UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLIV—XLV—1984

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНОЙ u_x РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

МАРЕК ФИЛА, Братислава

В настоящей работе установлена оценка производной u_x решения u задачи Коши для уравнения типа:

$$u_t = a(t, x, u, u_x)u_{xx} + b(t, x, u, u_x) \tag{1}$$

в слое $P = \{(t, x),\ 0 < t \leqq T,\ x \in \mathbf{R}\}$

при начальном условии

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

без каких-либо предположений о непрерывности функций $a(t, x, u, p)$, $b(t, x, u, p)$. О решении u задачи (1), (2) предложим только, что

$$\exists \alpha > 0, \exists M > 0: |x - y| \leqq \alpha \Rightarrow |u(t, x) - u(t, y)| \leqq M \quad \forall t \in (0, T]. \tag{3}$$

и что оно непрерывно в $\bar{P}$. О коэффициентах уравнения (1) предположим:

(i) функция $a(t, x, u, p)$ ограничена и неотрицательна $\forall (t, x) \in P,\ u, p \in \mathbf{R}$.

(ii) $\exists L_1, L_2 \geqq 0$: $|b(t, x, u, p) - b(t, y, v, q)| \leqq a(t, x, u, p)(L_1|p| + L_2) + a(t, y, v, q)(L_1|q| + L_2)$ $\forall t \in (0, T]$, $|x - y| \leqq \alpha$, $|u - v| \leqq M$, $p, q \in \mathbf{R}$.

В работе В. Л. Камынина [1] установлены априорные оценки модуля непрерывности ограниченного решения u задачи (1), (2) в случае, когда нелинейность уравнения (1) характеризуется условием:

$$|b(t, x, u, p)| \leqq a(t, x, u, p)\psi(|p|) \quad \forall (t, x) \in P, |u| \leqq M, p \in \mathbf{R}, \tag{4}$$

где ψ гладкая функция,

$$\psi(q) \geqq 1, \quad \int^{\infty} \frac{q\,\mathrm{d}q}{\psi(q)} < \infty.$$

В частности имеет место:

Теорема 1 [1]. Пусть функция u непрерывна в $\bar{P}$,

$$\sup_P |u| \leqq M, \quad \sup_P |u_x| < \infty.$$

Пусть для $(t, x) \in P$, $|u| \leqq M$, $|p| \leqq L = \text{const} > 0$ функции $a(t, x, u, p)$, $b(t, x, u, p)$ ограничены, $a(t, x, u, p) \geqq 0$ и исполнено условие (4).

Пусть

$$\exists K > 0: |u_0(x) - u_0(y)| \leqq K|x - y| \ \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Пусть

$$\exists \varepsilon > 0: \sup_{(t, x), (t, y) \in P} |u(t, x) - u(t, y)| \leqq \int_K^\infty \frac{q \, dq}{\psi(q)} - \varepsilon. \tag{5}$$

Тогда

$$|u_x(t, x)| \leqq C(K, \varepsilon, \psi) \ \forall (t, x) \in P.$$

В работах С. Н. Кружкова [2], [3] эта оценка установлена при тех же самых предположениях как и в теореме 1, только функция ψ такая, что

$$\int^\infty \frac{q \, dq}{\psi(q)} = \infty.$$

(В следствие того условие (5) исчезает.)

На нескольких примерах покажем разницу между условиями (ii) и (4).

Пример 1. Если функция $a(t, x, u, p)$ ограничена и условие (4) выполнено в частном случае:

$$|b(t, x, u, p)| \leqq a(t, x, u, p)(L_1|p| + L_2) \ \forall (t, x) \in P, \ u, p \in \mathbf{R},$$

тогда выполнено тоже (ii) (не только для $|x - y| \leqq \alpha$, $|u - v| \leqq M$).

$$\begin{gathered} |b(t, x, u, p) - b(t, y, v, q)| \leqq |b(t, x, u, p)| + |b(t, y, v, q)| \leqq \\ \leqq a(t, x, u, p)(L_1|p| + L_2) + a(t, y, v, q)(L_1|q| + L_2) \end{gathered}$$

$$\forall t \in (0, T], \ x, y, u, v, p, q \in \mathbf{R}.$$

Пример 2. Из выполнения (ii) не вытекает выполнение (4). Положим например:

$$b(t, x, u, p) \equiv b(p) = \begin{cases} 1 & p \geqq 0 \\ 0 & p < 0, \end{cases}$$

$$a(t, x, u, p) \equiv a(p) = \begin{cases} 0 & p \geqq 0 \\ 1 & p < 0. \end{cases}$$

$$|b(p) - b(q)| = \begin{cases} 0 \\ 1 \Rightarrow p \geqq 0, \ q < 0 (q \geqq 0, \ p < 0), \ a(q) = 1 (a(p) = 1) \end{cases}$$

Полагая, $L_1 = L_2 = 1$ получим:

$$|b(p) - b(q)| \leqq 1 \leqq 1(|q| + 1) = a(p)(|p| + 1) \mp a(q)(|q| + 1)$$
$$(1(|p| + 1))$$

Но при $p \geqq 0$: $|b(p)| = 1 > 0 = a(p)\psi(|p|)$.

