UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLVI—XLVII—1985

НОВЫЕ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ ФУНКЦИИ $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|^2$

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. Предлагаемая работа посвящена анализу дальнейших возможностей кроющихся в дискретном методе Е. К. Титчмарша ([6] и [13] стр. 260 – 262).

Г. Х. Харди и Д. Е. Литтлвуд ([2], стр. 122, 151 – 156, [3], стр. 59 – 61) получили асимптотическую формулу

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|^2 \mathrm{d}t \sim T \ln T, \quad T\to\infty,$$

Д. Е. Литтлвуд, [4], А. Е. Ингам ([5], стр. 294), Е. К. Титчмарш, [7] и Р. Баласубраманиан, [1], занимались улучшением оценки остаточного члена.

Из этой формулы получаем следующее выражение для среднего значения функции $Z^2(t)$, $t\in\langle T, T+U\rangle$ при соответствующем $U=U(T)$

$$\frac{1}{U}\int_T^{T+U} Z^2(t)\,\mathrm{d}t \sim \ln T, \tag{1}$$

где (см. [13], стр. 94, 383)

$$Z(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta(t)}\,\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right),$$

$$\vartheta=\vartheta(t)=-\frac{1}{2}t\ln\pi+\operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)=$$

$$=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi+O\left(\frac{1}{t}\right).$$

С другой стороны, в работе [11] я получил следующие теоремы о среднем:

$$\frac{1}{m(G_1)}\int_{G_1} Z(t)\,\mathrm{d}t \sim 2\frac{\sin x}{x}, \quad x\in(0, \pi/2\rangle ,$$

$$\frac{1}{m(G_2)}\int_{G_2} Z(t)\,\mathrm{d}t \sim -2\frac{\sin y}{y}, \quad y\in(0, \pi/2\rangle ,$$

где G_1, G_2 — две системы несвязных множеств входящих в промежуток $\langle T, T+H\rangle$ при соответствующем $H=H(T)$ и $m(G_1)$, $m(G_2)$ — меры множеств G_1, G_2. При этом множества G_1, G_2 теснейшим образом вязаны с распределением положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ и следовательно — с распределением нулей нечетного порядка функции

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right), \quad t\in\langle T, T+H\rangle .$$

Сказанное наводит на мысль получить теоремы о среднем для функции

$$Z^2(t)=\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|^2$$

относительно систем некоторых несвязных множеств входящих в промежуток $\langle T, T+U\rangle$ притом так, что соотношение типа Г. Х. Харди—Д. Е. Литтлвуда (1) окажется лишь частным случаем более общего соотношения.

И действительно. Применение метода, аналогичного изложенному в нашей работе [11], к функции $Z^2(t)$, $t\in\langle T, T+U\rangle$ приводит нас немедленно к теоремам о среднем нового типа.

Вопрос о средних значениях мы будем изучать в двух направлениях.

(A) В случае

$$U=U_1=T^{5/12}\ln^3 T$$

мы, например, выделим в промежутке $\langle T, T+U_1\rangle$ два несвязных множества $\bar{G}_3$, $\bar{G}_4$ (в обозначениях использованных в части 2), для которых имеет место

$$\frac{1}{m(\bar{G}_3)}\int_{G_3} Z^2(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{m(\bar{G}_4)}\int_{G_4} Z^2(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{8}{\pi}, \quad T\to\infty$$

и

$$m(\bar{G}_3)\sim m(\bar{G}_4)\sim\frac{1}{2}U_1, \quad m(\bar{G}_3\cup\bar{G}_4)\sim U_1 , \tag{2}$$

где $m(\bar{G}_3)$, $m(\bar{G}_4)$ — меры множеств $\bar{G}_3$, $\bar{G}_4$ соответственно.

Следовательно, разность средних значений функции $Z^2(t)$ относительно множеств $\bar{G}_3$, $\bar{G}_4$ остается положительной, именно, $\sim 8/\pi$. При этом множества $\bar{G}_3$, $\bar{G}_4$ имеют асимптотически равную меру и асимптотически составляют промежуток $\langle T, T+U_1\rangle$.

Причиной асимметрии в поведении функции $Z^2(t)$ является, вероятно, то обстоятельство, что нули функции $Z(t)$ преимущественно попадают в множество $\bar{G}_4$.

(Б) В случае

$$U=U_2=T^{5/12}\ln^2 T \tag{3}$$

мы полагаем

$$\begin{gathered} I_0=\langle T_0, T_0+V\rangle,\ \ V=V(T_0)=T_0^{\alpha},\ \ 0<\alpha<\frac{7}{12}, \\ \omega_0=\frac{\pi}{\ln\frac{T_0}{2\pi}},\ \ U_2(T_0)=T_0^{5/12}\ln^2 T_0,\ \ N_0=\left[\frac{U_2(T_0)}{\omega_0}\right] \end{gathered} \tag{4}$$

И получаем такую закономерность: в предположении справедливости гипотези Линделёфа ([13], стр. 97, 323, [8], стр. 89) имеет место

$$\sum_{l=0}^{N_0} Z^2(T+l\omega_0)=\frac{1}{\pi}U_2(T_0)\ln^2\frac{T_0}{2\pi}+O(T_0^{5/12}\ln^3 T_0) \tag{5}$$

для всех $T\in I_0$.

Следовательно,

$$\frac{1}{N_0+1}\sum_{l=0}^{N_0} Z^2(T+l\omega_0)\sim\ln\frac{T_0}{2\pi},\quad T_0\to\infty,$$

для всех $T\in I_0$. Итак, по гипотезе Линделёфа, средние арифметические всех отрезков

$$\{Z^2(T+l\omega_0)\}_{l=0}^{N_0},\quad T\in I_0$$

асимптотически равны.

