UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLVI—XLVII—1985

ÜBER DAS VERHALTEN DER LÖSUNGEN DER GLEICHUNG $x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0,\ c(t) \leqq 0$

MILAN GERA, Bratislava

In dieser Arbeit befassen wir uns mit derselben Problematik wie in [1]. Wir leiten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz bzw. Nichtexistenz der oszillatorischen Lösungen der Differentialgleichung

$$Lx = x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$$

ab, mit Rücksicht auf das Verhalten einiger ihrer nichtoszillatorischen Lösungen im Falle, dass $c(t) \leqq 0$ im Intervall $I = (\alpha, +\infty)$, $\alpha \geqq -\infty$ ist. Ausserdem verallgemeinern und ergänzen wir die Resultaten der Arbeiten [2, 3].

Über die Koeffizienten $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ setzen wir voraus, dass sie in I stetige Funktionen sind.

Die Differentialgleichung n-ter Ordnung nennen wir als diskonjugiert im Intervall J, wenn jede ihre nichttriviale Lösung in J höchstens $n-1$ Nullstellen hat, die Vielfachheit inbegriffen.

Die Lösung der erwogenen Differentialgleichung heisst oszillatorisch im Intervall J, wenn der rechte Endpunkt dieses Intervalls ein Häufungspunkt der Nulstellen dieser Lösung ist.

Die Differentialgleichung heisst oszillatorisch im Intervall J, wenn sie wenigstens eine nichttriviale oszillatorische Lösung in J hat. Im entgegengesetzten Fall sagen wir, dass sie in J nichtoszillatorisch ist.

Bezeichnen wir:

$\mathcal{S}^+(J)(\mathcal{S}^-(J))$ bedeutet die Menge der nichtnegativer (nichtpositiver) und stetiger Funktionen im Intervall J;

$\mathcal{S}_0^+(J)(\mathcal{S}_0^-(J))$ bedeutet die Menge der Funktionen aus $\mathcal{S}^+(J)(\mathcal{S}^-(J))$, welche auf keinem Teilintervall des Intervalls J nicht identisch gleich Null sind;

$$E(t, \tau) = \exp \int_\tau^t a(\eta)\, d\eta, \quad (t, \tau) \in I \times I;$$

$$lv \equiv v'' + a(t)v' + b(t)v\,;$$

$$l^+v \equiv v'' + a(t)v' + b_+(t)v\,,$$

wo $b_+(t) = \max\{0, b(t)\}$ für $t \in I$ ist;

$\mathscr{D}(J)$ ist die Menge der diskonjugierten Differentialgleichungen im Intervall J;

$\mathscr{N}(J)$ bezeichnet die Menge der nichtoszillatorischen Differentialgleichungen im Intervall J;

$\mathscr{O}(J)$ ist die Menge der oszillatorischen Differentialgleichungen im Intervall J.

Die Tatsache, dass die Differentialgleichung $lv = 0$ im Intervall J diskonjugiert ist, werden wir mit $l \in \mathscr{D}(J)$ bezeichnen. Ähnlich wird in den übrigen Fällen, z. B. $L \in \mathscr{O}(J)$ ($L \in \mathscr{N}(J)$), bedeuten, dass die Differentialgleichung $Lx = 0$ in J oszillatorisch (nichtoszillatorisch) ist.

Unter einer zur Differentialgleichung $Lx = 0$ adjungierten Differentialgleichung verstehen wir

$$L^*z \equiv [(z' - a(t)z)' + b(t)z]' - c(t)z = 0\,.$$

Es sei $z(t)$ die Lösung der Gleichung $L^*z = 0$ im Intervall I. Dann gilt für $x(t) \in C^3(I)$ [4]:

a)
$$zLx = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(x, z)\,,$$

wobei

$$F(x, z) \equiv zx'' + (a(t)z - z')x' + [b(t)z + (z' - a(t)z)']x$$

b) $x(t)$ ist die Lösung der Gleichung $Lx = 0$ in I dann und nur dann, wenn es die Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, z) = F(x, z)\big|_{t=t_0}$$

in I ist, wo t_0 irgendeine Zahl aus I ist.

Die Differentialgleichung $L^*z = 0$ kann auf das folgende Differentialsystem überführt werden

$$\begin{aligned} z_1' &= a(t)z_1 - z_2\,, \\ z_2' &= b(t)z_1 - z_3, \\ z_3' &= c(t)z_1, \end{aligned} \tag{S*}$$

wo $z_1 = z(t)$, $z_2 = a(t)z(t) - z'(t)$, $(z'(t) - a(t)z(t))' + b(t)z(t) = z_3$ ist.

Ersichtlich gilt: Ist z_1^*, z_2^*, z_3^* irgendeine Lösung des Differentialsystems (S*), dann gilt

$$F(x, z_1^*) = z_1^*x'' + z_2^*x' + z_3^*x\,.$$

1. Hilfsatz 1. Es sei $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^-(I)$. Dann existiert eine solche Lösung z_1^*, z_2^*, z_3^* des Differentialsystems (S*), so dass

$$z_1^*(t) > 0, \quad z_2^*(t) > 0, \quad z_3^*(t) > 0 \quad \text{für alle } t \in I, \qquad \text{(v)}$$
$$z_3^{*\prime}(t) \in \mathscr{S}_0^-(I), \quad \lim_{t \to +\infty} z_3^*(t) = 0$$

gilt. Darüber hinaus haben wir $z_1^{*\prime}(t) < 0$ in I, wenn $a(t) \in \mathscr{S}^-(I)$ erfüllt ist.

Beweis. Es sei $t_0 \in I$. Setzen wir $z_1 = \bar{z}_1 E(t, t_0)$. Dann geht das System (S*) in das System

$$\begin{aligned} \bar{z}_1' &= -z_2 E(t_0, t), \\ z_2' &= b(t) E(t, t_0) \bar{z}_1 - z_3, \\ z_3' &= c(t) E(t, t_0) \bar{z}_1 \end{aligned}$$

über.