Пример 3. Тоже в случае невырождающегося уравнения имеем простой пример функций удовлетворяющих (ii), а неудовлетворяющих (4): $a(t, x, u, p) \equiv 1$, $b(t, x, u, p) \equiv x$. Очевидно не существует ψ, чтобы $|b(t, x, u, p)| = |x| \leqq 1\psi(|p|) = a(t, x, u, p)\psi(|p|)\ \forall x, p \in \mathbf{R}$. При

$$L_1 = 0, L_2 = \frac{\alpha}{2}: |b(t, x, u, p) - b(t, y, v, q)| = |x - y| \leqq$$

$$\leqq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = a(t, x, u, p)(L_1|p| + L_2) + a(t, y, v, q)(L_1|q| + L_2)$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, |x - y| \leqq \alpha.$$

Имеет место

Теорема 2. Пусть коэффициенты уравнения (1) выполняют условия (i), (ii). Пусть решение u задачи (1), (2) непрерывно в $\bar{P}$ и удовлетворяет (3). Пусть $\exists K > 0$: $|u_0(x) - u_0(y)| \leqq K|x - y|\ \forall x, y \in \mathbf{R}$. Тогда $|u_x(t, x)| \leqq C(L_1, L_2, \alpha, M, K)\ \forall (t, x) \in P$.

Доказательство использует основные идеи доказательства теоремы 4.4 из [2].

Задача

$$\varkappa'' + L_1\varkappa' + L_2 = 0,$$

$$\varkappa(0) = 0, \varkappa(\alpha) = N = \max\{\alpha K, M\}$$

имеет решение

$$\varkappa(s) = de^{-L_1 s} - \frac{L_2}{L_1} s - d, \quad d = \frac{N + \frac{L_2}{L_1}\alpha}{e^{-L_1\alpha} - 1} < 0.$$

Функция $\varkappa$ выпукла сверху ($\varkappa''(s) = dL_1^2 e^{-L_1 s} < 0$), в силу того она не убывает в промежутке $[0, \beta]$, где β — точка, в которой достигается максимум функции $\varkappa$ в промежутке $[0, \alpha]$.

Обозначим $\mathcal{P} = \{(t, x, y), t \in (0, T], 0 < x - y < \beta\}$ и в $\bar{\mathcal{P}}$ введём функции $w(t, x, y) = u(t, x) - u(t, y)$, $A^x(t, x, y) = a(t, x, u(t, x), u_x(t, x))$, $A^y(t, x, y) = a(t, y, u(t, y), u_y(t, y))$, $z(t, x, y) = \varkappa(x - y)$. Тогда $w(t, x, y) \leqq z(t, x, y)$ на нижнем основании и боковых границах бесконечного бруса $\mathcal{P}$.

На нижнем основании ($t = 0$):

$$w(t, x, y) = u_0(x) - u_0(y) \leqq K(x - y) \leqq \varkappa(x - y) = z(t, x, y).$$

На первой боковой границе $(x=y)$:

$$w(t, x, y)=0=\varkappa(0)=z(t, x, y).$$

На второй боковой границе $(x=y+\beta)$:

$$w(t, x, y)=u(t, y+\beta)-u(t, y)\leqq M\leqq N\leqq \varkappa(\beta)=z(t, x, y).$$

Далее в $\mathcal{P}$ $L(w)\equiv -w_t+A^x(w_{xx}+L_1|w_x|+L_2)+A^y(w_{yy}+L_1|w_y|+L_2)\geqq 0$ в силу условия (ii).

$$\begin{aligned}L(z)=-z_t+A^x(z_{xx}+L_1|z_x|+L_2)+A^y(z_{yy}+L_1|z_y|+L_2)=\\ =(A^x+A^y)(\varkappa''+L_1\varkappa'+L_2)=0\end{aligned}$$

Всюду в $\mathcal{P}$ имеем

$$\begin{aligned}0\leqq L(w)-L(z)=-(w-z)_t+A^x(w-z)_{xx}+A^y(w-z)_{yy}+A_1(w-z)_x+\\ +A_2(w-z)_y\equiv \mathcal{L}(w-z),\end{aligned}$$

$$A_1=A_1(t, x, y)=\begin{cases}A^xL_1\dfrac{|w_x|-|z_x|}{w_x-z_x}, & w_x\neq z_x\\ 0 & , \ w_x=z_x\end{cases}$$

и аналогично определена функция A_2 (A_1, A_2 — ограничены).