Ради наглядности это свойство выразим еще так: по гипотезе Линделёфа, среднее арифметическое

$$\frac{1}{N_0+1}\sum_{l=0}^{N_0} Z^2(T+l\omega_0)$$

является асимптотическим инвариантом относительно движения $T\to T'$; T, $T'\in I_0$.

Явно отметим, что при этом основную роль играет то обстоятельство, что мы берем значения функции $Z^2(t)$ относительно отрезка арифметической последоваcттельности

$$\{T+l\omega_0\}_{l=0}^{N_0}, \quad T\in I_0 .$$

В этом направлении мы получаем еще одну закономерность: по гипотезе Линделёфа, совокупность соотношений (5) есть дискретная основа для некоторого класса интегральных теорем о среднем. А именно, из (5), с помощью «асимптотического интегрирования» (см. часть 4) непрерывной функции $Z^2(t)$, мы получаем новые интегральные теоремы о среднем относительно некоторого класса несвязных множеств с периодическим распределением компонент. При этом, обычная интегральная теорема о среднем (для промежутка $\langle T, T+U_2(T_0)\rangle$, $T\in I_0$) соответствует лишь простому частному случаю.

Переходим к точным формулировкам и доказательствам.

2. Пусть

$$\vartheta_1=\vartheta_1(t)=\frac{1}{2}\,t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}\,t-\frac{1}{8}\,\pi$$

и $\{g_\nu(\tau)\}$ обозначает семейство последовательностей, определенных согласно условию (ср. [12], (6))

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau)]=\frac{\pi}{2}\,\nu+\frac{\tau}{2}, \quad \tau\in\langle -\pi, \pi\rangle , \tag{6}$$

$(g_\nu(0)=g_\nu)$. Имеет место

Теорема 1.

$$\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U} Z^2[g_\nu(\tau)]=\frac{1}{\pi}\,U\ln^2\frac{T}{2\pi}+\frac{2c}{\pi}\,U\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{5/12}\ln^3 T) , \tag{7}$$

$$\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U} (-1)^\nu Z^2(g_\nu(\tau))=\frac{2}{\pi}\,U\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(T^{5/12}\ln^2 T) , \tag{8}$$

где c — постоянная Эйлера, O — оценки имеют место равномерно относительно $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$ и

$$U\leqq U_1=T^{5/12}\ln^3 T . \tag{9}$$

Замечание 1. Соотношения (7), (8) являются асимптотическими в случае $U=U_1$.

Из теоремы 1 получаем

Следствие 1.

$$\sum_{T\leqq g_{2\nu}\leqq T+U_1} Z^2[g_{2\nu}(\tau)]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}U_1\ln^2\frac{T}{2\pi}+\frac{1}{\pi}(c+\cos\tau)U_1\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{5/12}\ln^3 T)\,,$$

$$\sum_{T\leqq g_{2\nu+1}\leqq T+U_1} Z^2[g_{2\nu+1}(\tau)]= \tag{10}$$

$$-\frac{1}{2\pi}U_1\ln^2\frac{T}{2\pi}+\frac{1}{\pi}(c-\cos\tau)U_1\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{5/12}\ln^3 T)\,.$$

Пусть далее

$$G_3=G_3(x,\,T,\,U_1)=$$

$$=\bigcup_{T\leqq g_{2\nu}\leqq T+U_1}\{t\colon g_{2\nu}(-x)<t<g_{2\nu}(x)\},\quad 0<x\leqq\pi/2\,,$$

$$G_4=G_4(y,\,T,\,U_1)=$$

$$=\bigcup_{T\leqq g_{2\nu+1}\leqq T+U_1}\{t\colon g_{2\nu+1}(-y)<t<g_{2\nu+1}(y)\},\quad 0<y\leqq\pi/2\,,$$

(ср. [11], (3)).

Так как (см. (6)) $g_{2\nu}(\pi/2)=g_{2\nu+1}(-\pi/2)$, то G_3, G_4 — два семейства несвязных множеств, для которых $G_3\cap G_4=\emptyset$.

Далее, так как (см. (6))

$$\vartheta_1[g_{2\nu}(x)]-\vartheta_1[g_{2\nu}(-x)]=x\,,$$

$$\vartheta_1[g_{2\nu+1}(y)]-\vartheta_2[g_{2\nu+1}(-y)]=y\,,$$

то способом [6], стр. 102, (ср. [9], (42)),получаем

$$g_{2\nu}(x)-g_{2\nu}(-x)=\frac{2x}{\ln\frac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{xU_1}{T\ln^2 T}\right),$$

$$g_{2\nu+1}(y)-g_{2\nu+1}(-y)=\frac{2y}{\ln\frac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{yU_1}{T\ln^2 T}\right), \tag{11}$$

для $g_{2\nu}(-x)$, $g_{2\nu+1}(y)\in\langle T,\,T+U_1\rangle$. Однако, (см. [12], (21))

$$\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U_1} 1=\frac{1}{\pi}U_1\ln\frac{T}{2\pi}+O(1)\,. \tag{12}$$

Следовательно, для мер множеств G_3, G_4 получаем выражения

$$m(G_3)=\frac{x}{\pi}U_1+O\left(\frac{x}{\ln T}\right),$$
$$m(G_4)=\frac{y}{\pi}U_1+O\left(\frac{y}{\ln T}\right). \tag{13}$$

соответственно.