Weil $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^-(I)$ ist, so hat dieses System nach Satz 2.1 [5, S. 592] eine Lösung $\bar{z}_1^*$, z_2^*, z_3^* mit der Eigenschaft $\bar{z}_1^*(t) \geqq 0$, $z_2^*(t) \geqq 0$, $z_3^*(t) \geqq 0$, $\bar{z}_1^{*\prime}(t) \leqq 0$, $z_2^{*\prime}(t) \leqq 0$, $z_3^{*\prime}(t) \leqq 0$ für $t \in I$. Aus den gegebenen Tatsachen ist es leicht ersichlich, dass das System (S*) die Lösung z_1^*, z_2^*, z_3^* mit der Eigenschaft (v) hat. Man sieht leicht ein, dass auch $z_1^{*\prime}(t) < 0$ in I gilt, wenn $a(t) \in \mathscr{S}^-(I)$ erfüllt ist.

Hilfssatz 2 [1, 5]. Es sei $l^+ \in \mathscr{D}(I)$. Im Falle, $b(t) \notin \mathscr{S}^-(I)$ es gelte

$$\int_\gamma^{+\infty} E(\gamma, s)\, ds = +\infty \quad (\gamma \in I). \qquad \text{(E)}$$

Dann existiert eine Lösung $v_0(t)$ der Differentialgleichung $lv = 0$ mit der Eigenschaft

$$v_0(t) > 0, \quad v_0'(t) \geqq 0 \quad \text{für } t \in I.$$

Es sei $l \in \mathscr{D}(I)$. Dann hat die Gleichung $lv = 0$ in I die positive Lösung $v_0(t)$ [6] und es gilt

$$lv \equiv \frac{E(t_0, t)}{v_0(t)} \frac{d}{dt} v_0^2(t) E(t, t_0) \frac{d}{dt} \frac{v}{v_0(t)}$$

für $t \in I$ $(t_0 \in I)$.

Aufgrund dessen ist es möglich die Differentialgleichung $Lx = 0$ $(Lx \equiv lx' + c(t)x)$ auf folgendes Differentialsystem zu überführen

$$\begin{aligned} x_1' &= v_0(t) x_2, \\ x_2' &= v_0^{-2}(t) E(t_0, t) x_3, \\ x_3' &= -c(t) E(t, t_0) v_0(t) x_1, \end{aligned} \qquad \text{(S)}$$

wo $x_1(t)=x(t)$, $x'(t)=v_0(t)x_2(t)$, $x''(t)=(x_3(t)E(t_0, t)+v_0'(t)x'(t))/v_0(t)$ für $t\in I$ ist. Dabei kann man annehmen, wenn die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt sind, dass $v_0'(t)\geqq 0$ in I ist.

Aus diesen Tatsachen, oder nach durchführen der Transformation der unabhängig Veränderlichen im System (S), $t=-\tau$ und bei Verwendung der Ergebnisse aus dem Kapitel XIV [5, S. 591—596] erhalten wir den

Hilfssatz 3. Es sei $l\in\mathscr{D}(I)$, $c(t)\in\mathscr{S}_0^-(I)$. Die Lösung $x_0(t)$ der Differentialgleichung $Lx=0$, die in der Zahl $t_0\in I$ den Anfangsbedingungen

$$x_0(t_0)=x_0\geqq 0,\ x'(t_0)=0,\ x_0''(t_0)=x_0''\geqq 0;\ x_0+x_0''>0$$

entspricht, hat im Intervall $(t_0, +\infty)$ die folgenden Eigenschaften

$$x_0(t)>0,\ x_0'(t)>0\,.$$

Satz 1. Es sei $l\in\mathscr{D}(I)$ und $c(t)\mathscr{S}_0^-(I)$. Dann existiert eine Lösung $w(t)$ der Differentialgleichung $Lx=0$ mit der Eigenschaft

$$w(t)w'(t)>0 \text{ für } t\in I\,.$$

Satz 1'. Es sei $l^+\in\mathscr{D}(I)$, $c(t)\in\mathscr{S}_0^-(I)$. Im Falle, $b(t)\notin\mathscr{S}^-(I)$ es gelte (E). Dann existiert eine Lösung $w(t)$ der Differentialgleichung $Lx=0$ mit der Eigenschaft

$$w(t)w'(t)>0,\ w'(t)w''(t)>0 \text{ für } t\in I\,.$$

Hilfssatz 3' [7]. Es sei $b(t)\in\mathscr{S}^-(I)$ und $c(t)\in\mathscr{S}_0^-(I)$. Für die Lösung $x_0(t)$ der Differentialgleichung $Lx=0$, welche in der Zahl $t_0\in I$ den Anfangsbedingungen

$$x_0(t_0)=x_0\geqq 0,\ x_0'(t_0)=x_0'\geqq 0,\ x_0''(t_0)=x_0''\geqq 0;$$
$$x_0+x_0'+x_0''>0$$

entspricht, gilt dann im Intervall $(t_0, +\infty)$

$$x_0(t)>0,\ x_0'(t)>0,\ x_0''(t)>0\,.$$

Hilfssatz 4. Es sei $[T_1, T_2]\subset I$. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung $lv=0$ hat eine nichttriviale Lösung mit zwei Nullstellen in $[T_1, T_2]$ dann und nur dann, wenn eine Funktion $y(t)\in C^2([T_1, T_2])$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

1) es gibt Zahlen t_1, t_2, $T_1\leqq t_1<t_2\leqq T_2$ derart, dass

$$y(t_1)=y(t_2)= \text{ und } y'(t_2)\leqq 0 \text{ ist.}$$

2) $y(t)\not\equiv 0$, $ly\geqq 0$ in $[t_1, t_2]$ gilt.

Dieser Hilfssatz folgt aus dem Hilfssatz 5.1 [6] für $n=2$.

