UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLIV—XLV—1984

АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА КОРОТКОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ

ЯН МОЗЕР, Братислава

В этой работе мы продолжаем (см. [5], [7]) изучение короткой тригонометрической суммы

$$S_1(t, T, K) = \sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} \cos(t \ln n), \quad P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \tag{1}$$

где

$$t \in \langle T, T+U \rangle, \quad U = \sqrt{T}\psi \ln T, \quad \psi < K \leqq T^{1/6} \tag{2}$$

и $\psi = \psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция.

Напомним, что

$$S_1(t, T, K) = \mathrm{Re}\,\{S(t, T, K)\},$$

где ([7], (1))

$$S(t, T, K) = \sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} n^{it}.$$

В работах [4], [5] мы начали изучать следующий вопрос: При каких условиях отрезок

$$\frac{1}{2} + iT, \ \frac{1}{2} + i(T+T^\eta)$$

($0<\eta$ — сколь угодно малое число) содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$? Мы показали (см. [5], (21), (22) и Следствие 4), что этот вопрос теснейшим образом связан с вопросом об оценке короткой тригонометрической суммы.

Именно эта связь короткой тригонометрической суммы с вопросом о попадании нулей нечетного порядка функции

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

в короткие промежутки, является обоснованием для всестороннего изучения свойств короткой тригонометрической суммы.

В предлагаемой работе мы получаем следующие новые результаты о поведении короткой тригонометрической суммы:

(a) оценку снизу для числа нулей нечетного порядка функции

$$S_1(t, T, K),\ t\in\langle T, T+U\rangle,$$

(b) обобщением предыдущего результата мы получаем оценку снизу для числа корней нечетного порядка уравнения

$$\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\cos(t\ln n)=L,\quad |L|\leqq\sqrt{\frac{P_0}{3K}},$$

для $t\in\langle T, T+U\rangle$.

Наконец мы заметим, что предлагаемая работа продолжает наши исследования по дискретному методу E. K. Титчмарша (см. его фундаментальный мемуар [9]).

Приступим к точным формулировкам и доказательствам.

1. Пусть ([8], стр. 383)

$$\vartheta(t)=-\frac{1}{2}t\ln\pi+\operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi+O\left(\frac{1}{t}\right)$$

и $\{t_\nu(\tau),\ \tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$ обозначает семейство последовательностей определенных соотношением (см. [6], (1))

$$\vartheta[t_\nu(\tau)]=\pi\nu+\tau,\quad \nu=1,2,\ldots,\tag{3}$$

$(t_\nu(0)=t_\nu)$.

Имеет место

Теорема.

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}S_1(t_\nu)S_1[t_\nu(\tau)]=\frac{P_0}{2K}\cdot\frac{1}{2\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(K^{-1}T\ln^2T)\tag{4}$$

где O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

Доказательство теоремы мы приводим в части 4.

Так как $t_\nu(\pi)=t_{\nu+1}$ (см. (3)), то из (4) получаем

Следствие 1.

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}S_1(t_\nu)S_1(t_{\nu+1})=-\frac{P_0}{2K}\cdot\frac{1}{2\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O(K^{-1}T\ln^2T).\tag{5}$$

Примечание 1. Соотношение (5) является асимптотическим (см. (2)). Пусть

$$S(a, b) = \sum_{a \leqq n < b \leqq 2a} n^{it}, \quad b \leqq \sqrt{\frac{t}{2\pi}}.$$

Если

$$|S(a, b)| < A(\Delta)\sqrt{a}t^{\Delta}, \quad \Delta \in \left(0, \frac{1}{6}\right\rangle, \tag{6}$$

то (см. (1))

$$|S_1(t, T, K)| < A(\Delta)\sqrt{P_0}T^{\Delta}, \quad t \in \langle T, T+U\rangle. \tag{7}$$