Имеет место

Теорема 2.

$$\int_{G_3} Z^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{x}{\pi}U_1\ln\frac{T}{2\pi}+\frac{2x}{\pi}\left(c+\frac{\sin x}{x}\right)U_1+O(xT^{5/12}\ln^2 T), \tag{14}$$

$$\int_{G_4} Z^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{y}{\pi}U_1\ln\frac{T}{2\pi}+\frac{2y}{\pi}\left(c-\frac{\sin y}{y}\right)U_1+O(yT^{5/12}\ln^2 T). \tag{15}$$

Отсюда получается

Следствие 2.

$$\frac{1}{m(G_3)}\int_{G_3} Z^2(t)\,\mathrm{d}t=\ln\frac{T}{2\pi}+2c+2\frac{\sin x}{x}+O\left(\frac{1}{\ln T}\right),$$
$$\frac{1}{m(G_4)}\int_{G_4} Z^2(t)\,\mathrm{d}t=\ln\frac{T}{2\pi}+2c-2\frac{\sin y}{y}+O\left(\frac{1}{\ln T}\right).$$

Следствие 3 (главный результат этой части).

$$\frac{1}{m(G_3)}\int_{G_3} Z^2(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{m[G_4(x)]}\int_{G_4(x)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t=4\frac{\sin x}{x}+O\left(\frac{1}{\ln T}\right). \tag{16}$$

Следствие 4.

$$\frac{1}{m(\bar{G}_3)}\int_{G_3} Z^2(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{m(\bar{G}_4)}\int_{G_4} Z^2(t)\,\mathrm{d}t\sim\frac{8}{\pi},$$

где $\bar{G}_3=G_3(\pi/2)$, $\bar{G}_4=G_4(\pi/2)$, (относительно (2) см. (13) в случае $x=y=$ $=\pi/2$).

Замечание 2. Формулу (16) интересно сравнить с формулой

$$\frac{1}{m(G_1)}\int_{G_1} Z(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{m[G_2(x)]}\int_{G_2(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t\sim 4\frac{\sin x}{x},$$

которую мы получили в работе [11], (см. разность двух соотношений в [11], (9) в случае $x=y$).

3. Полагая в соотношении (7) $U=U_2$, (см. также (3)), получаем

Следствие 5.

$$\sum_{T \leq g_\nu \leq T+U_2} Z^2[g_\nu(\tau)] = \frac{1}{\pi} U_2 \ln^2 \frac{T}{2\pi} + O(T^{5/12} \ln^3 T) , \tag{17}$$

где O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Из (17) получается

Теорема 3 (главный результат этой части). По гипотезе Линделёфа,

$$\sum_{l=0}^{N_0} Z^2(T + l\omega_0) = \frac{1}{\pi} U_2(T_0) \ln^2 \frac{T_0}{2\pi} + O(T_0^{5/12} \ln^3 T_0) , \tag{18}$$

для всех $T \in I_0$.

Положим

$$\Omega(T, P, N_0, \omega_0) = \bigcup_{l=0}^{N_0} \left\langle T + l\omega_0, T + l\omega_0 + \frac{\omega_0}{P} \right\rangle, \quad T \in I_0 , \tag{19}$$

где $1 \leqq P$ — целое число. Очевидно

$$\Omega \subset \left\langle T, T + \omega_0 N_0 + \frac{\omega_0}{P} \right\rangle \subset \langle T, T + (N_0 + 1)\omega_0 \rangle .$$

Замечание 3. В случае $P \geqq 2$ множество $\Omega(T, P, N_0, \omega_0)$ является несвязным множеством и его компоненты расположены периодически с периодом ω_0.

Из теоремы 3 получается

Следствие 6. По гипотезе Линделёфа,

$$\int_\Omega Z^2(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{P} U_2(T_0) \ln \frac{T_0}{2\pi} + O\left(\frac{1}{P} T_0^{5/12} \ln^2 T_0\right) \tag{20}$$

для T, $T + \omega \in I_0$; специально, в случае $P = 1$,

$$\int_T^{T+(N_0+1)\omega_0} Z^2(t)\, \mathrm{d}t = U_2(T_0) \ln \frac{T_0}{2\pi} + O(T_0^{5/12} \ln^2 T_0) . \tag{21}$$

Так как (см. (4), (19))

$$m(\Omega) = (N_0 + 1) \frac{\omega_0}{P} - \frac{1}{P} U_2(T_0) + O\left(\frac{1}{P \ln T_0}\right) .$$

то из (20) получаем

Следствие 7. По гипотезе Линделёфа,

$$\frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega Z^2(t)\, \mathrm{d}t \sim \ln \frac{T_0}{2\pi}$$

для всех $T \in I_0$.

Замечание 4. По гипотезе Линделёфа, функция $Z^2(t)$ имеет асимптотически одинаковое среднее значение относительно всех несвязных множеств Ω указанного класса.

4. В этой части мы проверим справедливость соотношения (20). Пусть $\chi_\Omega(t)$, $t \in \langle T, T+(N_0+1)\omega_0 \rangle$ обозначает характеристическую функцию множества Ω. Функция

$$Z^2(t) \cdot \chi_\Omega(t) \tag{22}$$

имеет лишь конечное число скачков первого рода в указанном промежутке, и, следовательно, интегрируема по Риману.

(А) Пусть $P \geqq 2$; T, $T+\omega_0 \in I_0$. Выражение

$$R = \sum_{k=1}^{Q} \sum_{l=0}^{N_0} Z^2\left(T + \frac{k\omega_0}{PQ} + l\omega_0\right) \cdot \frac{\omega_0}{PQ} \tag{23}$$

есть (специальная) сумма Римана для функции (22) (учтено выбрасывание с помощью функции $\chi_\Omega(t)$) относительно промежутка $\langle T, T+(N_0+1)\omega_0 \rangle$, соответствующая разбиению этого промежутка на $(N_0+1)PQ$ равных частей. Следовательно (P — фиксировано)

$$\lim_{Q\to\infty} R = \int_T^{T+(N_0+1)\omega_0} Z^2(t)\chi_\Omega(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Omega Z^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Так как (см. (18))

$$R = \frac{\omega_0}{P}\left\{\frac{1}{\pi} U_2(T_0) \ln^2 \frac{T_0}{2\pi} + O(T_0^{5/12} \ln^3 T_0)\right\} =$$

$$= \frac{1}{P} U_2(T_0) \ln \frac{T_0}{2\pi} + O\left(\frac{1}{P} T_0^{5/12} \ln^2 T_0\right) \tag{25}$$

то, в силу (24), (25) получаем (20).