По принципу максимума $w(t, x, y)\leqq z(t, x, y)$ всюду в $\mathcal{P}$ и получаем $u(t, x)-u(t, y)\leqq \varkappa(x-y)-\varkappa(0)$,

$$u_x(t, x)\leqq \varkappa'(0)=\frac{L_1N+L_2\alpha}{1-e^{-L_1\alpha}}-\frac{L_2}{L_1}=C.$$

Аналогично $-w(t, x, y)\leqq z(t, x, y)$, $-u_x(t, x)\leqq C$.

Пример 4.

$F(x)=\sin x^2$, $x\in\mathbf{R}$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbf{R})$, выполняет условие (3), но её производная $F'(x)=2x\cos x^2$ неограничена. (F служит тоже примером функции непрерывной, исполняющей (3), которая не является равномерно непрерывной.)

В случае, когда уравнение (1) невырождающееся, т. е.

(i′) $\qquad \exists m, M'>0\colon m\leqq a(t, x, u, p)\leqq M' \ \forall (t, x)\in P,\ u, p\in\mathbf{R},$

можем предположение (ii) заменить простейшим условием

(ii′) $\qquad \exists L_1, L_2\geqq 0\colon |b(t, x, u, p)-b(t, y, v, q)|\leqq L_1(|p|+|q|)+L_2$

$$\forall t\in(0, T],\ |x-y|\leqq\alpha,\ |u-v|\leqq M,\ p, q\in\mathbf{R}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, только (i), (ii) заменены условиями (i′), (ii′).

Тогда $|u_x(t, x)| \leqq C(L_1, L_2, \alpha, M, K, m)\ \forall (t, x) \in P$.

Доказательство анологично доказательству теоремы 2, только вместо L введём $\bar{L}(w) \equiv -w_t + A^x w_{xx} + A^y w_{yy} + L_1(|w_x| + |w_y|) + L_2$.

$$\bar{L}(w) \geqq 0 \quad ((\mathrm{ii}')).$$

$$\bar{L}(\bar{z}) = -\bar{z}_t + A^x \bar{z}_{xx} + A^y \bar{z}_{yy} + L_1(|\bar{z}_x| + |\bar{z}_y|) + L_2 \leqq$$

$$\leqq A^x\left(\bar{z}_{xx} + \frac{L_1}{m}|\bar{z}_x| + \frac{L_2}{2m}\right) + A^y\left(\bar{z}_{yy} + \frac{L_1}{m}|\bar{z}_y| + \frac{L_2}{2m}\right) = 0,$$

$$\bar{z}(t, x, y) = \bar{\varkappa}(x - y),$$

где $\bar{\varkappa}$ — решение задачи

$$\bar{\varkappa}'' + \frac{L_1}{m}\bar{\varkappa}' + \frac{L_2}{2m} = 0, \quad \bar{\varkappa}(0) = 0, \quad \bar{\varkappa}(\alpha) = N.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Камынин, В. Л.: Априорные оценки и разрешимость в целом квазилинейных параболических уравнений. ВМУ, № 1, 1981, 33—38.

[2] Кружков, С. Н.: Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными. Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1979, вып. 5, 217—272.

[3] Кружков, С. Н.: Априорная оценка для производной решения параболического уравнения и некоторые еэ применения. ДАН СССР, 170, № 3, 1966, 501—504.

Адрес автора:

Поступило: 16. 11. 1982

Marek Fila,
Katedra matematickej analýzy MFF UK,
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

SUMMARY

AN A PRIORI ESTIMATE FOR THE DERIVATIVE u_x OF A SOLUTION OF A QUASILINEAR PARABOLIC EQUATION

M. Fila, Bratislava

In this paper we establish an a priori estimate for the derivative u_x of a solution of the Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation without any assumptions about the continuity of their coefficients.

SÚHRN

APRIÓRNY ODHAD DERIVÁCIE u_x RIEŠENIA KVÁZILINEÁRNEJ PARABOLICKEJ ROVNICE

M. Fila, Bratislava

V práci je stanovený apriórny odhad derivácie u_x riešenia Cauchyho úlohy pre kvázilineárnu parabolickú rovnicu bez akýchkoľvek predpokladov o spojitosti koeficientov tejto rovnice.