Hilfssatz 5. Es sei $l \in \mathscr{D}(I)$ und $c(t) \in \mathscr{S}_0^-(I)$. Wenn $u(t)$ eine solche Lösung der Gleichung $Lx=0$ ist, dass ihre Ableitung $u'(t)$ im beliebigen Interval $[t_0, \infty) \subset I$ unedlich viele Nullstellen hat, dann ist die Lösung $u(t)$ in I oszillatorisch.

Beweis. Es sei $u(t)$ eine nichtoszillatorische Lösung der Gleichung $Lx=0$ in I. Dann existiert eine solche Zahl $T_0 \geqq t_0$, dass $u(t) \neq 0$ für $t \geqq T_0$ ist. Zur Gewissheit sei $u(t)>0$ in $[T_0, +\infty)$. Angenommen, dass $u'(t)$ unendlich viele Nullstellen in $[T_0, +\infty)$ besitzt. Setzen wir $u'(t)=y(t)$. Dann existiert ein solches Zahlenpaar t_1, t_2; $t_2>t_1 \geqq T_0$, dass $y(t_1)=y(t_2)=0$ und $y'(t_2) \leqq 0$ ist. Mit Rücksicht darauf, dass $c(t) \in \mathscr{S}_0^-(I)$ ist, aus der Gleichung $Lu=0$, erhalten wir

$$ly = -c(t)u(t) \in \mathscr{S}_0^+([T_0, +\infty))$$

und also $ly \geqq 0$ $(y(t) \not\equiv 0)$ in $[t_1, t_2]$ ist. Gemäss Hilfssatz 4 hat also die Gleichung $lv=0$ eine Lösung mit zwei Nullstellen in $[T_0, +\infty)$. Dies ist aber im Widerspruch mit der Voraussetzung $l \in \mathscr{D}(I)$. Dieser Widerspruch beweist, dass die Lösung $u(t)$ der Gleichung $Lx=0$ in I oszillatorisch ist, wenn ihre Ableitung unendlich viele Nullstellen in einem beliebigen Intervall $[t_0, +\infty) \subset I$ hat.

Hilfssatz 6. Es sei $l \in \mathscr{D}(I)$ und $c(t) \in \mathscr{S}_0^-(I)$. Wenn $u(t)$ eine nichtoszillatorische Lösung der Differentialgleichung $Lx=0$ in I ist, dann existiert eine solche Zahl $\tau \in I$, dass entweder

(i) $$u(t)u'(t)>0 \text{ für } t>\tau$$

oder

(ii) $$u(t)u'(t)<0 \text{ für } t>\tau$$

gilt. Wenn dabei

j) $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$ und (i) erfüllt ist, dann existiert eine solche Zahl $\bar{\tau} \geqq \tau$ derart, dass $u''(t) \neq 0$ für $t>\bar{\tau}$ ist;

jj) $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$ und (ii) gilt, dann existiert eine Zahl $\bar{\tau} \geqq \tau$ derart, dass $u(t)u''(t)>0$ für $t>\bar{\tau}$ ist.

Beweis. Es sei $u(t)$ eine nichtoszillatorische Lösung der Gleichung $Lx=0$ im Intervall I. Das heisst, dass eine solche Zahl $t_0 \in I$ existiert, dass $u(t) \neq 0$ für $t>t_0$ ist. Ohne Verlust an der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass $u(t)>0$ in $(t_0, +\infty)$ ist. Weil $l \in \mathscr{D}(I)$ und $c(t) \in \mathscr{S}_0^-(I)$ ist, hat $u'(t)$ aufgrund des Hilfssatzes 5 eine endliche Anzahl von Nullstellen in einem Intervall $(\bar{t}_0, +\infty)$, $\bar{t}_0 \geqq t_0$. Also existiert eine solche Zahl $\tau \geqq \bar{t}_0$, dass $u'(t) \neq 0$ in $(\tau, +\infty)$ ist.

Es sei jetzt $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$ und (i) gilt, oder $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$ und (ii) gilt. Dann erhalten wir aus der Gleichung $Lu=0$

$$(u''(t)E(t, \tau))' =$$
$$= -[b(t)u'(t) + c(t)u(t)]E(t, \tau) \in \mathscr{S}_0^+((\tau, +\infty)) .$$

Das heisst, dass die Funktion $u''(t)E(t, \tau)$ in $(\tau, +\infty)$ eine wachsende Funktion ist. Deshalb existiert eine solche Zahl $\bar{\tau} \geqq \tau$ dass $u''(t) \neq 0$ in $(\bar{\tau}, +\infty)$ ist. Wir zeigen, dass im Falle jj) $u(t)u''(t) > 0$ für $t > \bar{\tau}$ ist, d.h. $u''(t) > 0$ in $(\bar{\tau}, +\infty)$ ist. Indirekt. Es sei $u''(t) < 0$ in $(\bar{\tau}, +\infty)$. Dann erhalten wir mit Rücksicht darauf, dass $u'(t) < 0$ für $t > \tau$ ist, dass $\lim_{t \to +\infty} u(t) = -\infty$ erfüllt ist. Das steht aber im Widerspruch $u(t) > 0$ in $(t_0, +\infty)$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Satz 2. Es sei $t_0 \in I$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für $L \in \mathscr{D}([t_0, +\infty))$ ist, dass Funktionen $w_1(t)$ und $w_2(t)$ aus $C^3((t_0, +\infty))$ mit den Eigenschaften

$$w_1(t) > 0, \quad w_2(t) > 0; \quad Lw_1 \leqq 0, \quad Lw_2 \geqq 0 \quad \text{für } t > t_0$$

existieren und zwar solche, dass die Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$F(w_1, z) = 0, \quad F(w_2, z) = 0$$

in $(t_0, +\infty)$ diskonjugiert sind.

Folgerung 1. Es sei $t_0 \in I$ und $c(t) \in \mathscr{S}^-([t_0, +\infty))$. Wenn eine Funktion $w(t) \in C^3((t_0, +\infty))$ existiert mit der Eigenschaft $w(t) > 0$, $w'(t) < 0$, $Lw \geqq 0$ für $t > t_0$, dann ist $L \in \mathscr{D}([t_0, +\infty))$.