(Б) В случае $P=1$, вместо (23), полагаем

$$R = \sum_{k=1}^{Q} \sum_{l=0}^{N_0} Z^2\left(T + \frac{k\omega_0}{Q} + l\omega_0\right) \cdot \frac{\omega_0}{Q} + Z^2(T+(N_0+1)\,\omega_0) \cdot \frac{\omega_0}{Q}$$

и аналогично случаю (А), получаем (21).

5. Доказательство теоремы 1 опирается на следующие леммы.

Пусть

$$S_1 = S_1(T, U, \tau) = \sum_{\substack{m,\, n<P_0 \\ mn \geqq 2}} \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \cos\{g_\nu(\tau) \ln(mn) - \tau\},\ P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}\,.$$

Имеет место

Лемма 1.

$$S_1 = O(T^{5/12} \ln^2 T)\,, \tag{26}$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Пусть

$$S_2 = S_2(T, U, \tau) = \sum_{m<n<P_0} \sum \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \cos\left\{g_\nu(\tau) \ln \frac{n}{m}\right\}.$$

Имеет место

Лемма 2.

$$S_2 = O(T^{5/12} \ln T)\,, \tag{27}$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Тепер мы покажем, как завершается

Доказательство теоремы 1 с помощью лемм 1, 2. Из формулы Римана—Зигеля для $t \in \langle T, T+U \rangle$

$$Z(t) = 2 \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta_1 - t \ln n) + O(T^{-1/4})\,,$$

(см. [12], (93), $\vartheta \to \vartheta_1$) в случае последовательности $\{g_\nu(\tau)\}$ (см. (6)) получаем, что

$$\begin{aligned} Z^2[g_\nu(\tau)] &= 2\sum_{m,\, n<P_0} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\left\{g_\nu(\tau) \ln \frac{n}{m}\right\} + \\ &+ 2\sum_{m,\, n<P_0} \sum \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{mn}} \cos\{g_\nu(\tau) \ln(mn) - \tau\} + \\ &+ O\left(\frac{U}{\sqrt{T} \ln T}\right) + O(T^{-1/12} \ln T) = S_3 + S_4 + O(T^{-1/12} \ln^2 T)\,, \end{aligned} \tag{28}$$

(*см.* (9) *и* [12], (97), $k = l = 0$).

(A) Положим

$$S_3 = S_3(m = n) + S_3(m \neq n) = S_{31} + S_{32}\,.$$

Так как, по известной формуле

$$S_{31} = 2 \sum_{n<P_0} \frac{1}{n} = 2 \ln P_0 + 2c + O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right),$$

то (см. (12), $U_1 \to U$)

$$\sum_{T\leq g_\nu\leq T+U} S_{31}=\frac{1}{\pi}U\ln^2\frac{T}{2\pi}+\frac{2c}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{-1/12}\ln^4 T)\,. \tag{29}$$

Далее, по лемме В ($k=l=0$, $M=1/2$) из работы [12],

$$S_{32}=O(T^{5/12}\ln^3 T)\,, \tag{30}$$

так как доказательство леммы В срабатывает и в случае семейства последовательностей $\{g_\nu(\tau)\}$ и встречающиеся O — оценки имеют место равномерно отностительно $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

Теперь положим

$$S_4=S_4(m=n=1)+S_4(mn\geqq 2)=S_{41}+S_{42}\,.$$

Очевидно (см. (28))

$$\sum_{T\leq g_\nu\leq T+U} S_{41}=2\cos\tau\cdot\sum_{T\leq g_\nu\leq T+U}(-1)^\nu=O(1)\,. \tag{31}$$

По лемме С ($k=l=0$, $M=1/2$, $\varphi_2\rightarrow\tau$) из работы [12],

$$\sum_{T\leq g_\nu\leq T+U} S_{42}=O(T^{5/12}\ln^2 T) \tag{32}$$

(см. замечание по поводу применения леммы В). Следовательно, в силу (12), (28)—(32) получаем (7).

(Б) Имеет место (см. (28))

$$(-1)^\nu Z^2[g_\nu(\tau)]=2\sum_{m,\,n<P_0}\sum\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{mn}}\cos\left\{g_\nu(\tau)\ln\frac{n}{m}\right\}+$$

$$+2\sum_{m,\,n<P_0}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\{g_\nu(\tau)\ln(mn)-\tau\}+O(T^{-1/12}\ln^2 T)=$$

$$=S_5+S_6+O(T^{-1/12}\ln^2 T)\,. \tag{33}$$

Положим

$$S_5=S_5(m=n)+S_5(m\neq n)=S_{51}+S_{52}\,.$$

Так как

$$S_{51}=2(-1)^\nu\sum_{n<P_0}\frac{1}{n}\,,$$

то

$$\sum_{T\leq g_\nu\leq T+U} S_{51}=O(\ln T)\,. \tag{34}$$

В случае S_{52}, по лемме 2 (см. (27)),

$$\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U} S_{52}=O(T^{5/12}\ln T)\,. \tag{35}$$

Далее положим

$$S_6=S_6(m=n=1)+S_6(mn\geqq 2)=S_{61}+S_{62}\,.$$

Так как $S_{61}=2\cos\tau$, то (см. (12), $U_1\to U$)

$$\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U} S_{61}=\frac{2}{\pi}\,U\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(1) \tag{36}$$

и по лемме 1 (см. (26)),

$$\sum_{T\leqq g_\nu\leqq T+U} S_{62}=O(T^{5/12}\ln^2 T)\,. \tag{37}$$

Теперь, в силу (12), (33)—(37) получаем (8).

6. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 1. Действуем способом изложенным в работе [12], Глава III (см. замечание в связи с применением леммы В в части 5).

Положим (ср. [12], (56))

$$\bar S_{11}=\sum_{\substack{m,\,n<P_0\\ mn\geqq 2}}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{p=0}^{N-1}\cos(\bar\Omega_1 p+\bar\varphi_3)\,,$$

где

$$\bar\Omega_1=\bar\omega_0\ln(mn),\quad \bar\varphi_3=g_{\bar\nu+1}(\tau)\ln(mn)-\tau\,.$$

Имеет место (ср. [12], лемма 1)

$$2\bar S_{11}=\sum_{m,\,n}\sum\frac{\cos\bar\varphi_3}{\sqrt{mn}}+\sum_{m,\,n}\sum\frac{\cos(\bar\Omega_1\bar N+\bar\varphi_3)}{\sqrt{mn}}-$$

$$-\sum_{m,\,n}\sum\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\bar\Omega_1\right)}{\sqrt{mn}}\sin\bar\varphi_3+$$

$$+\sum_{m,\,n}\sum\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\Omega_1\right)}{\sqrt{mn}}\sin(\bar\Omega_1\bar N+\bar\varphi_3),\quad \bar N=N-1\,. \tag{38}$$

Однако (ср. [12], (57))

$$0<\frac{\ln 2}{\ln\frac{T}{2\pi}}\leqq\bar\Omega_1<\frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}\ln(mn)<\pi\,,$$

т. е.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\bar{\Omega}_1\right) < A \ln T .$$

Кроме того, последовательность

$$\left\{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\bar{\Omega}_1\right)\right\}$$

монотонна, например, в переменной n. Значит

$$\sum_{m,n}\sum \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\bar{\Omega}_1\right)}{\sqrt{mn}} \sin \bar{\varphi}_3 =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{e^{-i\tau}\sum_m \frac{1}{\sqrt{m}} e^{ig_{\bar{v}+1}(\tau)\ln m} \cdot \sum_n \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\bar{\Omega}_1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} e^{ig_{\bar{v}+1}(\tau)\ln n}\right\} =$$

$$= O(T^{1/4}\ln T \cdot T^{1/6}\ln T) = O(T^{5/12}\ln^2 T) .$$

Такая же оценка получается и для остальных двойных сумм входящих в (38). Следовательно,

$$\bar{S}_{11} = O(T^{5/12}\ln^2 T) .$$

Отсюда, способом [12], (68)—(73) получаем оценку (26).

7. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 2. Достаточно изучить случай $m<n$. Действуем способом изложенным в работе [12], Глава IV. Положим

$$\bar{S}_{21} = \sum_{m<n<P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p \cos(\bar{\Omega}_2 p + \bar{\varphi}_5) ,$$

где (ср. [12], (74))

$$\bar{\Omega}_2 = \bar{\omega}_0 \ln\frac{n}{m}, \quad \bar{\varphi}_5 = g_{\bar{v}+1}(\tau)\ln\frac{n}{m} .$$

Имеет место (ср. [12], лемма 6)

$$2\bar{S}_{21} = \sum_{m,n}\sum \frac{\cos\bar{\varphi}_5}{\sqrt{mn}} + (-1)^{\bar{N}}\sum_{m,n}\sum \frac{\cos(\bar{\Omega}_2\bar{N} + \bar{\varphi}_5)}{\sqrt{mn}} +$$

$$+ \sum_{m,n}\sum \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\bar{\Omega}_2\right)}{\sqrt{mn}} \sin\bar{\varphi}_5 -$$

$$-(-1)^{\bar{N}}\sum_{m,n}\sum \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\bar{\Omega}_2\right)}{\sqrt{mn}}\sin(\bar{\Omega}_2\bar{N}+\bar{\varphi}_5), \quad \bar{N}=N-1 .$$

Однако,

$$0<\bar{\Omega}_2<\frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}\cdot\ln n<\frac{\pi}{2},$$

т. е.

$$0<\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\bar{\Omega}_2\right)<1$$

и последовательность

$$\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\bar{\Omega}_2\right)\right\}$$

монотонна, например в переменной n. Имеем

$$\sum_{m,n}\sum \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Omega_2\right)}{\sqrt{mn}}\sin\bar{\varphi}_5=$$

$$=\operatorname{Im}\left\{\sum_m \frac{1}{\sqrt{m}}e^{-i\theta_{\bar{\nu}+1}(\tau)\ln m}\cdot\sum_n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\bar{\Omega}_2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}e^{i\theta_{\bar{\nu}+1}(\tau)\ln n}\right\}=$$

$$=O(T^{5/12}\ln T) .$$

Такая же оценка получается и для остальных двойных сумм входящих в (39). Следовательно,

$$\bar{S}_{21}=O(T^{5/12}\ln T) .$$

Отсюда, способом [12], (68)—(73) получаем оценку (27).