Пусть $G_1(T, U, K)$ обозначает количество промежутков $\langle t_v, t_{v+1}\rangle \subset \langle T, T+U\rangle$, для которых имеет место

$$S_1(t_v)S_1(t_{v+1}) < 0.$$

Тепер из (5) в силу (7) получаем (см. (2), ср. [9], стр. 102, [3], (11))

$$A(\Delta)P_0T^{2\Delta} \cdot G_1(T, U, K) > AK^{-1}P_0U \ln T$$

($0 < A(\psi)$ — постоянная, зависящая от выбора ψ) т. е.

$$G_1(T, U, K) > A(\Delta)T^{\frac{1}{2}-2\Delta}K^{-1}\psi \ln^2 T. \tag{8}$$

Пусть $C_1(T, U, K)$ обозначает количество нулей нечетного порядка функции $S_1(t, T, K)$, $t \in \langle T, T+U\rangle$. Так как функция $S_1(t, T, K)$ является непрерывной в переменной t, то по теореме Больцано—Коши имеет место (см. (8))

Следствие 2. Если имеет место (6) то

$$C_1(T, U, K) > A(\Delta)T^{\frac{1}{2}-2\Delta}K^{-1}\psi \ln^2 T. \tag{9}$$

В случае $\Delta = \frac{1}{6}$ (см. [8], стр. 110) из (9) получаем

Следствие 3.

$$C_1(T, U, K) > AT^{\frac{1}{6}}K^{-1}\psi \ln^2 T. \tag{10}$$

Примечание 2. В случае $K = T^{1/6}$ оценка (9) является нетривиальной:

$$C_1(T, U, T^{\frac{1}{6}}) > A\psi \ln^2 T.$$

В случае справедливости гипотезы Линделёфа, по теореме А. А. Карацубы ([1], стр. 89), имеет место оценка (7) при $\Delta=\varepsilon$ (ε — сколь угодно малое число). Значит, получаем

Следствие 4. По гипотезе Линделёфа,

$$C_1(T, U, K)>A(\varepsilon)T^{\frac{1}{2}-2\varepsilon}K^{-1}\psi \ln^2 T. \tag{11}$$

Отсюда, в наиболее интересном случае $K=T^\delta$, ($0<\delta$ — сколь угодно малое число), получаем

Следствие 5. По гипотезе Линделёфа,

$$C_1(T, U, T^\delta)>A(\varepsilon)T^{\frac{1}{2}-2\varepsilon-\delta}\psi \ln^2 T. \tag{12}$$

2. В этой части мы отметим некоторые закономерности связанные с преобразованием

$$S_1\to S_1-L,\ |L|\leqq\sqrt{\frac{P_0}{3K}} \tag{13}$$

(L — действительное число) в соотношении (5).

Имеет место следующая

Формула.

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}[S_1(t_\nu)-L][S_1(t_{\nu+1})-L]\sim \tag{14}$$

$$\sim-\left(\frac{P_0}{2K}-L^2\right)\frac{1}{2\pi}\,U\ln T,\ T\to+\infty,$$

где

$$|L|\leqq\sqrt{\frac{P_0}{3K}}.$$

Доказательство формулы (14) мы приводим в части 5.

Пусть $G_2(T, U, K, L)$ обозначает количество промежутков $\langle t_\nu, t_{\nu+1}\rangle\subset\langle T, T+U\rangle$, для которых

$$[S_1(t_\nu)-L][S_1(t_{\nu+1})-L]<0.$$

Пусть $C_2=C_2(T, U, K, L)$ обозначает число корней нечетного порядка уравнения

$$S_1(t, T, K)=L,\ t\in\langle T, T+U\rangle.$$

Теперь из (14) в случае (6) получаем следующие оценки (ср. часть 1):

$$C_2>A(\Delta)T^{\frac{1}{2}-2\Delta}K^{-1}\psi \ln^2 T, \tag{9'}$$

$$C_2>AT^{\frac{1}{6}}K^{-1}\psi \ln^2 T,\ \left(\Delta=\frac{1}{6}\right), \tag{10'}$$

$$C_2 > A(\varepsilon)T^{\frac{1}{2}-2\varepsilon}K^{-1}\psi \ln^2 T, \ (\Delta=\varepsilon), \tag{11'}$$

$$C_2 > A(\varepsilon)T^{\frac{1}{2}-2\varepsilon-\delta}\psi \ln^2 T, \ (\Delta=\varepsilon, \ K=T^{\delta}) \tag{12'}$$

(оценки (11), (12) имеют место по гипотезе Линделёфа).

3. Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Пусть

$$W[t_\nu(\tau)] = \sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos[t_\nu(\tau)\ln n], \qquad W[t_\nu(0)] = W(t_\nu). \tag{15}$$

Имеет место

Лемма 1.

$$\sum_{T\leq t_\nu\leq T+U} W(t_\nu)W[t_\nu(\tau)] = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{U}{K}\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau + O(K^{-1}\sqrt{T}\ln^2 T), \tag{16}$$

где O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$.

Лемма 2.

$$\sum_{T\leq t_\nu\leq T+U} W^2[t_\nu(\tau)] = \frac{1}{4\pi}\frac{U}{K}\ln\frac{T}{2\pi} + O(K^{-1}\sqrt{T}\ln^2 T), \tag{17}$$

где O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$.

Пусть

$$W_1[t_\nu(\tau)] = \sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{P_0}}\right)\cos[t_\nu(\tau)\ln n].$$

Очевидно (см. (1), (15)).

$$\frac{1}{\sqrt{P_0}} S_1[t_\nu(\tau)] = W[t_\nu(\tau)] - W_1[t_\nu(\tau)]. \tag{18}$$

Имеет место

Лемма 3.

$$\sum_{T\leq t_\nu\leq T+U} W_1^2[t_\nu(\tau)] = \frac{1}{48\pi}\frac{U}{K^3}\ln\frac{T}{2\pi} + O(K^{-3}\sqrt{T}\ln^2 T), \tag{19}$$

где O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$.

4. В этой части мы покажем, как завершается

Доказательство теоремы с помощью лемм 1—3. Так как (см. (18))

$$\frac{1}{P_0} S_1(t_\nu)S_1[t_\nu(\tau)] = W(t_\nu)W[t_\nu(\tau)] -$$

$$-W_1(t_\nu)W[t_\nu(\tau)]-W(t_\nu)W_1[t_\nu(\tau)]+W_1(t_\nu)W_1[t_\nu(\tau)],$$

то (см. (2), (16), (17), (19))

$$\frac{1}{P_0}\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}S_1(t_\nu)S_1[t_\nu(\tau)]=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{U}{K}\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(K^{-1}\sqrt{T}\ln^2 T)+O(UK^{-2}\ln T)+O(UK^{-3}\ln T)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{U}{K}\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(K^{-1}\sqrt{T}\ln^2 T),$$

где, например,

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}W_1(t_\nu)W[t_\nu(\tau)]=$$

$$=O\left\{\left(\sum_{t_\nu}W_1^2(t_\nu)\cdot\sum_{t_\nu}W^2[[t_\nu(\tau)]]\right)^{1/2}\right\}=O(UK^{-2}\ln T).$$

5. В этой части мы завершим с помощию теоремы

Доказательство формулы (14). Прежде всего (см. (2) и [2], (42))

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}1=\frac{1}{2\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U^2}{T}\right)+O(1)= \tag{20}$$

$$=\frac{1}{2\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O(\psi^2\ln^2 T).$$

Далее (см. (5))

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}[S_1(t_\nu)-L][S_1(t_{\nu+1})-L]= \tag{21}$$

$$=-\left(\frac{P_0}{2K}-L^2\right)\frac{1}{2\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O(L^2\psi^2\ln^2 T)+O(K^{-1}T\ln^2 T)-$$

$$-L\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}S_1(t_\nu)-L\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}S_1(t_{\nu+1}).$$

Так как (см. (1))

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}S_1(t_\nu)=\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\;\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}\cos(t_\nu\ln n)$$

и ([9], стр. 99—100)

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}\cos(t_\nu\ln n)=O\left(\frac{\ln T}{\ln n}\right)=O(1)$$

для $n\in(e^{-1/K}P_0,\,P_0)$, то (см. (13))

$$L \sum_{T \leq t_\nu \leq T+U} S_1(t_\nu) = O\left(|L| \cdot \frac{P_0}{K}\right) = O\left(\frac{P_0^{3/2}}{K^{3/2}}\right), \tag{22}$$

(аналогичная оценка получается и для последнего члена в (21)).