Der Satz 2 und seine Folgerung 1 sind in [8] bewiesen.

Folgerung 2. Es sei $t_0 \in I$ und $b(t)$, $c(t)$ seien aus $\mathscr{S}^-([t_0, +\infty))$. Wenn die Funktion $w(t) \in C^3((t_0, +\infty))$ derart existiert, dass $w(t) > 0$, $w''(t) \leqq 0$, $Lw \geqq 0$ für $t > t_0$ ist, dann ist $L \in \mathscr{D}([t_0, +\infty))$.

Beweis. Setzen wir $w_1(t) = 1$, $w_2(t) = w(t)$ für $t > t_0$. Dann ist $Lw_1 = c(t) \leqq 0$ und $Lw_2 \geqq 0$ in $(t_0, +\infty)$. Zeigen wir, dass die Differentialgleichungen $F(w_1, z) = 0$, $F(w_2, z) = 0$ in $(t_0, +\infty)$ diskonjugiert sind.

Zu diesem Zweck setzen wir

$$z = vE(t, t_0) .$$

Die Differentialgleichungen $F(w_1, z) = 0$, $F(w_2, z) = 0$ transformieren sich dann in die Differentialgleichungen

$$v'' + a(t)v' + b(t)v = 0 , \tag{1}$$

$$v'' + \left(a(t) - \frac{w_2'(t)}{w_2(t)}\right)v' + \left(\frac{w_2''(t)}{w_2(t)} + b(t)\right)v = 0 \quad (t > t_0) . \tag{2}$$

Da $b(t) \in \mathscr{S}^-([t_0, +\infty))$ und $w_2''(t) \leqq 0$ für $t > t_0$ ist, sind die Differentialgleichungen (1), (2) in $(t_0, +\infty)$ diskonjugiert ([8]). Aus dem Zusammenhang zwischen den Lösungen, der Differentialgleichungen (1), (2) und $F(w_1, z) = 0$, $F(w_2, z) = 0$, folgt, dass auch die Differentialgleichungen $F(w_1, z) = 0$, $F(w_2, z) = 0$ in $(t_0, +\infty)$ diskonjugiert sind. Aus diesen Tatsachen, erhalten wir aufgrund des Satzes 2, dass $L \in \mathscr{D}([t_0, +\infty))$ ist.

2. In diesem Teil wird z_1^*, z_2^*, z_3^* die Lösung des Systems (S*) mit der Eigenschaft (v) bedeuten, deren Existenz durch den Hilfssatz 1 gesichert ist.

Satz 3. Es sei $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$ und $c(t) \in \mathcal{S}_0^-(I)$. $L \in \mathcal{O}(I)$ ist dann und nur dann, wenn die Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(x, z_1^*) = 0$ in I oszillatorisch ist.

Beweis. a) Es sei $L \in \mathcal{O}(I)$ und die Differentialgleichung $F(x, z_1^*) = 0$ sei nichtoszillatorisch in I. Dann existiert eine solche Lösung $x^*(t)$ der Gleichung $F(x, z_1^*) = 0$ und die Zahl $t^* \in I$, dass $x^*(t) > 0$ in $(t^*, +\infty)$ ist. Aus diesem Grund ist die Gleichung $F(x, z_1^*) = 0$ diskonjugiert in $(t^*, +\infty)$ ([6] oder [8]). Aufgrund des Satzes 1 [4] ist deshalb $L \in \mathcal{D}([t^*, +\infty))$. Dies ist aber im Widerspruch mit der Voraussetzung $L \in \mathcal{O}(I)$. Also ist die Gleichung $F(x, z_1^*) = 0$ in I oszillatorisch.

b) Die Gleichung $F(x, z_1^*) = 0$ sei in I oszillatorisch. Da jede Lösung der Gleichung $F(x, z_1^*) = 0$ auch die Lösung desr Gleichung $Lx = 0$ ist, ist $L \in \mathcal{O}(I)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Es sei

$$\varepsilon_0 = \{x(t) \in C^2(I) \mid F(x, z_1^*) = 0 \text{ in } I\} .$$

Dann bildet ε_0 einen linearen zweidimensionalen Unterraum der Lösungen der Gleichung $Lx = 0$ in I.

Mit Rücksicht auf diese Tatsache und auf die Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus dem Satz 3 erhalten wir den

Satz 3'. Es sei $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathcal{S}_0^-(I)$ und $L \in \mathcal{O}(I)$. Dann existiert ein linearer zweidimensionaler Unterraum ε_0 der sämtlichen oszillatorischen Lösungen der Gleichung $Lx = 0$. Dabei teilen sich zwei lineare unabhängige Lösungen aus ε_0 gegenseitig die Nullstellen in I ab.

Satz 4. Es sei $l \in \mathcal{D}(I)$ und $c(t) \in \mathcal{S}_0^-(I)$. Wenn $L \in \mathcal{O}(I)$ ist, dann existiert für jede nichtoszillatorische Lösung $u(t)$ der Differentialgleichung $Lx = 0$ eine solche Zahl $\tau \in I$, dass

$$u(t)u'(t) > 0 \quad \text{für alle} \quad t > \tau \tag{3}$$

gilt.

Beweis. Gemäss Hilfssatz 6 existiert für jede nichtoszillatorische Lösung $u(t)$ der Gleichung $Lx = 0$ eine solche Zahl $\tau \in I$, dass entweder

(i) $$u(t)u'(t) > 0 \quad \text{für alle} \quad t > \tau$$

oder

(ii) $$u(t)u'(t) < 0 \quad \text{für alle} \quad t > \tau$$

gilt. Es gelte (ii). Dann ist nach der Folgerung 1 des Satzes 2 $L \in \mathcal{D}([\tau, +\infty))$, dies aber steht im Widerspruch zu der Tatsache, dass $L \in \mathcal{O}(I)$ ist. Es kann also nur der Fall (i) entstehen.

