UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLVI—XLVII—1985

ОБ ОДНОЙ КУБИЧЕСКОЙ СУММЕ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

В настоящей работе изучается следующая сумма

$$\sum_{T \leq k_\nu \leq T+U} Z^3[k_\nu(\tau)]\,,$$

где (см. [3], стр. 94, 383)

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right),$$

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{2}t\ln\pi + \operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)$$

и $\{k_\nu(\tau)\}$ обозначает бесконечную систему последовательностей, определенных соотношением

$$\vartheta[k_\nu(\tau)] = \frac{1}{3}\pi\nu + \frac{1}{3}\tau, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle\,, \tag{1}$$

(см. [2], часть 7), $k_\nu(0) = k_\nu$.

Обоснованием для изучения кубической суммы является следующее обстоятельство: вопрос об оценке кубической суммы теснейшим образом связан с вопросом о существовании теорем о среднем для функции $Z^3(t)$, относительно некоторых бесконечных систем несвязных множеств (см. условные соотношения (16) в настоящей работе).

1. Прежде всего мы перечислим полученные результаты.

Теорема 1. Имеет место оценка

$$\sum_{T \leq k_\nu \leq T+U} Z^3[k_\nu(\tau)] = O\{\sqrt{UT}(\ln T)^{7/2}\}\,, \tag{2}$$

для

$$0 < U \leqq T\,, \tag{3}$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие леммы.

Лемма A. Если $U\in(0, T\rangle$, то

$$\sum_{T\leq k_\nu\leq T+U} Z^2[k_\nu(\tau)]=O(U\ln^2 T)\ , \tag{4}$$

равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi, \pi\rangle$.

Доказательство леммы A помещено в частях 2—5 настоящей работы.

Пусть $\{\bar{t}_\nu(\tau)\}$ обозначает семейство последовательностей, определенных соотношением (см. [2], (17))

$$\vartheta[\bar{t}_\nu(\tau)]=\frac{1}{2}\pi\nu+\frac{1}{2}\tau\ ,\quad \tau\in\langle-\pi, \pi\rangle\ , \tag{5}$$

$\bar{t}_\nu(0)=\bar{t}_\nu$. Так как, (см. (1), (5)),

$$k_{3\nu}(\tau)=\bar{t}_{2\nu}\left(\frac{2}{3}\tau\right)\ ,$$

$$k_{3\nu+1}(\tau)=\bar{t}_{2\nu+1}\left(\frac{2\tau-\pi}{3}\right)\ ,$$

$$k_{3\nu+2}(\tau)=\bar{t}_{2\nu+1}\left(\frac{2\tau+\pi}{3}\right)\ .$$

то, в силу формулы (ср. [2], (18))

$$\sum_{t_{M+1}\leq\bar{t}_\nu\leq T} Z^4[\bar{t}_\nu(\tau)]\sim\frac{1}{2\pi^3}T\ln^5 T\ ,$$

способом «уплотнения», (ср. [2], (18)—(21)), получается

Лемма B. Если $U\in(0, T\rangle$, то

$$\sum_{T\leq k_\nu\leq T+U} Z^4[k_\nu(\tau)]=O(T\ln^5 T)\ , \tag{6}$$

равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi, \pi\rangle$.

С помощью леммы A и B

Доказательство теоремы 1 завершается просто. Пользуясь неравенством Коши—Буняковского, в силу (4), (6) получаем, что

$$\left|\sum_{T\leq k_\nu\leq T+U} Z^3[k_\nu(\tau)]\right|\leqq$$

$$\leqq\left\{\sum_{T\leq k_\nu\leq T+U} Z^2[k_\nu(\tau)]\right\}^{1/2}\cdot\left\{\sum_{T\leq k_\nu\leq T+U} Z^4[k_\nu(\tau)]\right\}^{1/2}<A\sqrt{UT}(\ln T)^{7/2},$$

где $0<A$ — абсолютная постоянная.

