)$. В результате мы получаем асимптотическое соотношение (см. теорему 1), которое выражает новую закономерность в тонком вопросе о поведении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$.

Поясним в чем дело. Как известно, вычисления значений функции $Z(t)$, связанные с регистрацией нулей функции $\zeta(1/2+it)$, показывают, что поведение положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ (а следовательно и поведение нулей нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$) очень «хаотично» в промежутке покрываемом вычислениями. По этому поводу см. например график функции $Z(t)$ в окрестности первой пары нулей Д. Лемера (специальной пары нулей функции $Z(t)$, лежащей в окрестности значения $t=2\pi\cdot 1114{,}89$, обнаруженной Д. Лемером; [1], стр. 296, 297). Тем более «хаотичное» поведение графика функции $Z(t)$ следует ожидать в случае $t\to\infty$.

Мы, однако, обнаружили одну из закономерностей, управляющих этой «хаотичностью». Вот частный случай этой закономерности: площади (меры) фигур, соответствующих положительным и отрицательным участкам графика функции $Z(t)$, $t\in\langle T,\ T+H\rangle$, асимптотически равны.

Приступаем к точным формулировкам и доказательствам.

1. Пусть

$$\begin{aligned} G_1^{(+)}(x)&=\{t\colon t\in G_1(x),\ Z(t)>0\}\,, \\ G_1^{(-)}(x)&=\{t\colon t\in G_1(x),\ Z(t)<0\}\,, \\ G_2^{(-)}(x)&=\{t\colon t\in G_2(x),\ Z(t)<0\}\,, \\ G_2^{(+)}(x)&=\{t\colon t\in G_2(x),\ Z(t)>0\} \end{aligned} \tag{2}$$

и далее,

$$\begin{aligned} G_3(x)&=\{t\colon t\in G_1(x),\ Z(t)=0\}\,, \\ G_4(x)&=\{t\colon t\in G_2(x),\ Z(t)=0\}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что перечисленные множества взаимно не пересекаются, так как $G_1(x)\cap G_2(x)=\emptyset$ (см. [2], (3)).

Имеет место

Теорема 1.

$$\int_{G_1^{(+)}(x)\cup G_2^{(+)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t\sim-\int_{G_1^{(-)}(x)\cup G_2^{(-)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t,\quad T\to\infty\,, \tag{4}$$

для всех $x\in(0,\ \pi/2\rangle$.

Пусть $D^{(+)}(x)$ обозначает фигуру, соответствующую (обычным образом) графику функции $Z(t)$, $t\in G_1^{(+)}(x)\cup G_2^{(+)}(x)$ и $D^{(-)}(x)$ – фигуру, соотвествующую графику функции $-Z(t)$, $t\in G_1^{(-)}(x)\cup G_2^{(-)}(x)$. Пусть $m(D^{(+)}(x))$, $m(D^{(-)}(x))$ обозначают меры (площади) этих фигур.

Замечание 1. Теорема 1 выражает следующую геометрическую закономерность в вопросе о поведении функции $|Z(t)|=|\zeta(1/2+it)|$ на промежутке $\langle T,\ T+H\rangle$:

$$m(D^{(+)}(x))\sim m(D^{(-)}(x)),\quad T\to\infty\,. \tag{5}$$

Основанием для доказательства теоремы 1 является следующая

Лемма.

$$\int_{G_1^{(+)}(x)\cup G_2^{(+)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t > A(x)H\,,$$
$$\int_{G_1^{(-)}(x)\cup G_2^{(-)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t < -A(x)H\,, \tag{6}$$

для всех $x\in(0,\pi/2\rangle$, $(0<A(x)$ — постоянная, зависящая от выбора x).

Замечание 2. Оценки (6) имеют следующее геометрическое содержание:

$$m(D^{(+)}(x)),\ m(D^{(-)}(x)) > A(x)H\,, \tag{7}$$

(грубо говоря, с помощью оценок (7) мы получим асимптотическое соотношение (5)).

Доказательство леммы. Из первой асимптотической формулы в (1) следует оценка

$$\int_{G_1(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t > \left(\frac{2}{\pi}\sin x-\varepsilon\right)H\,, \tag{8}$$

где $0<\varepsilon<\dfrac{1}{\pi}\sin x$. Далее (см. (2), (3))

$$G_1(x)=G_1^{(+)}(x)\cup G_1^{(-)}(x)\cup G_3(x)\,. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\int_{G_1(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t=\int_{G_1^{(+)}(x)\cup G_1^{(-)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t=\int_{G_1^{(+)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t+\int_{G_1^{(-)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t\leqq$$
$$\leqq\int_{G_1^{(+)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t\leqq\int_{G_1^{(+)}(x)\cup G_2^{(+)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{10}$$

так как $m(G_3)=0$, (напомним, что функция $Z(t)$ имеет лишь конечное число нулей в $G_1(x)$). Теперь из (10) в силу (8) получаем первую оценку в (6).

