UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLIV—XLV—1984

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА И УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА—ФРИДМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

В работе [3] я начал исследование уравнений Эйнштейна—Фридмана с помощью теории дзета-функции Римана. Основую роль при построении бесконечного множества моделей сферической Вселенной сыграла гипотеза Римана и Ω-теорема Е. К. Титчмарша ([4], стр. 201, ср. [3], (20)).

В предлагаемой работе мною построено новое бесконечное семейство решений уравнений Эйнштейна—Фридмана (моделей сферической Вселенной) с помощью гипотезы Римана и независимо от Ω-теоремы Е. К. Титчмарша.

Анализ поведения этого нового семейства решений приводит к необходимости определить физическую область F (это промежуток — или несвязное множество — значений временной координаты, на котором выполняются некоторые простые физические ограничения; точное определение см. в 3-ей части).

Доказательство существования физической области для построенного бесконечного семейства решений уравнений Эйнштейна—Фридмана, составляет основной математический результат работы.

В чем дело? А. Эйнштейн заметил следующее ([7], стр. 611—612): «При больших плотностях поля и вещества уравнения поля и даже входящие в них переменные должны терять смысл. Поэтому мы не можем предположить, что уравнения поля остаются справедливыми при больших плотностях поля и материи, и не можем заключить, что «начало расширения» должно означать сингулярность в математическом смысле. Поэтому мы должны иметь в виду, что, может быть, и нельзя распространять уравнения на такие области.»

Далее, Дж. Уилер, в связи с исследованием метрики сферической Вселенной отметил следующие пункты ([6], стр. 110—114):

(А) Сферическая Вселенная расширяется и снова сжимается.

(B) Динамика расширения и повторного сжатия Вселенной однозначно определяется уравнением состояния источника энергии-массы, заполняющей пространство.

(C) Из любого уравнения состояния следует наличие давления, лежащего между двумя крайними случаями: между нулевым давлением («модель Вселенной, равномерно заполненая пылью») и максимальным давлением («Вселенная заполненная излучением»).

(D) Гипотеза: каждая замкнутая метрика со временем становится сингулярной.

(E) Повидимому, то же самое имеет место для каждого промежуточного уравнения состояния.

Итак, с одной стороны, точка зрения Дж. Уилера покоится на убеждении, что уравнения тяготения Эйнштейна применимы к целому открытому промежутку, определенному двумя сингулярными точкаи («началом расширения» и «концом сжатия»).

С другой стороны, скептицизм А. Эйнштейна, в связи с возможностью применять его уравнения тяготения в окрестности сингулярной точки, приводит нас к изучению физической области.

План изложения таков.

В 1-ой части мы напомним некоторые понятия релятивистской космологии.

Во 2-ой части мы напомним нужные для наших целей понятия из теории дзета-функции Римана.

В 3-ей части мы построим бесконечное множество моделей сферической Вселенной и дадим определение физической области.

В 4-ой части мы докажем существование физической области для каждой из построенных моделей сферической Вселенной, начиная с некоторой.

В 5-ой части мы покажем, что некоторые окрестности сингулярных точек не входят в физическую область.

В 6-ой части мы покажем, что вопрос о связности или несвязности физической области сводится к вопросу о распределении нулей нечетного порядла функций входящих в определение физической области.

В 7-ой части приведены некоторые замечания о структуре физической области; отмечена парадоксальная возможност — несвязность физической области.

1. Как известно (см. например [5], стр. 209), основой релятивистской космологии являются следующие уравнения Эйнштейна—Фридмана:

$$\frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t)=\left(\frac{R'}{R}\right)^2+\frac{kc^2}{R^2},\tag{1}$$

$$\varkappa p(t)=-\frac{2R''}{R}-\left(\frac{R'}{R}\right)^2-\frac{kc^2}{R^2},\tag{2}$$

где $k=-1, 0, 1$. Уравнения (1), (2) следуют из уравнений А. Эйнштейна

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\varkappa c^2 T^{\mu\nu},\quad \mu,\nu=1,\ldots,4$$

в случае

$$ds^2=dt^2-\frac{R^2(t)}{c^2}\cdot\frac{dr^2+r^2d\vartheta^2+r^2\sin^2\vartheta d\varphi^1}{\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^2},$$

$$T^{\mu\nu}=\left(\varrho+\frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu-g^{\mu\nu}\frac{p}{c^2},$$

$$u^4=1,\quad u^1=u^2=u^3=0,$$

где использованы устоявшиеся в общей теории относительности обозначения.