Напомним, что имеет место (см. [2], (2)) следующее соотношение

$$\sum_{T\leqq k_\nu\leqq T+U}(-1)^\nu Z^3(k_\nu)=\frac{3}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{3/4}\ln T)$$

для

$$0\leqq U\leqq T^{7/8}\sqrt{\ln T}. \tag{7}$$

Ограничение (7) имеет такое происхождение: в работе [2], (29) мы получили соотношение

$$\sum_{T\leqq k_\nu\leqq T+U}(-1)^\nu Z^3(k_\nu)=\frac{3}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U^2}{T}\right)+$$
$$+O(T^{3/4}\ln T)+O(UT^{-1/3}\ln^2 T)+O(T^{1/4}U^{1/2}\ln^3 T)$$

и поставили условие

$$\frac{U^2}{T},\ UT^{-1/3}\ln^2 T,\ T^{1/4}U^{1/2}\ln^3 T\leqq T^{3/4}\ln T, \tag{8}$$

приводящее к ограничению (7).

Однако, условие (8) не является единственно возможным, и мы теперь поставим следующее условие

$$\frac{U^2}{T},\ T^{3/4}\ln T,\ UT^{-1/3}\ln^2 T,\ T^{1/4}U^{1/2}\ln^3 T\leqq U,$$

приводящее к ограничению

$$T^{3/4}\ln T\leqq U\leqq T.$$

Следовательно, имеет место соотношение

$$\sum_{T\leqq k_\nu\leqq T+U}(-1)^\nu Z^3(k_\nu)=\frac{3}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O(U), \tag{9}$$

для $U\in\langle T^{3/4}\ln T, T\rangle$.

Теперь, обобщая соотношение (9) на случай семейства последовательностей $\{k_\nu(\tau)\}$, (т. е. делая подстановку $k_\nu\to k_\nu(\tau)$ в работе [2]; ср. [2], часть 7), получается

Теорема 2. Имеет место соотношение

$$\sum_{T\leqq k_\nu\leqq T+U}(-1)^\nu Z^3[k_\nu(\tau)]=\frac{3}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(U), \tag{10}$$

для

$$T^{3/4}\ln T \leqq U \leqq T\,, \tag{11}$$

где O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

Из (2), в случае $U_0=T^{1-\mu}$, (см. (3), $0<\mu$ — сколь угодно малое число), получаем оценку

$$\sum_{T\leq k_\nu\leq T+U_0} Z^3[k_\nu(\tau)] = O(U_0T^{\mu/2}\ln^{7/2}T)\,. \tag{12}$$

В силу оценки (12) кажется весьма естественной следующая

Гипотеза.

$$\sum_{T\leq k_\nu\leq T+U_0} Z^3[k_\nu(\tau)] = O(U_0)\,,\quad U_0=T^{1-\mu}\,, \tag{13}$$

равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

В этом направлении получается

Теорема 3. По гипотезе (13), (см. (10), (11)),

$$\begin{aligned}\sum_{T\leq k_{2\nu}\leq T+U_0} Z^3[k_{2\nu}(\tau)] &= \frac{3}{2\pi}U_0\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau + O(U_0)\,,\\ \sum_{T\leq k_{2\nu+1}\leq T+U_0} Z^3[k_{2\nu+1}(\tau)] &= -\frac{3}{2\pi}U_0\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau + O(U_0)\,,\end{aligned} \tag{14}$$

где O — оценки имеют место равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

Пусть далее, (ср. [1], (3)),

$$\begin{aligned}G_3=G_3(x,T,U_0) &= \bigcup_{T\leq k_{2\nu}\leq T+U_0}\{t\colon k_{2\nu}(-x)<t<k_{2\nu}(x)\}\,,\quad x\in(0,\pi/2\rangle\,,\\ G_4=G_4,(y,T,U_0) &= \bigcup_{T\leq k_{2\nu+1}\leq T+U_0}\{t\colon k_{2\nu+1}(-y)<t<k_{2\nu+1}(y)\}\,,\quad y\in(0,\pi/2\rangle\,.\end{aligned} \tag{15}$$

Имеет место

Теорема 4. По гипотезе (13),

$$\begin{aligned}\int_{G_3} Z^3(t)\,\mathrm{d}t &\sim \frac{2}{\pi}U_0\sin x\,,\\ \int_{G_4} Z^3(t)\,\mathrm{d}t &\sim -\frac{2}{\pi}U_0\sin y\,,\end{aligned} \tag{16}$$

для $T\to\infty$*.

---

* Теоремы о среднем для $Z^3(t)$ доказаны автором в 1984 г. независимо от какой бы то ни было гипотезы.

Доказательство теоремы 4 помещено в части 6.