8. В этой части мы приведем (ср. [11], (50—(53))

Доказательство теоремы 2. Так как

$$\vartheta_1'(t)=\frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi},$$

то из (6) получаем, что

$$\frac{dg_{2\nu}(\tau)}{d\tau}=\frac{1}{\ln\frac{g_{2\nu}(\tau)}{2\pi}},$$

т. е.

$$\left(\frac{\mathrm{d}g_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}=2\ln P_0+O\left(\frac{U_1}{T}\right), \quad g_{2\nu}(\tau)\in\langle T, T+U_1\rangle .$$

Далее, (см. [13], стр. 94, 109)

$$Z(t)=O(t^{1/6}\ln t) .$$

Следовательно, (см. также (11))

$$\int_{-x}^{x} Z^2[g_{2\nu}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau=2\ln P_0\int_{g_{2\nu}(-x)}^{g_{2\nu}(x)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t+O(xT^{-1/4}\ln^4 T) .$$

Теперь, интегрируя первое соотношение в (10) по τ в промежутке $\langle -x, x\rangle$, получаем (14) и аналогичным образом — (15).

9. В этой части мы приведем

Доказательство теоремы 3.

(А) Так как для $T\in I_0$, (см. (4))

$$\begin{aligned}\ln^2\frac{T}{2\pi}&=\ln^2\frac{T_0}{2\pi}+O(VT_0^{-1}\ln T_0) ,\\ U_2(T)&=U_2(T_0)+O(VT_0^{-7/12}\ln^2 T_0) ,\end{aligned} \tag{40}$$

то

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}U_2(T)\ln^2\frac{T}{2\pi}+O(T^{5/12}\ln^3 T)=\\ &=\frac{1}{\pi}U_2(T_0)\ln^2\frac{T_0}{2\pi}+O(T_0^{5/12}\ln^3 T_0), \quad T\in I_0 .\end{aligned} \tag{41}$$

(Б) Пусть

$$S(a, b)=\sum_{a\leqq n<b\leqq 2a} n^{it}, \quad b\leqq\sqrt{\frac{t}{2\pi}} .$$

Если

$$|S(a, b)|<A(\Delta)\sqrt{a}t^{\Delta}, \quad \Delta\in(0, 1/6\rangle , \tag{42}$$

то (см. [9], (14)—(22), [10], (10))

$$Z(t)=O(t^{\Delta}\ln t), \quad Z'(t)=O(t^{\Delta}\ln^2 t) . \tag{43}$$

Так как в случае (42), в силу (12), (40), (41),

$$\sum_{T+U_2(T_0)\leq g_\nu\leq T+U_2(T)} Z^2[g_\nu(\tau)] = O(T^{2\Delta-7/12}V\ln^5 T_0) =$$

$$= O(T_0^{5/12}\ln^3 T_0), \quad T\in I_0,$$

то

$$\sum_{T\leq g_\nu\leq T+U_2(T)} Z^2[g_\nu(\tau)] = \sum_{T\leq g_\nu\leq T+U_2(T_0)} Z^2[g_\nu(\tau)] + O(T_0^{5/12}\ln^3 T_0), \tag{44}$$

для $T\in I_0$.

(В) Положим

$$\begin{aligned} \bar\nu &= \min\{\nu\colon g_\nu\in\langle T,\, T+U_2(T_0)\rangle\}, \\ \bar\nu+N_1 &= \max\{\nu\colon g_\nu\in\langle T,\, T+U_2(T_0)\rangle\}. \end{aligned} \tag{45}$$

Далее, способом приводящим к соотношениям (11), получаем

$$g_{\nu+1}(\tau)-g_\nu(\tau) = \frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{U_2(T_0)}{T\,ln^2\,T}\right) = \omega + O\left(\frac{U_2(T_0)}{T_0\ln^2 T_0}\right), \tag{46}$$

для $g_\nu(\tau),\ g_{\nu+1}(\tau)\in\langle T,\, T+U_2(T_0)\rangle$. Следовательно,

$$g_{\bar\nu+l}(\tau) = g_{\bar\nu}(\tau) + l\omega + O\left(\frac{N_1U_2(T_0)}{T_0\ln^2 T_0}\right), \quad l=0,1,\dots,N_1.$$

Теперь (см. (12), $U_1\to U_2(T_0)$, (43))

$$\sum_{T\leq g_\nu\leq T+U_2(T_0)} Z^2[g_\nu(\tau)] = \sum_{l=0}^{N_1} Z^2[g_{\bar\nu+l}(\tau)] = \sum_{l=0}^{N_1} Z^2[g_{\bar\nu}(\tau)+l\omega] + R_1, \tag{47}$$

$$R_1 = O\left(N_1\cdot|ZZ'|\cdot\frac{N_1U_2(T_0)}{T_0\ln^2 T_0}\right) = O(T_0^{2\Delta+1/4}\ln^9 T_0) =$$

$$= O(T_0^{5/12}\ln^3 T_0) \tag{48}$$

при условии $2\Delta+1/4<5/12$, т. е.

$$\Delta<\frac{1}{12}. \tag{49}$$

(Г) Далее (см. (12), (45))

$$N_1 = -1 + \sum_{T\leq g_\nu\leq T+U_2(T_0)} 1 = \frac{1}{\pi}U_2(T_0)\ln\frac{T}{2\pi} + O(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}U_2(T_0)\ln\frac{T_0}{2\pi} + O\left(\frac{VU_2(T_0)}{T_0}\right) + O(1) = \frac{1}{\pi}U_2(T_0)\ln\frac{T_0}{2\pi} + O(1)$$

и (см. (4))

$$N_0=\left[\frac{U_2(T_0)}{\omega_0}\right]=\frac{1}{\pi}\,U_2(T_0)\ln\frac{T_0}{2\pi}+O(1)\,.$$

Следовательно $N_0-N_1=O(1)$ и (см. (43))

$$\sum_{l=0}^{N_1}Z^2[g_{\bar\nu}(\tau)+l\omega]=\sum_{l=0}^{N_0}Z^2[g_{\bar\nu}(\tau)+l\omega]+O(Z^2)=$$

$$=\sum_{l=0}^{N_0}Z^2[g_{\bar\nu}(\tau)+l\omega]+O(T_0^{5/12}\ln^3 T_0)\,. \tag{50}$$