Известно, что теория тяготения А. Эйнштейна не допускает произвольно больших давлений p, при данной плотности вещества ϱ. А именно, должно иметь место соотношение

$$0\leqq p(t)\leqq\frac{c^2}{3}\varrho(t). \tag{3}$$

Уравнение $G(p,\varrho)=0$ называется уравнением состояния вещества. Крайние случаи:

$$p(t)=0$$

соответствует Вселенной, равномерно заполненной пылью,

$$p(t)=\frac{c^2}{3}\varrho(t)$$

соответсвует случаю Вселенной, заполненной излучением.

Неравенства (3) равносильны следующим:

$$E(t)=\frac{\varkappa c^2}{3}\varrho(t)-\varkappa p(t)\geqq 0,$$

$$p(t)\geqq 0,$$

где (см. (1), (2))

$$E(t)=\frac{2R''}{R}+2\left(\frac{R'}{R}\right)^2+\frac{2kc^2}{R^2}. \tag{4}$$

2. Пусть $s=\sigma+it$ — комплексное переменное. Для $\sigma>1$ дзета-функция Римана определена следующим способом (см. [4], стр. 5)

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

где p пробегает все простые числа. Она имеет аналитическое продолжение на всю плоскость (s), за исключением точки $s=1$, в которой имеет простой полюс с вычетом 1.

Функция $\zeta(s)$ имеет бесконечное множество комплексных нулей, лежащих в полосе $0<\sigma<1$. Гипотеза Римана — это предположение, что все комплексные нули функции $\zeta(s)$ лежат на критической прямой $\sigma=\frac{1}{2}$. В этой работе мы будем предполагать справедливой гипотезу Римана.

Положим (см. [4], стр. 94, 383)

$$Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \tag{5}$$

где

$$\vartheta(t)=-\frac{1}{2}t\ln\pi+\operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi+O\left(\frac{1}{t}\right),$$

($Z(t)$ — действительна для действительных t).

В силу (5) имеет место следующее: если $1/2+i\gamma$ есть нуль кратности $n(\gamma)$ функции $\zeta(s)$, то γ — нуль кратности $n(\gamma)$ функции $Z(t)$.

Пусть γ', γ'', $(\gamma'<\gamma'')$ — ординаты соседних нулей функции $\zeta(s)$. Пусть, далее, $\{t_0\}$ — последовательность значений t_0, для которых

$$\gamma'<t_0<\gamma'',\ \ Z'(t_0)=0,\ \ t_0\to\infty, \tag{6}$$

(см. [2]).

В работе [3] мы показали, что в предположении справедливости гипотезы Римана имеет место формула

$$-\frac{Z''(t)}{Z(t)}+\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2=\sum_\gamma\frac{1}{(t-\gamma)^2}+O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{7}$$

для $t\neq\gamma$, $t\geqq T_0>0$.

Напомним дальше, что в предположении справедливости гипотезы Римана имеет место оценка Д. Е. Литтлвуда ([1], стр. 237)

$$\gamma''-\gamma'<\frac{A}{\ln\ln\gamma'},\ \ \gamma'\geqq T_1, \tag{8}$$

$(0<A,\ A_1$ — абсолютные постоянные). Следовательно (см. (6), (8)),

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} > \frac{n(\gamma')}{(t_0-\gamma')^2} \geqq \frac{1}{(t_0-\gamma')^2} > \frac{1}{(\gamma''-\gamma')^2} > \tag{9}$$

$$> A(\ln\ln\gamma')^2 > A_1(\ln\ln t_0)^2.$$

3. В этой части мы введем один постулат и дадим определение физической области.

Постулат. В уравнениях (1), (2) мы положим

$$R(t) = \alpha(t_0)|Z(t)|, \quad t \in (\gamma', \gamma''); \quad k=1, \tag{10}$$

где

$$\alpha(t_0) = \frac{c}{|Z(t_0)|}\left\{\beta \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}, \qquad 1<\beta<2,$$

т. е., радиус Вселенной отождествляется (в основном) с функцией

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$$

и принимается сферическая геометрия.

Примечание 1. Так как функция

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

имеет бесконечно много нулей $1/2+i\gamma$, то этим способом построено бесконечное множество моделей сферической Вселенной; для всякого промежутка (γ', γ''), $\gamma' \geqq T_0$, где γ', γ'' — ординаты соседних нулей функции

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

— построена одна модель.