Замечание. Условные соотношения (16) выражают интегральные теоремы о среднем, кубические относительно $Z(t)$, для двух бесконечных систем несвязных множеств.

2. Исходим из формулы Римана – Зигеля ([3], стр. 94)

$$Z(t)=2\sum_{n\leq t_1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)+O(t^{-1/4}),\quad t_1=\sqrt{\frac{t}{2\pi}}.$$

Имеем

$$Z^2(t)=S(t)+R(t),$$

где

$$\begin{aligned} S(t)&=4\sum_{m,\,n\leq t_1}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos(\vartheta-t\ln m)\cos(\vartheta-t\ln n)=\\ &=2\sum_{m,\,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\{2\vartheta-t\ln(mn)\}+\\ &+2\sum_{m,\,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left(t\ln\frac{m}{n}\right)=2S_1(t)+2S_2(t),\\ R(t)&=O\left\{t^{-1/4}\left|\sum_{n\leq t_1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)\right|\right\}+O(t^{-1/2})=\\ &=O(t^{-1/4}|Z(t)|)+O(t^{-1/2})=O(t^{-1/12}\ln t), \end{aligned}\tag{17}$$

так как ([3], стр. 94, 109)

$$Z(t)=O(t^{1/6}\ln t).$$

Следовательно, (см. (1), (17)),

$$Z^2[k_\nu(\tau)]=2S_1[k_\nu(\tau)]+2S_2[k_\nu(\tau)]+O\{[k_\nu(\tau)]^{-1/12}\ln k_\nu(\tau)\},\tag{18}$$

$$S_1[k_\nu(\tau)]=\sum_{m,\,n\leq t_2}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left\{\frac{2}{3}\pi\nu+\frac{2}{3}\tau-k_\nu(\tau)\ln(mn)\right\},\tag{19}$$

$$S_2[k_\nu(\tau)]=\sum_{m,\,n\leq t_2}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left\{k_\nu(\tau)\ln\frac{m}{n}\right\},\tag{20}$$

$$t_2=\sqrt{\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}}.\tag{21}$$

Имеют место следующие леммы.

Лемма 1.

$$\sum_{T \leq k_\nu \leq T+U} S_1[k_\nu(\tau)] = O(\sqrt{T} \ln^2 T), \quad U \leqq T, \tag{22}$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Лемма 2.

$$\sum_{T \leq k_\nu \leq T+U} S_2[k_\nu(\tau);\, m \neq n] = O(\sqrt{T} \ln^2 \mathrm{T}), \quad \mathrm{U} \leqq \mathrm{T}, \tag{23}$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Лемма 3.

$$\sum_{T \leq k_\nu \leq T+U} S_2[k_\nu(\tau);\, m = n] = \frac{3}{4\pi} U \ln^2 \frac{T}{2\pi} +$$

$$+ \frac{3c}{2\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U^2 \ln T}{T}\right), \quad U \leqq T, \tag{24}$$

где c — постоянная Эйлера и O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Теперь мы покажем, как завершается

Доказательство леммы А с помощью лемм 1, 2, 3. Из (18) в силу (22)—(24) следует соотношение

$$\sum_{T \leq k_\nu \leq T+U} Z^2[k_\nu(\tau)] = \frac{3}{2\pi} U \ln^2 \frac{T}{2\pi} + \frac{3c}{\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} +$$

$$+ O\left(\frac{U^2 \ln T}{T}\right) + O(\sqrt{T} \ln^2 T) + O(UT^{-1/2} \ln T) = \frac{3}{2\pi} U \ln^2 \frac{\mathrm{T}}{2\pi} + \mathrm{O}(\mathrm{U} \ln T),$$

для $U \in \langle \sqrt{T}, T \rangle$.

3. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 1. Применим способ [4], часть 5. Пусть

$$M = \max(T, 2\pi m^2, 2\pi n^2), \quad N = \max(\nu\colon k_\nu \in \langle T, T+U \rangle). \tag{25}$$

Имеем, (*см.* (19)),

$$\sum_{T \leq k_\nu \leq T+U} S_1[k_\nu(\tau)] = \sum_{m,\, n \leq t_3} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} V_1,$$

$$V_1 = \sum_{M \leq k_\nu \leq k_N} \cos\left\{\frac{2\pi}{3} \nu + \frac{2}{3} \tau - k_\nu(\tau) \ln(mn)\right\},$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}} = O(\sqrt{T}).$$