Так как

$$\frac{P_0}{6K} \leq \frac{P_0}{2K} - L^2 \leq \frac{P_0}{2K},$$

то

$$-\left(\frac{P_0}{2K} - L^2\right) \frac{1}{2\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O(L^2 \psi \ln^2 T) + O(K^{-1} T \ln^2 T) = \tag{23}$$

$$= -\left(\frac{P_0}{2K} - L^2\right) \frac{1}{2\pi} U \ln T + O\left(\frac{P_0}{K} U\right) + O(L^2 \psi \ln^2 T) +$$

$$+ O(K^{-1} T \ln T) \sim -\left(\frac{P_0}{2K} - L^2\right) \frac{1}{2\pi} U \ln T.$$

Теперь из (21) а силу (22), (23) следует (14).

6. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 1. Так как (см. (3))

$$\vartheta[t_\nu(\tau)] - \vartheta(t_\nu) = \tau,$$

то способом [9], стр. 102, [2], (42) получаем

$$t_\nu(\tau) - t_\nu = \frac{\tau}{\ln P_0} + O\left(\frac{U}{T \ln^2 T}\right),$$

для t_ν, $t_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle$. Следовательно,

$$W[t_\nu(\tau)] = \sum_{e^{-1/K} P_0 < n < P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(t_\nu \ln n + \tau \frac{\ln n}{\ln P_0}\right) + \tag{24}$$

$$+ O\left(\frac{U}{K T^{3/4} \ln T}\right),$$

$$W(t_\nu) W[t_\nu(\tau)] = \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{n} \cos\left(\tau \frac{\ln n}{\ln P_0}\right) + \tag{25}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m \neq n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\left(t_\nu \ln \frac{n}{m} + \tau \frac{\ln n}{\ln P_0}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m \neq n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\left[t_\nu \ln (mn) + \tau \frac{\ln n}{\ln P_0}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n}\frac{1}{n}\cos\left(2t_\nu \ln n+\tau\frac{\ln n}{\ln P_0}\right)+O\left(\frac{U}{KT^{3/4}\ln T}\cdot\frac{\sqrt{P_0}}{K}\right)=$$

$$=R_1+R_2+R_3+R_4+O\left(\frac{U}{K^2\sqrt{T}\ln T}\right).$$

Прежде всего, аналогично случаю [7], (28), (29), (38), (39), (47), (48), имеет место

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}(R_2+R_3+R_4)=O(K^{-1}\sqrt{T}\ln^2 T). \tag{26}$$

При этом оценка (26) имеет место равномерно относительно $\tau\in\langle -\pi,\pi\rangle$, так как, например (ср. [7], (30), (31))

$$\left|\sum_{t_\nu}\cos\left(t_\nu\ln\frac{n}{m}+\tau\frac{\ln n}{\ln P_0}\right)\right|\leqq \tag{27}$$

$$\leqq\left|\exp\left(i\tau\frac{\ln n}{\ln P_0}\right)\sum_{t_\nu}\exp\left(it_\nu\ln\frac{n}{m}\right)\right|\leqq$$

$$\leqq\left|\sum_{t_\nu}\exp\left(it_\nu\ln\frac{n}{m}\right)\right|.$$

Для изучения суммы

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}R_1$$

мы применим формулу суммирования Эйлера—Маклорена (см. [8], стр. 19)

$$\sum_{a<n\leqq b}\varphi(n)=\int_a^b\varphi(x)\,dx+\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)\,dx+$$

$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b)$$

в случае

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\cos\left(\tau\frac{\ln x}{\ln P_0}\right),\quad x\in\langle e^{-1/K}P_0,\,P_0\rangle.$$