(Д) Так как (см. (4), (46))

$$\omega-\omega_0=O\left(\frac{V}{T_0\ln^2 T_0}\right),\quad T\in I_0\,,$$

то (см. (43), (50))

$$\sum_{l=0}^{N_0}Z^2[g_{\bar\nu}(\tau)+l\omega]=\sum_{l=0}^{N_0}Z^2[g_{\bar\nu}(\tau)+l\omega_0+l(\omega-\omega_0)]=$$

$$=\sum_{l=0}^{N_0}Z^2[g_{\bar\nu}(\tau)+l\omega_0]+R_2, \tag{51}$$

где

$$R_2=O\left(N_0^2\cdot|ZZ'|\cdot\frac{V}{T_0\ln^2 T_0}\right)=O(T_0^{\alpha+2\Delta-1/6}\ln^7 T_0)=O(T_0^{5/12}\ln^3 T_0) \tag{52}$$

при условии $\alpha+2\Delta-1/6<5/12$ т. е.

$$\alpha+2\Delta<\frac{7}{12}\,. \tag{53}$$

(З) Так как (см. (6))

$$\frac{\mathrm{d}g_{\bar\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{2\vartheta_1'[g_{\bar\nu}(\tau)]}>0\,,$$

то $g_{\bar\nu}(\tau)$ возрастает для $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$. Однако (см. (45))

$$g_{\bar\nu-1}=g_{\bar\nu}(-\pi)\leqq g_{\bar\nu}(\tau)\leqq g_{\bar\nu}(\pi)=g_{\bar\nu+1},\quad g_{\bar\nu-1}<T<g_{\bar\nu+1}\,.$$

Отсюда, по непрерывности $g_{\bar\nu}(\tau)$ заключаем, что существует единственное $\bar\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$ такое, что

$$g_{\bar\nu}(\bar\tau)=T\,. \tag{54}$$

(И) Полагая теперь в соотношении (17) $\tau=\bar\tau$, в силу (41), (44), (47), (48), (51), (52) получаем для всех $T\in I_0$ соотношение (18), при условиях (см. (49), (53))

$$\Delta < \frac{1}{12}, \quad \alpha + 2\Delta < \frac{7}{12}. \tag{55}$$

Так как, до сих пор полученные значения Δ, для которых имеет место оценка (42), незначительно отличаются от 1/6, а значит — очень далеки от 1/12, то мы в этом месте работы предполагаем справедливой гипотезу Линделёфа, т. е. $\Delta \to \varepsilon/2$, где $0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число (см. [8], стр. 89). В этом случае удовлетворяется и второе условие в (55), если $\alpha < 7/12$ (см. (4)), *Доказательство теоремы* 3 *закончено*.

10. В этой части, в связи с формулой (12), мы получим точную асимптотическую формулу для величины

$$Q_1 = \sum_{T \leq g_v \leq T+U} 1 .$$

Прежде всего (см. [12], (41))

$$g_{v+1} - g_v = \frac{\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{U}{T \ln^2 T}\right). \tag{56}$$

Эта формула является асимптотической в случае

$$U = o(T \ln T) .$$

Пусть

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \min \{v: g_v \in \langle T, T+U \rangle\} , \\ \bar{v} + N_2 &= \max \{v: g_v \in \langle T, T+U \rangle\} . \end{aligned} \tag{57}$$

Очевидно

$$N_2 = \sum_{\langle g_v, g_{v+1} \rangle \subset \langle T, T+U \rangle} 1$$

и

$$g_{\bar{v}+N_2} - g_{\bar{v}} = \sum_{v=\bar{v}}^{N_2-1} (g_{v+1} - g_v) = N_2 \frac{\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{N_2 U}{T \ln^2 T}\right) =$$

$$= N_2 \frac{\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{U^2}{T \ln T}\right), \tag{58}$$

так как, в силу (56), имеет место тривиальная оценка $N_2 = O(U \ln T)$. Однако, (см. (56), (57))

$$U = (g_{\bar{v}+N_2} - g_{\bar{v}}) + (g_{\bar{v}} - T) + (T + U - g_{\bar{v}+N_2}) =$$

$$= g_{\bar{v}+N_2} - g_{\bar{v}} + O\left(\frac{1}{\ln T}\right).$$

Следовательно, (см. (58))

$$N_2=\frac{1}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O(1)+O\left(\frac{U^2}{T}\right)$$

и

$$Q_1=N_2+1=\frac{1}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O(1)+O\left(\frac{U^2}{T}\right). \tag{59}$$

Это и есть точная асимптотическая формула для величины Q_1. Из этой формулы, в случае

$$U\leqq\sqrt{T}$$

получаем, что (ср. (12))

$$Q_1=\frac{1}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O(1). \tag{60}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Balasubramanian, R.: An improvement of a theorem of Titchmarsh on mean square of $|\zeta(1/2+it)|$, Proc. London Math. Soc. 3, 36 (1978), 540—576.

[2] Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of distribution of primes, Acta Math., 41 (1918), 119—196.

[3] —, The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 21 (1922), 39—74.

[4] Littlewood, J. E.: Researches in the theory of the Riemann ζ-function, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 20 (1922), Records XXII—XXVIII.

[5] Ingham, A. E.: Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 27 (1926), 273—300.

[6]—[7] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, IV, V, Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105, 195—210.

[8] Карацуба, А. А.: Основы аналитической теории чисел, Москва 1975.

[9] Мозер, Ян: Об одной сумме в теории дзета-функции Римина, Acta Arith., 31 (1976), 31—43.