Прежде всего, $V_1(m=n=1)=O(1)$, и, следовательно,

$$\sum_{T\leqq k_\nu \leqq T+U} S_1[k_\nu(\tau);\ m=n=1]=O(\sqrt{T})\ . \tag{26}$$

Далее мы предположим, что $mn \geqq 2$. Так как

$$\frac{2\pi}{3}\nu = 2\pi\nu - \frac{4\pi}{3}\nu\ ,$$

то

$$V_1 = \sum_{M\leqq k_\nu \leqq k_N} \cos\{2\pi\chi(\nu)\}\ ,$$

где

$$\chi(\nu)=\frac{2}{3}\nu+\frac{1}{2\pi}k_\nu(\tau)\ln(mn)-\frac{1}{3\pi}\tau\ .$$

Теперь, (см. (1) и [4], стр. 99, 100),

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}k_\nu(\tau)}{\mathrm{d}\nu}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\vartheta'[k_\nu(\tau)]}\,,\\ \vartheta'(t)=\frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi}+O\left(\frac{1}{t}\right),\quad \vartheta''(t)\sim\frac{1}{2t}\,.\end{gathered} \tag{27}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\chi'(\nu)&=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\frac{\ln(mn)}{\vartheta'[k_\nu(\tau)]}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{\ln(mn)}{\ln\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}+O\left(\frac{1}{k_\nu(\tau)}\right)}=\\ &=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{\ln(mn)}{\ln\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}}+O\left(\frac{\ln(mn)}{k_\nu(\tau)\ln^2 k_\nu(\tau)}\right),\end{aligned} \tag{28}$$

$$\chi''(\nu)=-\frac{\pi}{3}\frac{\ln(mn)}{\vartheta'^3[k_\nu(\tau)]}\cdot\vartheta''[k_\nu(\tau)]<-A\frac{\ln(mn)}{k_\nu(\tau)\ln^3 k_\nu(\tau)}<0\ . \tag{29}$$

Так как

$$\frac{2}{3}<\chi'(\nu)<1+\varepsilon,\quad \chi''(\nu)<0\ ,$$

то, (ср. [4], стр. 103),

$$V_1=\int_{\chi'(x)>2/3}\cos(2\pi\{x-\chi(x)\})\,\mathrm{d}x+O(1)=V_{11}+V_{12}\ .$$

Очевидно,

$$\sum_{m,\, n \leq t_3} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} V_{12} = O(\sqrt{T}) .$$

Теперь мы получим оценку для

$$\sum_{m,\, n \leq t_3} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} V_{11} .$$

Пусть $m < n$. Так как (см. (25))

$$M = \max\{T, 2\pi n^2\} \geqq T, \; 2\pi n^2,$$

то $k_\nu(\tau) \geqq 2\pi n^2$ и, (см. (28)),

$$\chi'(\nu) < \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\ln(mn)}{\ln n} + \frac{A \ln T}{M \ln^2 M} <$$

$$< \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \frac{\ln m}{\ln n} + \frac{A}{M \ln M} < \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \frac{\ln m}{\ln n} + \frac{\pi}{3M} <$$

$$< \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \frac{\ln m}{\ln n} + \frac{1}{6n^2}$$

Значит,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \{x - \chi(x)\} = 1 - \chi'(x) > \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\ln m}{\ln n} - \frac{1}{n^2}\right) .$$

Если $n > 2m$, то

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \{x - \chi(x)\} > \frac{1}{6} \left(\frac{\ln 2}{\ln n} - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{A}{\ln n} ,$$

и, (см. [3], стр. 73, Лемма 1),

$$V_{11}(n > 2m) = O(\ln n) ,$$

что приводит к оценке

$$\sum_{m,\, n \leq t_3} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} V_{11}(n > 2m) = O(\sqrt{T} \ln T) . \tag{30}$$

Если $m < n < 2m$, $(n = m + r,\ r < m)$, то способом [4], стр. 104 получаем, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \{x - \chi(x)\} > \frac{Ar}{m \ln(m+1)} ,$$

и, следовательно,

$$\sum_{m,\, n \le t_3} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} V_{11}(m<n<2m) = O(\sqrt{T} \ln^2 T) . \tag{31}$$

В случае $n<m$ мы получаем для соответствующих сумм оценки, аналогичные (30), (31).