Прежде всего,

$$\int_{e^{-1/K}P_0}^{P_0}\cos\left(\tau\frac{\ln x}{\ln P_0}\right)\frac{dx}{x}=\ln P_0\int_{1-(1/K\ln P_0)}^{1}\cos(\tau w)dw=$$

$$=\frac{\ln P_0}{\tau}\left[\sin\tau-\sin\left(\tau-\frac{\tau}{K\ln P_0}\right)\right]=\frac{1}{K}\cos\tau+O\left(\frac{1}{K^2\ln T}\right),$$

так как

$$\sin\left(\tau-\frac{\tau}{K\ln P_0}\right)=\sin\tau-\frac{\tau}{K\ln P_0}\cos\tau+O\left(\frac{\tau^2}{K^2\ln T}\right).$$

Далее, так как

$$\varphi'(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right),\quad x\in\langle e^{-1/K}P_0,\ P_0\rangle,$$

то

$$\int_{e^{-1/K}P_0}^{P_0}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=O\left(\frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{P_0^2}\right)=O\left(\frac{1}{K\sqrt{T}}\right)$$

и, очевидно,

$$\varphi(e^{-1/K}P_0),\quad \varphi(P_0)=O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right).$$

Следовательно,

$$R_1=\frac{1}{2K}\cos\tau+O\left(\frac{1}{K^2\ln T}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)=\frac{1}{2K}\cos\tau+O\left(\frac{1}{K^2\ln T}\right),$$

в случае (ср. (2))

$$K\leqq T^{1/4}(\ln T)^{-1/2},$$

так что

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+U}R_1=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{U}{K}\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(K^{-1}\psi^2\ln^2 T)+ \tag{28}$$

$$+O(K^{-2}\sqrt{T}\psi\ln T).$$

Теперь из (25) в силу (26), (28) следует (16).

7. Так как (см. (24), (25))

$$W^2[t_\nu(\tau)]=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m\neq n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left(t_\nu\ln\frac{n}{m}-\tau\frac{\ln m}{\ln P_0}+\tau\frac{\ln n}{\ln P_0}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m\neq n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left[t_\nu\ln(mn)+\tau\frac{\ln m}{\ln P_0}+\tau\frac{\ln n}{\ln P_0}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_n \frac{1}{n}\cos\left(2t_\nu \ln n + 2\tau\frac{\ln n}{\ln P_0}\right) + O\left(\frac{U}{K^2\sqrt{T}\ln T}\right).$$

то отсюда получаем (см. (26), (27) и [7], (62)) соотношение (17), т. е., доказательство леммы 2 закончено.

Доказательство леммы 3 получается аналогичным способом (ср. [7], (15), (63)—(74)).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карацуба, А. А.: Основы аналитической теории чисел, Москва 1975.

[2] Мозер Ян: Об одной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 31—43.

[3] Мозер, Ян: О законе Грама в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 32 (1977), 107—113.

[4] Мозер, Ян: Исправление к работам: "Acta Arith., 31 (1976), 31—43; 31 (1976), 45—51; 35 (1979), 403—404", Acta Arith., 40 (1981), 97—107.

[5] Мозер, Ян: Новые оценки коротких тригонометрических сумм, Acta Arith., 40 (1982), 357—367.

[6] Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана—Зигеля, Acta Arith., 42 (1982), 1—10.

[7] Мозер, Ян: Ω-теорема для короткой тригонометрической суммы, Acta Arith., 42 (1983), 153—161.

[8] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва, 1953.

[9] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, IV, Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105.

Адрес автора:

Ján Moser
Katedra matematickej analýzy MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступило: 2. 6. 1982

SÚHRN

AUTOKORRELAČNÉ VLASTNOSTI KRÁTKEHO TRIGONOMETRICKÉHO SÚČTU

Ján Moser, Bratislava

V tejto práci je dokázané, že krátky trigonometrický súčet má nulové body nepárneho rádu na istom intervale. Okrem toho je dokázaný odhad zdola pre počet týchto nulových bodov.

SUMMARY

AUTOCORRELATIVE PROPERTIES OF THE SHORT TRIGONOMETRIC SUM

J. Moser, Bratislava

It is proved that the short trigonometric sum posseses zero points of odd order on a certain interval. Moreover the lower estimate for the number of these zero points is given.