Так как из второй асимптотической формулы в (1) следует оценка

$$\int_{G_2(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t < -\left(\frac{2}{\pi}\sin x-\varepsilon\right)H$$

и в силу аналога соотношения (9) для $G_2(x)$,

$$\int_{G_2(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t=\int_{G_2^{(+)}(x)}+\int_{G_2^{(-)}(x)}\geqq\int_{G_2^{(-)}(x)}\geqq\int_{G_2^{(-)}(x)\cup G_1^{(-)}(x)}\,,$$

то отсюда следует вторая оценка в (6).

Доказательство теоремы 1. Сложением соотношений (1), $x=y$, получаем оценку

$$\int_{G_1(x)\cup G_2(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t=O(T^{1/6}\psi\ln^4 T)=o(H)\,, \tag{11}$$

(см. [2], (10)). Далее (см. (9) и аналогичное соотношение для $G_2(x)$)

$$\int_{G_1(x)\cup G_2(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t=\int_{G_1^{(+)}(x)\cup G_2^{(+)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t+\int_{G_1^{(-)}(x)\cup G_2^{(-)}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t=\alpha+\beta\,,$$

($\alpha=\alpha(T,H)$, $\beta=\beta(T,H)$), т. е. (см. (11))

$$\alpha=-\beta+o(H)\,. \tag{12}$$

Отсюда получаем ($-\beta>0$, в силу второй оценки в (6)), что

$$\frac{\alpha}{-\beta}=1+\frac{o(H)}{-\beta}$$

и ($-\beta>A(x)H$, в силу второй оценки в (6)),

$$\frac{|o(H)|}{-\beta}<\frac{|o(H)|}{H}\cdot\frac{1}{A(x)}=o(1)\,.$$

Следовательно,

$$\frac{\alpha}{-\beta}=1+o(1)\,, \tag{13}$$

т. е. имеет место (4).

2. Из (1), в случае $x=y=\pi/2$, получаем следующие формулы

$$\int_{\bar{G}_1} Z(t)\,\mathrm{d}t\sim\frac{2}{\pi}H,\quad \int_{\bar{G}_2} Z(t)\,\mathrm{d}t\sim-\frac{2}{\pi}H,\quad T\to\infty\,, \tag{14}$$

где $\bar{G}_1=G_1(\pi/2)$, $\bar{G}_2=G_2(\pi/2)$.

В связи с поведением величины

$$\int_{G_1\cup G_2} |Z(t)|\,\mathrm{d}t$$

я высказал гипотезу (см. [2], (19)), согласно которой, в случае $x=y=\pi/2$, имеет место соотношение

$$\int_{\bar{G}_1} Z(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\bar{G}_2} Z(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\bar{G}_1\cup\bar{G}_2} |Z(t)|\,\mathrm{d}t+o(H)\,. \tag{15}$$

Это соотношение приводит (см. (14)) к следующей формуле

$$\frac{1}{H}\int_T^{T+H}|Z(t)|\,\mathrm{d}t \sim \frac{4}{\pi}, \tag{16}$$

(см. [2], (20)).

Однако, оказывается, что формула (16) не верна и, следовательно, не имеет место и соотношение (15).

Действительно. Имеет место следующая оценка Рамачандры (см. [3])

$$\int_T^{T+U}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|\mathrm{d}t > AU(\ln T)^{1/4}, \quad T^{\varepsilon} \leqq U \leqq T,$$

где $0<A$ — постоянная, т. е. (см. [4], стр. 94)

$$\int_T^{T+U}|Z(t)|\,\mathrm{d}t > AU(\ln T)^{1/4}. \tag{17}$$

Так как $H\in\langle T^{\varepsilon}, T\rangle$, то из (17) следует, что формула (16) не имеет место.

Теперь мы получим новый резльтат в направлении оценки Рамачандры (17). А именно, мы получим оценки типа Рамачандры для некоторых подмножеств множества $\bar{G}_1\cup\bar{G}_2$. Имеет место

Теорема 2.

$$\int_{\bar{G}_1^{(-)}\cup\bar{G}_2^{(+)}}|Z(t)|\,\mathrm{d}t > AH(\ln T)^{1/4}, \tag{18}$$

$$\int_{\bar{G}_1^{(+)}\cup\bar{G}_2^{(-)}}|Z(t)|\,\mathrm{d}t > AH(\ln T)^{1/4}, \tag{19}$$

где $\bar{G}_1^{(+)}=G_1^{(+)}(\pi/2), \ldots$.