Если $m=n \geqq 2$, то (см. (29))

$$-\chi''(\nu) > A \frac{\ln m}{T \ln^3 T}$$

и ([3], стр. 73, 74, Лемма 3)

$$V_{11}(m=n \geqq 2) = O\left\{\frac{T^{1/2} (\ln T)^{3/2}}{(\ln m)^{1/2}}\right\} .$$

Следовательно, (ср. [4], стр. 105),

$$\sum_{m,\, n \le t_3} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} V_{11}(m=n \geqq 2) =$$

$$= O\left\{T^{1/2} \ln^{3/2} \mathrm{T} \sum_{2 \le m \le t_3} \frac{1}{\mathrm{m} \ln^{1/2} n}\right\} = O(\sqrt{T} \ln^2 T) . \tag{32}$$

Теперь оценки (26), (30)—(32) приводят к оценке (22).

4. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 2. Применим способ [4], часть 4. Имеем (см. (20), $m \neq n$)

$$\sum_{T \le k_\nu \le T+U} S_2[k_\nu(\tau)] = \sum_{m,\, n \le t_3} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} V_2 ,$$

$$V_2 = \sum_{M \le k_\nu \le k_N} \cos \{2\pi\varphi(\nu)\} , \quad \varphi(\nu) = \frac{1}{2\pi} k_\nu(\tau) \ln \frac{m}{n} .$$

Если $m>n$ то (ср. (28), (29))

$$\varphi'(\nu) = \frac{1}{6\vartheta'[k_\nu(\tau)]} \ln \frac{m}{n}, \quad \varphi''(\nu) < -\frac{A}{T \ln^3 T} \ln \frac{m}{n} < 0 .$$

Следовательно, (см. (27)),

$$\frac{A}{\ln T} \ln \frac{m}{n} < \varphi'(\nu) < \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln m}{\ln \frac{k_\nu(\tau)}{2\pi} + O\left(\frac{1}{k_\nu(\tau)}\right)} < \frac{1}{6} + \varepsilon ,$$

и, (ср. [4], стр. 103),

$$V_2=\int \cos\{2\pi\varphi(x)\}\,\mathrm{d}x+O(1)=O\left(\frac{\ln T}{\ln\frac{m}{n}}\right)+O(1)\,.$$

Отсюда следует оценка, (ср. [4], стр. 103),

$$\sum_{m,\,n\leq t_3}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}}\,V_2(m>n)=O(\sqrt{T}\ln^2 T)\,.$$

Аналогичная оценка имеет место и в случае $m<n$.

5. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 3. Имеем, (см. (20), (21)),

$$S_2[k_\nu(\tau)\,;\,m=n]=\sum_{n\leq t_2}\frac{1}{n}=\ln\sqrt{\frac{k_\nu(\tau)}{2\pi}}+c+O\left(\frac{1}{\sqrt{k_\nu(\tau)}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U}{T}\right)+c+O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right),\quad k_\nu(\tau)\in\langle T,\,T+U\rangle\,,$$

(c — постоянная Эйлера). Однако, (см. [2], (25)),

$$\sum_{T\leq k_\nu\leq T+U}1=\frac{3}{2\pi}\,U\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U^2}{T}\right)+O(1)\,.$$

Следовательно,

$$\sum_{T\leq k_\nu\leq T+U}S_2[k_\nu(\tau)\,;\,m=n]=\frac{3}{4\pi}\,U\ln^2\frac{T}{2\pi}+\frac{3c}{2\pi}\,U\ln\frac{T}{2\pi}+$$

$$+O\left(\frac{U^2\ln T}{T}\right)+O\left(\frac{U^3}{T^2}\right)+O\left(\frac{U^2}{T^{3/2}}\right)=O(U\ln^2 T)\,,$$

для $U\in(0,\,T\rangle$, (см. (3)), равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi,\,\pi\rangle$.