Примечание 2. Поступированию поведения радиуса Вселенной в промежутке $(\gamma'\ \gamma'')$ соответствует постлирование «промежуточного» уравнения состояния, т. е., уравнения состояния, удовлетворяющего неравенствам (3) и отличного от уравнений состояния

$$p=0, \ p=\frac{c^2}{3}\varrho.$$

В случае (10), из (2), (4) получаем (см. (7)):

$$\varkappa p(t) = 2\sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2} - 3\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2 - \tag{11}$$

$$-\beta\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2\sum_\gamma\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}+O\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$E(t)=-2\sum_\gamma\frac{1}{(t-\gamma)^2}+4\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2+ \tag{12}$$

$$+2\beta\left\{\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right\}^2\sum_\gamma\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}+O\left(\frac{1}{t}\right),$$

для $t\geqq T_0$.

Теперь мы дадим следующее

Определение. Пусть:

(A) $F_1=F_1(\gamma',\gamma'')$ обозначает множество значений $t\in(\gamma',\gamma'')$, для которых $p(t)\geqq 0$,

(B) $F_2=F_2(\gamma',\gamma'')$ обозначает множество значений $t\in(\gamma',\gamma'')$, для которых $E(t)\geqq 0$.

Тогда множество $F=F_1\cap F_2=F(\gamma',\gamma'')$ назовем физической областью, принадлежащей промежутку (γ',γ'').

4. В этой части мы покажем, что имеет место

Теорема 1. По гипотезе Римана существует $T'>0$ такое, что каждый промежуток (γ',γ''), $\gamma'\geqq T'$ содержит физическую область $(F\neq\emptyset)$.

Сначала мы докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. По гипотезе Римана существуют $T_3>0$ и последовательность $\{\delta_1(t_0)\}$, $0<\delta_1(t_0)<\min(\gamma''-t_0,\ t_0-\gamma')$ такие, что

$$p(t)>0,\quad t\in(t_0-\delta_1,\ t_0+\delta_1),\quad \gamma'\geqq T_3. \tag{13}$$

Доказательство. Полагая в соотношении (11) $t=t_0$, получаем (см. (6), (9)) что

$$\varkappa p(t_0)=(2-\beta)\sum_\gamma\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}+O\left(\frac{1}{t_0}\right)>(2-\beta)A_1(\ln\ln t_0)^2+O\left(\frac{1}{t_0}\right)>0$$

для $\gamma'\geqq T_3\geqq T_2=\max(T_0,T_1)$. Отсюда, по непрерывности функции $p(t)$ при $t\in(\gamma',\gamma'')$, следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. По гипотезе Римана существуют $T_4>0$ и последовательность $\{\delta_2(t_0)\}$, $0<\delta_2(t_0)<\min(\gamma''-t_0,\ t_0-\gamma')$ такие, что

$$E(t)>0,\quad t\in(t_0-\delta_3,\ t_0+\delta_3),\quad \gamma'\geqq T_4. \tag{14}$$

Доказательство. Полагая в соотношении (12) $t=t_0$ получаем (см. (6), (9)), что

$$E(t_0)=2(\beta-1)\sum_\gamma\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}+O\left(\frac{1}{t_0}\right)>$$

$$>2(\beta-1)A_1(\ln\ln t_0)^2+O\left(\frac{1}{t_0}\right)>0$$

для $\gamma'\geqq T_4\geqq T_2$. Отсюда, по непрерывности функции $E(t)$ при $t\in(\gamma',\gamma'')$, следует утверждение леммы 2.

Теперь мы завершим

Доказательство теоремы 1. По лемме 1,

$$(t_0-\delta_1,\ t_0+\delta_1)\subset F_1(\gamma',\gamma''),\quad \gamma'\geqq T_3$$

и по лемме 2,

$$(t_0-\delta_2,\ t_0+\delta_2)\subset F_2(\gamma',\gamma''),\quad \gamma'\geqq T_4.$$

Следовательно, в случае

$$\gamma'\geqq T'=\max\,(T_3,\ T_4)$$

имеет место

$$(t_0-\delta_1,\ t_0+\delta_1)\cap(t_0-\delta_2,\ t_0+\delta_2)\subset F_1\cap F_2=F(\gamma',\gamma'').$$

Значит, $F(\gamma',\gamma'')\neq\emptyset$, так как оно содержит непустое подмножество.