Замечание 3. Конечно, непосредственно из оценки Рамачандры (17), $U=H$, следует лишь утверждение: имеет место или (18), или (19), или (18) и (19) одновременно (если в (18), (19) сделаем, например, подстановку $A\to A/2$).

Доказательство теоремы 2. В силу (2), (3) имеем

$$\int_{\bar{G}_1}Z(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\bar{G}_1^{(+)}}+\int_{\bar{G}_1^{(-)}}, \quad \int_{\bar{G}_2}Z(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\bar{G}_2^{(+)}}+\int_{\bar{G}_2^{(-)}}, \tag{20}$$

(напомним, что $m(\bar{G}_3)=m(\bar{G}_4)=0$). Следовательно,

$$\int_{\bar{G}_1\cup\bar{G}_2}|Z(t)|\,\mathrm{d}t=\left(\int_{\bar{G}_1^{(+)}}-\int_{\bar{G}_1^{(-)}}-\int_{\bar{G}_2^{(-)}}+\int_{\bar{G}_2^{(+)}}\right)Z(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\bar{G}_1}Z(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\bar{G}_2}Z(t)\,\mathrm{d}t=\left(\int_{\bar{G}_1^{(+)}}+\int_{\bar{G}_1^{(-)}}-\int_{\bar{G}_2^{(-)}}-\int_{\bar{G}_2^{(+)}}\right)Z(t)\,\mathrm{d}t.$$

Отсюда получаем

$$\int_{\bar{G}_1\cup\bar{G}_2}|Z(t)|\,\mathrm{d}t-\left(\int_{\bar{G}_1}Z(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\bar{G}_2}Z(t)\,\mathrm{d}t\right)=$$

$$=-2\int_{\bar{G}_1^{(-)}}Z(t)\,\mathrm{d}t+2\int_{\bar{G}_2^{(+)}}Z(t)\,\mathrm{d}t=2\int_{\bar{G}_1^{(-)}\cup\bar{G}_2^{(+)}}|Z(t)|\,\mathrm{d}t\,, \tag{21}$$

$$\int_{\bar{G}_1\cup\bar{G}_2}|Z(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{\bar{G}_1}Z(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\bar{G}_2}Z(t)\,\mathrm{d}t=2\int_{\bar{G}_1^{(+)}\cup\bar{G}_2^{(-)}}|Z(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{22}$$

Далее (см. (17) и [2], (16), (17))

$$\int_{\bar{G}_1\cup\bar{G}_2}|Z(t)|\,\mathrm{d}t=\int_T^{T+H}|Z(t)|\,\mathrm{d}t+O(T^{1/6})>AH(\ln T)^{1/4}\,, \tag{23}$$

(напомним, что множество $\bar{G}_1\cup\bar{G}_2$ может несколько выходить из промежутка $\langle T,\,T+H\rangle$, ср. [2], (3)) и

$$0<\int_{\bar{G}_1}Z(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\bar{G}_2}Z(t)\,\mathrm{d}t<AH\,, \tag{24}$$

(см. (14)). Теперь из (21) в силу (23), (24) следует (18) а из (22) в силу (23), (24) следует (19).

3. В этой части мы уточным оценки (6) в случае $x=\pi/2$. Имеет место

Теорема 3.

$$\int_{\bar{G}_1^{(+)}\cup\bar{G}_2^{(+)}}Z(t)\,\mathrm{d}t>AH(\ln T)^{1/4}\,, \tag{25}$$

$$\int_{\bar{G}_1^{(-)}\cup\bar{G}_2^{(-)}}Z(t)\,\mathrm{d}t<-AH(\ln T)^{1/4}\,. \tag{26}$$

Замечание 4. Геометрическое содержание оценок (25), (26), (ср. (7)):

$$m(D^{(+)}(\pi/2)),\;\; m(D^{(-)}(\pi/2))>AH(\ln T)^{1/4}\,. \tag{27}$$

Доказательство теоремы 3. С одной стороны,

$$\int_{\bar{G}_1^{(+)}\cup\bar{G}_2^{(+)}}Z(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\bar{G}_1^{(-)}\cup\bar{G}_2^{(-)}}Z(t)\,\mathrm{d}t=\int_{(\bar{G}_1^{(+)}\cup\bar{G}_2^{(+)})\cup(\bar{G}_1^{(-)}\cup\bar{G}_2^{(-)})}|Z(t)|\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{(\bar{G}_1^{(-)}\cup\bar{G}_2^{(+)})\cup(\bar{G}_1^{(+)}\cup\bar{G}_2^{(-)})}|Z(t)|\mathrm{d}t=\int_{\bar{G}_1^{(-)}\cup\bar{G}_2^{(+)}}|Z(t)|\mathrm{d}t+$$

$$+\int_{\bar{G}_1^{(+)}\cup\bar{G}_2^{(-)}}|Z(t)|\mathrm{d}t>AH(\ln T)^{1/4}\,, \tag{28}$$