[10] —, О корнях уравнения $Z'(t)=0$, Acta Arith., 40 (1981), 79—89.

[11] Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римина—Зигеля, Acta Arith., 42 (1982), 1—10.

[12] —, Улучшение теоремы Харди—Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta(1/2+it)$, Acta Arith., 43, (1983), 21—47.

[13] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римина, Москва 1953.

Адрес автора:
Ján Moser
MFF UK, Katedra matematickej analýzy
Matematický pavilón
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 3. 3. 1983

SÚHRN

NOVÉ VETY O STREDNEJ HODNOTE PRE FUNKCIU $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2$

Ján Moser, Bratislava

Nech $\{g_\nu(\tau)\}$ označuje nekonečný systém postupností, definovaných vzťahom $\vartheta_1[g_\nu(\tau)]=\frac{\pi}{2}\nu+\frac{\tau}{2}$, $\nu=1, 2, \ldots, \tau\in\langle-\pi, \pi\rangle$, kde $\vartheta_1(t)=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi$. Pomocou $\{g_\nu(\tau)\}$ sú definované dve nesúvislé množiny $\bar{G}_3$, $\bar{G}_4\subset\langle T, T+U_1\rangle$, $U_1=T^{5/12}\ln^3 T$.

V práci je dokázaný nasledovný asymptotický vzorec:

$$\frac{1}{m(\bar{G}_3)}\int_{G_3} Z^2(t)\,dt-\frac{1}{m(\bar{G}_4)}\int_{G_4} Z^2(t)\,dt\sim\frac{8}{\pi},\quad T\to\infty\,, \tag{1}$$

kde $m(\bar{G}_3)\sim m(\bar{G}_4)\sim\frac{1}{2}U_1$, $m(\bar{G}_3\cup\bar{G}_4)\sim U_1$, ($m(\bar{G}_3)$, $m(\bar{G}_4)$ sú miery množín $\bar{G}_3$, $\bar{G}_4$ a $Z(t)$ je známa funkcia v teórii $\zeta(s)$). Príčinou asymetrie v chovaní sa funkcie $Z^2(t)$, vyjadrenej vzťahom (1), je pravdepodobne tá okolnosť, že nulové body funkcie $Z(t)$ ležia prednostne v množine $\bar{G}_4$.

Okrem toho je dokázaný nasledovný dôsledok z Lindelöfovej hypotézy: aritmetický priemer

$$\frac{1}{N_0+1}\sum_{l=0}^{N_0} Z^2(T+\omega_0 l) \tag{2}$$

je asymptotickým invariantom vzhľadom na transláciu $T\to T'$, $T, T'\in I_0$, kde $I_0=\langle T_0, T_0+V\rangle$, $V=T_0^\alpha$, $0<\alpha<7/12$, $\omega_0=\frac{\pi}{\ln\frac{T_0}{2\pi}}$, $U_2(T_0)=T_0^{5/12}\ln^2 T_0$, $N_0=\left[\frac{U_2(T_0)}{\omega_0}\right]$.

Zo vzťahu (2) sú odvodené, pomocou „asymptotického integrovania" spojitej funkcie $Z^2(t)$, nové integrálne vety o strednej hodnote pre istú triedu nesúvislých množín s periodickým rozložením svojích komponent.

SUMMARY

NEW MEAN VALUE THEOREMS FOR THE FUNCTION $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2$

Ján Moser, Bratislava

Let $\{g_\nu(\tau)\}$ denote an infinite collection of sequences defined by $\vartheta_1[g_\nu(\tau)]=\frac{\pi}{2}\nu+\frac{\tau}{2}$, $\nu=1, 2, \ldots$, $\tau\in\langle-\pi, \pi\rangle$, where $\vartheta_1(t)=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi$. By means of $\{g_\nu(\tau)\}$ two disconnected sets $\bar{G}_3$, $\bar{G}_4\subset\langle T, T+U_1\rangle$, $U_1=T^{5/12}\ln^3 T$ are defined.

In the paper the following asymptotic formula is proved:

$$\frac{1}{m(\bar{G}_3)}\int_{G_3} Z^2(t)\,dt-\frac{1}{m(\bar{G}_4)}\int_{G_4} Z^2(t)\,dt\sim\frac{8}{\pi},\quad T\to\infty\,, \tag{1}$$

where $m(\bar{G}_3) \sim m(\bar{G}_4) \sim \frac{1}{2} U_1$, $m(\bar{G}_3 \cup \bar{G}_4) \sim U_1$, $(m(\bar{G}_3)$, $m(\bar{G}_4)$ are the measures of the sets $\bar{G}_3$, $\bar{G}_4$ and $Z(t)$ is the known function in the theory of $\zeta(s))$. The reason of the asymetry in the behaviour of $Z^2(t)$ given by (1) is probably the fact that the zeros of $Z(t)$ lie preferentially in the set $\bar{G}_4$.

Moreover the following corollary of the Lindelöf hypothesis is proved: the arithmetical mean

$$\frac{1}{N_0+1} \sum_{l=0}^{N_0} Z^2(T+\omega_0 l) \tag{2}$$

is an asymptotic invariant with respect to the translation $T \to T'$, T, $T' \in I_0$, where $I_0 = \langle T_0, T_0 + V \rangle$, $V = T_0^{\alpha}$, $0 < \alpha < 7/12$, $\omega_0 = \frac{\pi}{\ln \frac{T_0}{2\pi}}$, $U_2(T_0) = T_0^{5/12} \ln^2 T_0$, $N_0 = \left[\frac{U_2(T_0)}{\omega_0} \right]$.

From (2) by means of an "asymptotic integration" of the continuous function $Z^2(t)$ the new integral mean value theorems for certain class of disconnected sets with a lperiodic distribution of their components are proved.