Bemerkung 1. Die Bedingung (3) im Satz 4 ist nur eine notwendige Bedingung für $L \in \mathcal{O}(I)$ aber keine hinreichende. Davon zeugt das folgende Beispiel der diskonjugierten Differentialgleichung

$$x''' - 9x'' + 20x' - 12x = 0 \quad (t \in I),$$

deren allgemeine Lösung

$$x(t) = k_1 e^t + k_2 e^{2t} + k_3 e^{6t}$$

ist, wobei k_1, k_2, k_3 irgendwelche Konstanten sind.

Für jede ihrer Lösung $x(t)$ existieren solche $\tau \in I$, dass

$$x(t)x'(t) > 0, \quad x'(t)x''(t) > 0 \quad \text{für } t > \tau .$$

Es gilt aber der folgende

Satz 5. Es sei $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$ und $c(t) \in \mathcal{S}_0^-(I)$. Die notwendige und hinreichende Bedingung für $L \in \mathcal{O}(I)$ ist dann, dass für jede nichtoszillatorische Lösung $u(t)$ der Gleichung $Lx = 0$ eine solche Zahl $\tau \in I$ existiere, dass

$$u(t)u'(t) > 0, \quad u'(t)u''(t) > 0 \quad \text{für alle } t > \tau \tag{4}$$

gilt.

Beweis. Die notwendige Bedingung. Es sei $L \in \mathcal{O}(I)$ und $u(t)$ sei irgendeine nicht-oszillatorische Lösung der Gleichung $Lx = 0$. Weil $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$ und $c(t) \in \mathcal{S}_0^-(I)$ ist, existiert gemäss Satz 4 und Hilfssatz 6 eine solche Zahl $\tau \in I$, dass $u(t)u'(t) > 0$, $u''(t) \neq 0$ für $t > \tau$ ist. Ohne Verlust an der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass $u(t) > 0$, in $(\tau, +\infty)$ ist. Wir zeigen, dass dann $u''(t) > 0$ für $t > \tau$ ist. Es sei $u''(t) < 0$ in $(\tau, +\infty)$. Aufgrund der Folgerung 2 des Satzes 2 ist dann $L \in \mathcal{D}([\tau, +\infty))$, das steht aber im Widerspruch damit, dass $L \in \mathcal{O}(I)$. Also ist $u''(t) > 0$ für alle $t > \tau$.

Hinreichende Bedingung. Es existiere für jede nichtoszillatorische Lösung $u(t)$ der Gleichung $Lx = 0$ eine solche Zahl $\tau \in I$, dass (4) gelte. Wir zeigen, dass dann $L \in \mathcal{O}(I)$ ist. Tatsächlich, ist jede Lösung der Gleichung $Lx = 0$ in I auch die Lösung der Gleichung zweiter Ordnung

$$F(x, z_1^*) \equiv x'' z_1^* + z_2^* x' + z_3^* x = F(x, z_1^*)\big|_{t=t_0}$$

und umgekehrt, wo bei t_0 irgendeine Zahl aus I ist. Da für eine beliebige nichtoszillatorische Lösung $u(t)$ der Gleichung $Lx = 0$ $F(u, z_1^*) \neq 0$ für alle $t > \tau$ ist, ist $F(u, z_1^*) \neq 0$ für alle $t \in I$. Aus dieser Tatsache folgt, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(x, z_1^*) = 0$ oszillatorisch in I ist. Aufgrund des Satzes 3 ist deshalb $L \in \mathcal{O}(I)$.

Aus diesem Satz und aus dem Hilfssatz 6 folgt:

Folgerung. Es sei $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathcal{S}_0^-(I)$. $L \in \mathcal{N}(I)$ ist dann und nur dann, wenn eine solche Lösung $w(t)$ der Differentialgleichung $Lx=0$ und eine solche Zahl $\tau \in I$ existiert, dass entweder

(j) $$w(t)w'(t)<0 \text{ für alle } t>\tau$$

oder

(jj) $$w(t)w'(t)>0, \quad w(t)w''(t)<0 \text{ für alle } t>\tau$$

gilt.

Aus dieser Folgerung und aus den Folgerungen 1, 2 des Satzes 2 erhalten wir den folgenden

Satz 5'. Es sei $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$ und $c(t) \in \mathcal{S}_0^-(I)$. Es ist $L \in \mathcal{N}(I)$ dann und nur dann, wenn eine solche Funktion $w(t) \in C^3((\tau, +\infty))$ für irgendein $\tau \in I$ existiert, dass entweder

1) $$w(t)>0, \quad w'(t)<0, \quad Lw \geqq 0 \text{ für alle } t>\tau$$

gilt, oder es gilt

2) $$w(t)>0, \quad w''(t) \leqq 0, \quad Lw \geqq 0 \text{ für alle } t>\tau .$$

Bemerkung 2. Aus dem Satz 5 geht hervor, dass es im Satz 1 aus [2] nicht notwendig ist vorauszusetzen, dass $a(t) \in \mathcal{S}^-(I)$ ist.

Bemerkung 3. Wenn $l \in \mathcal{D}(I)$, $c(t) \in \mathcal{S}_0^-(I)$ und $L \in \mathcal{O}(I)$ ist, dann sind alle Nullstellen der beliebigen oszillatorischen Lösung der Gleichung $Lx=0$ einfach (Hilfssatz 3).