в силу оценок (18), (19). С другой стороны, (см. (12))

$$\int_{\bar{G}_1^{(+)}\cup\bar{G}_2^{(+)}} Z(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\bar{G}_1^{(-)}\cup\bar{G}_2^{(-)}} Z(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{\bar{G}_1^{(+)}\cup\bar{G}_2^{(+)}} Z(t)\,\mathrm{d}t + o(H)\,. \quad (29)$$

Теперь из (29) в силу (28) следует (25). Наконец, из (12) в силу (25) следует (26).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lehmer, D. H.: On the roots of the Riemann zeta-function, Acta Math., 95 (1956), 291--298.

[2] Мозер Ян: Новые следствия из формулы Римана—Зигеля, Acta Arith., 42 (1982), 1—10.

[3] Ramachandra, K.: Some remarks on the mean-volue of the Riemann zeta-function and other Dirichlet series II, Hardy—Ramanujan J. 3 (1980), 1—24.

[4] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

Адрес автора:

Ján Moser
MFF UK, Katedra matematickej analýzy
Matematický pavilón
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 3. 3. 1983

SÚHRN

O SPRÁVANÍ SA KLADNÝCH A ZÁPORNÝCH HODNÔT FUNKCIE $Z(t)$ V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

Výpočty hodnôt funkcie $Z(t)$, spojené s registráciou nulových bodov funkcie $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ ukazujú, že kladné a záporné hodnoty funkcie $Z(t)$ sa chovajú veľmi „chaoticky" v intervale, ktorý je pokrytý výpočtami. Ako príklad uvedieme graf funkcie $Z(t)$ v okolí prvého páru Lehmerových nulových bodov funkcie $Z(t)$.

Ešte väčšiu „chaotičnosť" v chovaní sa grafu funkcie $Z(t)$ treba očakávať v prípade, keď $t \to \infty$. V práci je dokázaná jedna zo zákonitostí, ktoré riadia túto „chaotočnosť." Špeciálny prípad tejto zákonitosti je nasledovný: plošné obsahy (miery) figúr, odpovedajúcich kladným a záporným častiam grafu funkcie $Z(t)$, $t \in \langle T, T+H \rangle$, sú asymptoticky rovné, ($H = T^{1/6}\psi^2 \ln^5 T$, $0 < \psi = \psi(T)$ je funkcia, monotónne rastúca k ∞ pri $T \to \infty$).

Základom dôkazu sú asymptotické vzorce (vety o strednej hodnote pre funkciu $Z(t)$, vzhľadom na isté systémy nesúvislých množín $\subset \langle T, T+H \rangle$), dokázané autorom v práci Acta Arithmetica, 42 (1982), 1—10.

SUMMARY

ON THE BEHAVIOUR OF POSITIVE AND NEGATIVE VALUES OF THE FUNKCTION $Z(t)$ IN THE THEORY OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

The calculations of values of the function $Z(t)$ connected with the registration of zero points of $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ show, that the positive and negative values of the function $Z(t)$ behaves "chaoticly" in the segment which is covered by the computations. As an example we may introduce the graph of the function $Z(t)$ in the neighbour hood of the first pair of the Lehmer's zero points of the function $Z(t)$.

Still more "chaotic" behaviour of the graph of $Z(t)$ may be expected in the case if $t \rightarrow \infty$. In the paper one of the rules which govern the "chaotic" behaviour is proved. A special form of the rule is following: the areas (measures) of the figures which correspond to positive and negative parts of the graph of the function $Z(t)$, $t \in \langle T, T+H\rangle$ are asymptotically equal, ($H = T^{1/6}\psi^2 \ln^5 T$, $0 < \psi = \psi(T)$ is a monotonically increasing function to ∞ for $T \rightarrow \infty$).

The basis of the proof are the asymptotic formulas (mean value theorems for the function $Z(t)$, with respect to certain collections of disconnected set enclosed in $\langle T, T+H\rangle$), proved by the author in a paper Acta Arithmetica, 42 (1982), 1—10.