6. В этой части мы приведем

Доказательство теоремы 4. Для $k_{2\nu}(\tau)\in\langle T,\,T+U_0\rangle$ имеем, (см. (1), (27)),

$$\left(\frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}=3\vartheta'[k_{2\nu}(\tau)]=\frac{3}{2}\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U_0}{T}\right)>0\,.$$

Далее,

$$\int_{-x}^{x}Z^3[k_{2\nu}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau=\int_{-x}^{x}Z^3[k_{2\nu}(\tau)]\left(\frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau=$$

$$=\int_{-x}^{x}Z^3[k_{2\nu}(\tau)]\left\{\frac{3}{2}\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U_0}{T}\right)\right\}\frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{T}{2\pi}\int_{-x}^{x} Z^3[k_{2\nu}(\tau)]\,\frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + O\left(\frac{U_0}{T}\int_{-x}^{x} |Z[k_{2\nu}(\tau)]|^3\,\frac{\mathrm{d}k_{2\nu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau\right) =$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\int_{k_{2\nu}(-x)}^{k_{2\nu}(x)} Z^3(t)\,\mathrm{d}t + O\left(\frac{U_0}{T}\int_{k_{2\nu}(-x)}^{k_{2\nu}(x)} |Z(t)|^3\,\mathrm{d}t\right).$$

Интегрируя первое соотношение в (14) по τ в промежутке $\langle -x, x\rangle$, получаем

$$\frac{3}{2}\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\int_{G_3} Z^3(t)\,\mathrm{d}t + O\left(\frac{U_0}{T}\int_{G_3} |Z(t)|^3\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$=\frac{3}{\pi}\,U_0\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\sin x + O(xU_0)\,, \tag{33}$$

(см. (15)). Так как, (см. [3], стр. 142, 147),

$$\int_{T}^{T+U_0} Z^2(t)\,\mathrm{d}t \sim U_0\ln T\,,$$

$$\int_{T}^{T+U_0} Z^4(t)\,\mathrm{d}t < \int_{T}^{2T} Z^4(t)\,\mathrm{d}t < AT\ln^4 T\,,$$

то, применяя неравенство Коши—Буняковского,

$$\int_{G_3} |Z(t)|^3\,\mathrm{d}t < \int_{T}^{T+U_0} |Z(t)|^3\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \left(\int_{T}^{T+U_0} Z^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{T}^{T+U_0} Z^4(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} < A\sqrt{U_0 T}\,(\ln T)^{5/2}\,.$$

Значит,

$$\frac{U_0}{T}\int_{G_3} |Z(t)|^3\,\mathrm{d}t < AU_0 T^{-\mu/2}(\ln T)^{5/2} < AU_0\,.$$

Теперь из (33) следует первое соотношение в (16), и, аналогичным образом — второе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мозер Ян: Новые следствия из формулы Римана—Зигеля, Acta Arithm., 42 (1982), 1—10.
[2] —, Об одной кубической формуле в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. 44—45, (1984), 81—89.
[3] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.
[4] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, IV, Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105.

Адрес автора:

Ján Moser
MFF UK, Katedra matematickej analýzy
Matematický pavilón
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 30. 7. 1983

SUMMARY

ON A CUBIC SUM IN THE THEORY OF RIEMANN ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

Let $\{k_\nu(\tau)\}$ denote the sequence defined by

$$\vartheta[k_\nu(\tau)]=\frac{1}{3}\pi\nu+\frac{1}{3}\tau,\quad \nu=1,2,\ldots,\quad \tau\in\langle-\pi,\pi\rangle .$$

In the paper, the following estimate is proved

$$\sum_{T\leqq k_\nu\leqq T+U} Z^3[k_\nu(\tau)]=O\{\sqrt{UT}(\ln T)^{7/2}\},\quad 0<U\leqq T,$$

uniformly with respect to $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$, ($Z(t)$ and $\vartheta(t)$ are known functions in the theory $\zeta(s)$ and $k_\nu=k_\nu(0)$).

SÚHRN

O JEDNOM KUBICKOM SÚČTE V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

Nech $\{k_\nu(\tau)\}$ označuje postupnosť definovanú vzťahom

$$\vartheta[k_\nu(\tau)]=\frac{1}{3}\pi\nu+\frac{1}{3}\tau,\quad \nu=1,2,\ldots,\quad \tau\in\langle-\pi,\pi\rangle .$$

V práci je dokázaný nasledovný odhad

$$\sum_{T\leqq k_\nu\leqq T+U} Z^3[k_\nu(\tau)]=O\{\sqrt{UT}(\ln T)^{7/2}\},\quad 0<U\leqq T,$$

rovnomerne vzhľadom na $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$, ($Z(t)$ a $\vartheta(t)$ sú známe funkcie v teórii $\zeta(s)$ a $k_\nu=k_\nu(0)$).