5. Для сферической Вселенной, соответствующей промежутку (γ',γ''), точка $t=\gamma'$ соответствует «началу расширения» и точка $t=\gamma''$ — «концу сжатия». Мы покажем, что некоторая правая окрестность точки γ' и некоторая левая окрестность точки γ'' исключены из физической области.

Имеет место

Теорема 2. По гипотезе Римана существуют $T''>0$ и последовательность

$$\{\delta_3(\gamma)\},\ 0<\delta_3(\gamma)<\frac{1}{2}(\gamma''-\gamma')$$

такие, что

$$(\gamma',\ \gamma'+\delta_3(\gamma'))\cup(\gamma''-\delta_3(\gamma''),\ \gamma'')\not\subset F(\gamma',\gamma''),$$

для $\gamma'\geqq T''$.

Доказательство. Так как

$$\sum_\gamma\frac{1}{(t-\gamma)^2}=\frac{n(\bar\gamma)}{(t-\bar\gamma)^2}+\sum_{\gamma\neq\bar\gamma}\frac{1}{(t-\gamma)^2},$$

то имеет место

$$\lim_{t\to\bar\gamma}(t-\bar\gamma)^2\sum_\gamma\frac{1}{(t-\gamma)^2}=n(\bar\gamma). \tag{15}$$

Далее, нуль $\bar\gamma$ кратности $n(\bar\gamma)$ функции $Z(t)$, является простым полюсом для ее логарифмической производной, с вычетом $n(\bar{\gamma})$, т. е.,

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)}=\frac{n(\bar{\gamma})}{t-\bar{\gamma}}+\psi(t),$$

где $\psi(t)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности точки $\bar{\gamma}$. Значит, имеет место

$$\lim_{t\to\bar{\gamma}}(t-\bar{\gamma})^2\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\}^2=n^2(\bar{\gamma}). \tag{16}$$

Еще заметим, что:

(A) если $n(\bar{\gamma})=1$, то

$$\lim_{t\to\bar{\gamma}}\left\{\frac{t-\bar{\gamma}}{Z(t)}\right\}^2=\frac{1}{\{Z'(\bar{\gamma})\}^2}, \tag{17}$$

(B) если $n(\bar{\gamma})\geqq 2$, то

$$\lim_{t\to\bar{\gamma}}\left\{\frac{t-\bar{\gamma}}{Z(t)}\right\}^2=+\infty. \tag{18}$$

Следовательно, если $n(\bar{\gamma})=1$, то (см. (11), (15)—(17))

$$\lim_{t\to\bar{\gamma}}(t-\bar{\gamma})^2p(t)=$$

$$=-1-\beta\left\{\frac{Z(t_0)}{Z'(\bar{\gamma})}\right\}^2\sum_{\gamma}\frac{1}{(t_0-\gamma)^2}+O\left(\frac{1}{\bar{\gamma}}\right)<0, \tag{19}$$

для $\bar{\gamma}>T''>T'$, если $n(\bar{\gamma})\geqq 2$, то (см. (18))

$$\lim_{t\to\bar{\gamma}}(t-\bar{\gamma})^2p(t)=-\infty. \tag{20}$$

Теперь из (19), (20) (см. определение физической области, специально множества F_1) следует утверждение теоремы 2.

6. В этой части мы приведем некоторые замечания о структуре физической области F.

(A) Прежде всего мы обратим внимание на структуру множества $F_1=F_1(\gamma',\gamma'')$, т.е., на структуру множества значений $t\in(\gamma',\gamma'')$, для которых $p(t)\geqq 0$.

В силу (13), (19), (20) имеет место

$$p(\gamma'+\varepsilon)<0,\ p(t_0)>0,\ p(\gamma''-\varepsilon)<0,$$

для $\gamma'\geqq T_5=\max(T',T'')$ и достаточно малого $\varepsilon>0$. Следовательно, по теореме Больцано—Коши, каждый из промежутков

$$(\gamma' + \varepsilon, t_0), \ (t_0, \gamma'' - \varepsilon) \tag{21}$$

содержит нечетное число нулей нечетного порядка функции $p(t)$.

(AA) Если каждый из промежутков (21) содержит лишь один нуль нечетного порядка функции $p(t)$, то в этом случае F_1 является промежутком.

(AB) Если некоторый из промежутков (21) содержит больше чем один нуль нечетного порядка, т. е. 3, 5, ... нулей, то множество в этом случае является несвязным.