Hilfssatz 7. Es sei $a(t) \in \mathcal{S}^-(I)$, $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathcal{S}_0^-(I)$ und es sei $L \in \mathcal{O}(I)$. Es sei $t_0 \in I$ und $x(t)$ ist eine solche oszillatorische Lösung der Gleichung $Lx=0$, dass $F(x, z_1^*)|_{t=t_0} = \lambda \geqq 0$. Wenn $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine wachsende Folge von Nullstellen $x'(t)$ mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$, $x(t_n)>0$ für $n=1, 2, \ldots$, ist, dann

$$\lim_{n\to\infty} z_3^*(t_n)x(t_n) = 2\lambda .$$

Beweis. Erwägen wir die Funktion

$$H(t) = z_3^*(t)x^2(t) + z_1^*(t)x'^2(t) - 2\lambda x(t), \quad t \in I .$$

Dann ist

$$H'(t) = z_3^{*\prime}(t)x^2(t) + 2x(t)x'(t)z_3^*(t) + 2x'(t)x''(t)z_1^*(t) + \\ + x'^2(t)z_1^{*\prime}(t) - 2\lambda x'(t), \, t \in I .$$

Weil $x(t)$ auch die Lösung der Gleichung

$$z_1^*(t)x'' + z_2^*(t)x' + z_3^*(t)x = \lambda$$

ist, haben wir für $H'(t)$

$$H'(t) = z_3^{*\prime}(t)x^2(t) + x'^2(t)[z_1^{*\prime}(t) - 2z_2^*(t)] .$$

Mit Rücksicht darauf, dass z_1^*, z_2^*, z_3^* die Eigenschaft (v) hat, folgt daraus $H'(t) \in \mathscr{S}_0^-(I)$ (siehe Hilfssatz 1, $a(t) \in \mathscr{S}^-(I)$).

Es sei $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine wachsende Folge von Nullstellen $x(t)$. Dann ist $H(\tau_n) = z_1^*(\tau_n)x'^2(\tau_n) > 0$ für $n = 1, 2, \ldots$ (siehe Bemerkung 3). Aus diesen Tatsachen folgt, dass $H(t)$ eine positive und abnehmende Funktion in I ist. Es existiert deshalb $K > 0$, derart, dass $H(t) < K$ für $t \geqq t_1$ ist. Aus diesem Grunde ist $z_3^*(t_n)K > z_3^*(t_n)H(t_n) = z_3^{*2}(t_n)x^2(t_n) - 2\lambda z_3^*(t_n)x(t_n) = z_3^*(t_n)x(t_n)[z_3^*(t_n)x(t_n) - 2\lambda] > 0$ für $n = 1, 2, \ldots$. Daraus erhalten wir mit Rücksicht darauf, dass $\lim\limits_{t \to +\infty} z_3^*(t) = 0$ ist,

$$\lim_{n \to +\infty} z_3^*(t_n)x(t_n)[z_3^*(t_n)x(t_n) - 2\lambda] = 0 .$$

Weil $z_3^*(t_n)x(t_n) > 2\lambda$ für $n = 1, 2, \ldots$ ist, ist

$$\lim_{n \to +\infty} z_3^*(t_n)x(t_n) = 2\lambda .$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Folgerung. Seien $a(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^-(I)$ und es sei $L \in \mathcal{O}(I)$. Dann gilt für jede Lösung $\bar{x}(t)$ der Gleichung $F(x, z_1^*) = 0$ (d.h. $\bar{x}(t) \in \varepsilon_0$)

$$\lim_{t \to +\infty} z_3^*(t)\bar{x}(t) = 0$$

Satz 6. Seien $a(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^-(I)$ und $L \in \mathcal{O}(I)$. Dann existiert ein linearer zweidimensionaler Unterraum der oszillatorichen Lösungen ε_0 der Gleichung $Lx = 0$ derart, dass

a) zwei beliebige linear unabhängige Lösungen aus ε_0 sich gegenseitig die Nullstellen abteilen,

b) die Lösung der Gleichung $Lx = 0$ dann und nur dann oszillatorisch ist, wenn sie aus dem Unterraum ε_0 ist,

c) für die Lösung $u(t) \notin \varepsilon_0$ der Gleichung $Lx = 0$

$$\lim_{t \to +\infty} |u(t)| = \lim_{t \to +\infty} |u'(t)| = +\infty$$

gilt.

Beweis. Mit Rücksicht auf den Satz 3' ist es notwendig nur die Behauptung c) und einen Teil der Behauptung b) zu beweisen und zwar: wenn $x(t)$ eine oszillatorische Lösung der Gleichung $Lx = 0$, dass dann $x(t) \in \varepsilon_0$ ist, d.h. $x(t)$ ist die Lösung der Gleichung $F(x, z_1^*) = 0$.

Es sei $x(t)$ die oszillatorische Lösung der Gleichung $Lx=0$ und es sei $x(t) \notin \varepsilon_0$ d.h. $x(t)$ ist die Lösung der Gleichung

$$F(x, z_1^*) = \lambda \tag{5}$$

wo $\lambda = F(x, z_1^*)|_{t=t_0}$, $t_0 \in I$ und $\lambda \neq 0$ ist. Ohne Verlust der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass $\lambda > 0$ ist. Es sei $w(t)$ die Lösung der Gleichung $Lx=0$ mit der Eigenschaft $w(t)>0$, $w'(t)>0$, $w''(t)>0$ für $t \in I$ deren Existenz durch den Satz 1′ gesichert ist. Dann enspricht $w(t)$ der Gleichung $F(x, z_1^*) = F(w, z_1^*)|_{t=t_0} = \mu > 0$, d. h. es gilt

$$z_1^*(t)w''(t) + z_2^*(t)w'(t) + z_3^*(t)w(t) = \mu \quad (t \in I)\,. \tag{5'}$$