(B) Тепер мы обратим внимание на структуру множества $F_2 = F_2(\gamma', \gamma'')$, т. е., на структуру множества значений $t \in (\gamma', \gamma'')$, для которых $E(t) \gtreqless 0$.

Так как (см. (1), $k=1$, (10), (12))

$$\lim_{t \to \gamma} \varrho(t) = +\infty$$

и (см. (19), (20))

$$\lim_{t \to \gamma} p(t) = -\infty, \ \gamma > T_5,$$

то

$$\lim_{t \to \gamma} e(t) = +\infty, \tag{22}$$

так как

$$E = \frac{\varkappa c^2}{3} \varrho - \varkappa p.$$

Заметим, что (см. (14), (22))

$$E(\gamma' + \omega) > 0, \ E(t_0) > 0, \ E(\gamma'' - \omega) > 0, \tag{23}$$

для $\gamma' > T_5$ и достаточно малое $\omega > 0$. Следовательно, теорема Больцано—Коши к промежутку $\langle \gamma' + \omega, \gamma'' - \omega \rangle$ неприменима.

(BA) Если промежуток (γ', γ''), $\gamma' > T_5$ не содержит нуль нечетного порядка функции $E(t)$, то

$$F_2(\gamma', \gamma'') = (\gamma', \gamma'').$$

(BB) Если промежуток (γ', γ''), $\gamma' > T_5$ содержит нули нечетного порядка функции $E(t)$, то число этих нулей должно быть четным (см. (22)), т. е. в этом случае промежуток (γ', γ'') содержит 2, 4, ... нулей нечетного порядка функции $E(t)$ и множество $F_2 = F_2(\gamma', \gamma'')$ является несвязным.

(C) Так как $F = F_1 \cap F_2$, то вопрос о том, является ли фузическая область F связным или несвязным множеством, сводится к вопросу о количестве нулей нечетного порядка функций $p(t)$, $E(t)$ в промежутке (γ', γ'').

Итак, даже в случае, когда мы ограничиваемся рассмотрением физической области, мы можем попасть в парадоксальную обстановку — в случае несвязности физической области. Именно, временная координата t должна пробегать несвязное множество значений.

В связи с этим очень интересным являестя следующий вопрос: Содержит ли построенное бесконечное множество моделей сферической Вселенной подмножество такого рода, что физической областью каждой модели этого подмножества является промежуток (т. е. связное множество)?

ЛИТЕРАТУРА

[1] Littlewood, J. E.: Two notes on the Riemann zeta-function, Proc. Cambr. Phil. Soc., 22 (1924), 234—242.

[2] Мозер, Ян: Об одном новом сведствии из гипотезы Римана, Acta Arith., 25 (1974), 307—311.

[3] Мозер, Ян: Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой, Acta Arith., 26 (1974), 33—39.

[4] Титчмарш, Е. К. Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

[5] Мак-Витти, Г.: Общая теория относительности и космология, ИИЛ, Москва 1961.

[6] Уилер, Дж.: Гравитация, нейтрино и Вселенная, ИИЛ, Москва 1962.

[7] Эйнштейн, А.: Собрание научных трудов, т. 2, «Наука», Москва 1966.

Адрес автора:

Ján Moser
Katedra matematickej analýzy MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступило: 10. 5. 1982

SÚHRN

RIEMANNOVA DZETA-FUNKCIA A EINSTEINOVE—FRIEDMANNOVE ROVNICE

J. Moser, Bratislava

V práci je zostrojená, na základe Riemannovej hypotézy, nekonečná množina modelov sférického Vesmíru. Definovaná je fyzikálna oblasť modelu a dokázaná jej existencia pre všetky modely, začínajúc od istého.

Poukazuje sa na možnosť paradoxného javu — nesúvislosti fyzikálnej oblasti. Otázka súvislosti alebo nesúvislosti fyzikálnej oblasti je spojená s otázkou o počte nulových bodov nepárneho rádu tých funkcií, pomocou ktorých sa definuje fyzikálna oblasť.

SUMMARY

RIEMANN'S ZETA-FUNCTION AND THE EINSTEIN—FRIEDMANN'S EQUATIONS

J. Moser, Bratislava

On the basis of Riemann's hypothesis an infinite set of models of the spherical universe is constructed. The physical region of the model is defined and its existence for all the models, with exception of a finite number, is proved.

A possibility of a paradox phenomenon — of disconnectedness of the physical region — is pointed out. The question of the connectedness of disconnectedness of the physical region is related to with the question on the number of zero points of odd order of those functions by means of which the physical region is defined.