Setzen wir $\bar{w}(t) = (\lambda/\mu)w(t)$. Dann entspricht $\bar{w}(t)$ der Gleichung (5). Da auch $x(t)$ die Lösung der Gleichung (5) ist, existiert die Lösung $\bar{x}(t)$ der Gleichung $F(x, z_1^*) = 0$ derart, dass für $t \in I$ $x(t) = \bar{w}(t) + \bar{x}(t)$ gilt. Nach der Folgerung des Hilfssatzes 7 gilt für die Lösung $\bar{x}(t)$ $\lim\limits_{t \to +\infty} z_3^*(t)\bar{x}(t) = 0$. Mit Rücksicht darauf, dass jedes Gleid in (5′) positiv ist, ist $\mu > z_3^*(t)w(t)$ und also ist $z_3^*(t)\bar{w}(t) < \lambda$ für $t \in I$. Es sei jetzt $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine steigende Folge der Nullstellen $x'(t)$, so dass $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = +\infty$ und $x(t_n) > 0$ für $n = 1, 2, \ldots$ ist. Laut Hilfssatz 7 ist $\lim\limits_{n \to +\infty} z_3^*(t_n)x(t_n) = 2\lambda$. Von anderer Seite aber haben wir

$$\lim_{n \to +\infty} z_3^*(t_n)x(t_n) = \lim_{n \to +\infty} z_3^*(t_n)[\bar{w}(t_n) + \bar{x}(t_n)] = \lim_{n \to +\infty} z_3^*(t_n)\bar{w}(t_n) \leqq \lambda\,,$$

da $\lim\limits_{n \to +\infty} z_3^*(t_n)\bar{x}(t_n) = 0$ und $z_3^*(t_n)\bar{w}(t_n) < \lambda, n = 1, 2, \ldots$. Dadurch erhielten wir, dass $2\lambda \leqq \lambda$ ist d.h. $\lambda \leqq 0$, was damit im Widerspruch steht, dass λ positiv war. Dieser Widerspruch beweist, dass jede oszillatorische Lösung der Gleichung $Lx=0$ eine Lösung der Gleichung $F(x, z_1^*) = 0$ ist, d.h. es ist aus ε_0.

Es muss noch folgendes gezeigt werden: wenn die Lösung $u(t)$ der Gleichung $Lx=0$ der Gleichung $F(x, z_1^*) = 0$ nicht genügt, d.h. $u(t) \notin \varepsilon_0$, dann gilt

$$\lim_{t \to +\infty} |u(t)| = \lim_{t \to +\infty} |u'(t)| = +\infty\,.$$

Weil $u(t) \notin \varepsilon_0$ ist, dann ist $u(t)$ nach dem oben bewiesenen eine nichtoszillatorische Lösung der Gleichung $Lx=0$ in I. Mit Rücksicht darauf, dass $L \in \mathcal{O}(I)$ ist, existiert laut Satz 5 eine solche Zahl $\tau \in I$, dass $u(t)u'(t) > 0$, $u'(t)u''(t) > 0$ für $t > \tau$ ist. Wegen der Bestimmtheit sei $u(t) > 0$ in $(\tau, +\infty)$. Ersichtlich ist $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$. Weiter erhalten wir aus der Gleichheit $Lu = 0$

$$(u''(t)E(t, \tau_1))' = -b(t)E(t, \tau_1)u'(t) - c(t)E(t, \tau_1)u(t) \in \mathcal{S}_0^+([\tau_1, +\infty))$$

für $\tau_1 > \tau$. Daraus folgt

$$u''(t) > u''(\tau_1)E(\tau_1, t)$$

und

$$u'(t) > u'(\tau_1) + u''(\tau_1)\int_{\tau_1}^{t} E(\tau_1, s)\,ds \quad \text{für alle } t > \tau_1 .$$

Weil $a(t) \in \mathscr{S}^-(I)$ ist, gilt

$$\int_{\tau_1}^{+\infty} E(\tau_1, s)\,ds = +\infty$$

und also

$$\lim_{t\to+\infty} u'(t) = +\infty$$

ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 4. Der Satz 6 gibt eine positive Antwort auf das Problem, das in der Arbeit [2] vorgelegt wurde, und gleichzeitig verallgemeinert den Satz 1 aus [3].

Hilfssatz 8. Seien $t_0 \in I$, $c(t) < 0$ in I, $c(t)E(t, t_0) \in C^2(I)$ und es sei

$$\frac{2b(t)}{c(t)} - \left(\frac{c'(t) + a(t)c(t)}{c^2(t)}\right)' \geqq 0 \quad \text{für alle } t \in I . \tag{6}$$

Wenn $L \in \mathscr{O}(I))$ gilt, dann bilden die lokalen Maxima und Minima im absoluten Wert, beliebiger oszillatorischer Lösung der Gleichung $Lx = 0$ eine nichtwachsende Folge.

Beweis. Für die beliebige Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $Lx = 0$ gilt die Identität

$$V[t, x(t)] \equiv x^2(t) + \frac{2x'(t)x''(t)}{c(t)} + x'^2(t)\,\frac{a(t)c(t) + c'(t)}{c^2(t)} =$$

$$= V[t_0, x(t_0)] + 2\int_{t_0}^{t} \frac{x''^2(s)}{c(s)}\,ds - \int_{t_0}^{t} \left[\frac{2b(s)}{c(s)} - \left(\frac{c'(s) + a(s)c(s)}{c^2(s)}\right)'\right] x'^2(s)\,ds$$

für $t \in I$. Über die Richtigkeit dieser Identität können wir uns durch Ableitung überzeugen. Aus den Voraussetzungen des Hilfssatzes folgt, dass $(V[t, x(t)])' \leqq 0$ für $t \in I$ ist. Das heisst, dass die Funktion $V[t, x(t)]$ in I nichtsteigend ist. Wenn $L \in \mathscr{O}(I)$ und $x(t)$ eine oszillatorische Lösung in I ist, welche in der Zahl $\tau \in I$ ein lokales Maximum, bzw. ein lokales Minimum hat, dann ist $x'(\tau) = 0$ und $V[\tau, x(\tau)] = x^2(\tau)$. Aus diesen Tatsachen folgt, dass die lokalen Maxima und Minima der Funktion $x^2(t)$ und also auch $|x(t)|$ eine nichtwachsende Folge bilden.

Folgerung. Wenn die Voraussetzungen des Hilfssatzes 8 erfüllt sind und

$L \in \mathcal{O}(I)$ ist, dann ist jede oszillatorische Lösung der Gleichung $Lx = 0$ im Intervall $[t_0, +\infty)$ begrenzt.

Satz 7. Seien $t_0 \in I$, $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$, $c(t) < 0$ in I, $c(t)E(t, t_0) \in C^2(I)$ und es gelte (6). Wenn $L \in \mathcal{O}(I)$ ist, dann existieren zwei linear unabhängige oszillatorische Lösungen der Gleichung $Lx = 0$ derart, dass die Lösung der Gleichung $Lx = 0$ dann und nur dann oszillatorisch ist, wenn sie deren lineare Kombination ist. Die Nullstellen zweier beliebiger linear unabhängiger oszillatorischer Lösungen der Gleichung $Lx = 0$ teilen sich dabei gegenseitig in I ab.

Beweis. Aus dem Satz 3′ folgt die Existenz zweier linear unabhängiger oszillatorischer Lösungen $x_1(t)$, $x_2(t)$ der Gleichung $Lx = 0$ derart, dass jede ihre lineare Kombination eine oszillatorische Lösung der Gleichung $Lx = 0$ in I ist. Die Nullstellen beliebiger zweier oszillatorischer linear unabhängiger Lösungen, welche eine Kombination von $x_1(t)$, $x_2(t)$ sind, teilen sich dabei gegenseitig ab.

Es bleibt noch zu zeigen, dass wenn $u(t)$ die Lösung der Gleichung $Lx = 0$ ist, welche keine lineare Kombination von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ist, dass dann $u(t)$ eine nichtoszillatorische Lösung in I ist. Es sei $x_0(t)$ eine nichtoszillatorische Lösung der Gleichung $Lx = 0$ mit der Eigenschaft $x_0(t) > 0$, $x_0'(t) > 0$, $x_0''(t) > 0$ für $t > t_0$ (die Existenz wenigstens einer solcher Lösung bestimmt der Hilfssatz 3′). Ersichtlich gilt dabei

$$\lim_{t \to +\infty} x_0(t) = +\infty .$$

Weil $x_1(t)$, $x_2(t)$ oszillatorische Lösungen der Gleichung $Lx = 0$ sind, sind sie gemäss Hilfssatz 8 in $[t_0, +\infty)$ begrenzt. Aus diesem Grund bilden $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_0(t)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $Lx = 0$. Also existieren solche Konstanten k_0, k_1, k_2, dass

$$u(t) = k_0 x_0(t) + k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$$

und $k_0 \neq 0$ ist. Mit Rücksicht darauf, dass die Funktion $k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$ in $[t_0, +\infty)$ begrenzt ist, ist

$$\lim_{t \to +\infty} |u(t)| = \lim_{t \to +\infty} |k_0| \, x_0(t) = +\infty .$$

Damit wurde gezeigt, dass $u(t)$ eine nichtoszillatorische Lösung der Gleichung $Lx = 0$ im Intervall I ist.

Folgerung. Es seien die Voraussetzungen des Satzes 7 erfüllt und es sei $L \in \mathcal{O}(I)$. Dann ist die Lösung der Gleichung $Lx = 0$ in I dann und nur dann oszillatorisch in I wenn sie in $[t_0, +\infty)$ begrenzt ist.

LITERATUR

[1] Gera, M.: Über einige Eigenschaften der Lösungen der Gleichung $x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, $c(t) \geqq 0$. Mat. Čas. 24, 1974, No 4, 357—370.

[2] Ahmad, S.—Lazer, A. C.: On the oscillatory behavior of a class of linear third order differential equations. J. Math. Anal. and Appl. 28, No 3, 1969, 681—689.

[3] Jones, G. D.: Properties of solutions of a class of third order differential equations. J. Math. Anal. Appl. 48, No 1, 1974, 165—169.

[4] Gera, M.: Allgemeine Bedingungen der Nicht-oszillationsfähigkeit und der Oszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$. Mat. Čas. 20, 1970, No 1, 49—61.

[5] Hartman, F.: Obyknovennyje differenciaľnyje uravnenija, Moskva 1970, perevod s anglijskovo.

[6] Levin, A. Ju.: Neoscilacija rešenij uravnenija $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0$, Uspechi matem. nauk, T. XXIV, 2 146, 1969, 43—96.

[7] Gera, M.: Bedingungen der Nichtoszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$, Acta F.R.N. Univ. Comen. — Mathematica, XXIII, 1969, 13—34.

[8] Gera, M.: Nichtoszillatorische und oszillatorische Differentialgleichungen dritter Ordnung, Čas. pěst. Mat. 96, 1971, 278—293.

Received: 13. 6. 1983

Author's address:
Milan Gera
Katedra matematickej analýzy MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

SÚHRN

O SPRÁVANÍ SA RIEŠENÍ ROVNICE $x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, $c(t) \leqq 0$

Milan Gera, Bratislava

V tejto práci je skúmaná tá istá problematika ako v [1]. Sú odvodené nutné a postačujúce podmienky pre existenciu (neexistenciu) oscilatorických riešení lineárnej diferenciálnej rovnice

$$x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \tag{L}$$

na intervale $(\alpha, +\infty)(c(t) \leqq 0)$ vzhľadom na chovanie sa jej neoscilatorických riešení pre $t \to +\infty$. Okrem toho, v prípade, že (L) je oscilatorická v $(\alpha, +\infty)$, je ukázaná existencia dvojdimenziálneho podpriestoru oscilatorických riešení rovnice (L).

РЕЗЮМЕ

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0,\ c(t) \leqq 0$

Милан Гера, Братислава

В этой статье исследуется та же проблематика как в [1]. Приведенны условия, необходимые и достаточные, для существования (несуществования) колебательных решений линейного дифференциального уравнения

$$x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \tag{L}$$

в интервале $(\alpha, +\infty)$ $(c(t) \leqq 0)$, в терминах поведения неколебательных решений этого уравнения при $t \to +\infty$. Кроме того, в случае, что (L) колебательное в $(\alpha, +\infty)$, показанно, что существует подпространство колебательных решений уравнения (L) размерности два.