UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLIV—XLV—1984

О МОДУЛИРОВАННОЙ КОРОТКОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЕ

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. Пусть (ср. [2], (43))

$$H=T^{\mu},\ \bar{\nu}=\min\{\nu\colon t_{\nu}\in\langle T,\ T+H\rangle\},\qquad \bar{\nu}+N=\max\{\nu\colon t_{\nu}\in\langle T,\ T+H\rangle\},\tag{1}$$

($0<\mu$ — сколь угодно малое число, относительно $\{t_{\nu}\}$ см. [10]).

Положим

$$\Phi=\Phi(T,\ N,\ K)=\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\frac{\sin\{(N+1)X\}}{(N+1)X}\cos(T_1\ln n+\beta),\tag{2}$$

где

$$X=X(n)=\frac{\pi}{2}\frac{\ln\frac{P_0}{n}}{\ln P_0},\ T_1=t_{\bar{\nu}}+\frac{\pi}{2}\frac{N}{\ln P_0},\ \beta=-\frac{\pi}{2}N,\ P_0=\sqrt{\frac{T}{2\pi}}.\tag{3}$$

В предлагаемой работе мы покажем, что, в предположении справедливости гипотезы Линделёфа, модулированная короткая тригонометрическая сумма (2) теснейшим образом связана с вопросом о среднем арифметическом

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}Z(t_{\bar{\nu}+k}),\tag{4}$$

(относительно $Z(t)$ см. [9], стр. 94). А именно, имеет место

Теорема 1. По гипотезе Линделёфа,

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}Z(t_{\bar{\nu}+k})=\frac{(-1)^{\bar{\nu}}}{\sqrt{P_0}}\Phi+O(T^{-\frac{1}{6}\mu}),\ T\to\infty,\tag{5}$$

для

$$H=T^{\mu},\ K=T^{\frac{\mu}{3}},\tag{6}$$

где $0<\mu$ — сколь угодно малое число.

При доказательстве теоремы 1 используются следующие средства:

(a) формула Римана—Зигеля ([9], стр. 94)

$$Z(t)=2\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)+O(T^{-1/4}),\quad t\in\langle T,\,T+H\rangle,$$

(b) некоторые из результатов полученных в наших работах [2]—[8],

(c) теорема А. А. Карацубы о гипотезе Линделёфа ([1], стр. 89).

Заметим, что предлагаемыя работа продолжает наши исследования по дискретному методу Е. К. Титчмарша (см. его фундаментальный мемуар [10]).

Напомним, что в работах [3], [4], (ср. [5]), мы получили следующий результат. Пусть

$$S(a,b)=\sum_{0<a\leqq n<b\leqq 2a}n^{it},\quad b\leqq\sqrt{\frac{t}{2\pi}}.$$

Если

$$|S(a,b)|<A(\Delta)\sqrt{a}t^{\Delta},\quad \Delta\in\left(0,\frac{1}{6}\right\rangle, \tag{7}$$

то

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+H_1}(-1)^\nu Z(t_\nu)=\frac{1}{\pi}H_1\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln T), \tag{8}$$

где $H_1\in(0,\sqrt[4]{T}\rangle$.

Так как по теореме А. А. Карацубы ([1], стр. 89), в случае справедливости гипотезы Линделёфа можно положить $\Delta=\varepsilon$, где ε — сколь угодно малое число, то из (8), в случае $H_1=H$, $\varepsilon=\frac{1}{6}\mu$ получаем, что

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}(-1)^{\bar\nu+k}Z(t_{\bar\nu+k})=2+O(T^{-\frac{5}{6}\mu}), \tag{9}$$

где (см. (1) и [3], (23))

$$N=\frac{1}{2\pi}H_1\ln\frac{T}{2\pi}+O(1). \tag{10}$$

Интересно сравнить соотношения (5), (9): среднее арифметическое

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}(-1)^{\bar\nu+k}Z(t_{\bar\nu+k})$$

ведет себя асимптотически совершенно определенным образом (см. (9)), в то время как поведение среднего арифметического (4) связано с поведением модулированной короткой тригонометрической суммы (см. (5)) и, следовательно, оно является таинственным.

2. В этой части мы получим некоторые следствия из теоремы 1.

Следствие 1. Если справедлива гипотеза Линделёфа и последовательность

$$\{Z(t_{\bar{v}+k})\}_{k=0}^{N}$$

сохраняет знак, то

$$|\Phi|>(2-\varepsilon)\sqrt{P_0}, \tag{11}$$

где $0<\varepsilon$ — сколь угодно малое число.

Действительно. Пусть, например, $Z(t_{\bar{v}+k})\geqq 0$, $k=0, 1, \ldots, N$. Тогда, с одной стороны,

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} Z(t_{\bar{v}+k})=\frac{1}{N+1}\left\{\sum Z(t_{2v})+\sum Z(t_{2v+1})\right\}\geqq$$

$$\geqq\frac{1}{N+1}\left\{\sum Z(t_{2v})-\sum Z(t_{2v+1})\right\}=\frac{1}{N+1}\sum_{T\leqq t_v\leqq T+H}(-1)^v Z(t_v)>2-\frac{\varepsilon}{2},$$

в силу (9). С другой стороны (см. (5)),

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} Z(t_{\bar{v}+k})<\frac{1}{\sqrt{P_0}}|\Phi|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, имеет место (11).

Далее мы введем следующие обозначения:

$$Q_1=\sum_{T\leqq t_{2v}\leqq T+H} 1, \quad Q_2=\sum_{T\leqq t_{2v+1}\leqq T+H} 1,$$
$$Q=\sum_{T\leqq t_v\leqq T+H} 1=N+1; \quad Q_1\sim Q_2\sim\frac{1}{2}Q \tag{12}$$

и

$$\alpha_1=\frac{1}{Q_1}\sum_{T\leqq t_{2v}\leqq T+H} Z(t_{2v}),$$
$$\alpha_2=\frac{1}{Q_2}\sum_{T\leqq t_{2v+1}\leqq T+H} Z(t_{2v+1}). \tag{13}$$

Теперь (см. (5), (9))

$$\alpha_1+\alpha_2=2\frac{(-1)^{\bar{v}}}{\sqrt{P_0}}\Phi+o(1), \quad \alpha_1-\alpha_2=4+o(1) \tag{14}$$

и

$$\alpha_1 = 2 + \frac{(-1)^{\bar{\nu}}}{\sqrt{P_0}}\,\Phi + o(1), \quad \alpha_2 = -2 + \frac{(-1)^{\bar{\nu}}}{\sqrt{P_0}}\,\Phi + o(1). \tag{15}$$

Отсюда заключаем, что имеет место

Следствие 2. По гипотезе Линделёфа:

(A) если

$$|\Phi| > (2+\varepsilon)\sqrt{P_0},$$

то $\alpha_1 \cdot \alpha_2 > 0$, (т. е. α_1, α_2 — равных знаков),

(B) если

$$|\Phi| < (2-\varepsilon)\sqrt{P_0}$$

то $\alpha_1 \cdot \alpha_2 < 0$, (т. е. α_1 α_2 — разных знаков), где $0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число.

Далее из (15) получаем соотношение

$$\{\alpha_1 + o(1)\}\{\alpha_2 + o(1)\} = \frac{\Phi^2}{P_0} - 4.$$

Отсюда заключаем, что имеет место

Следствие 3. Предположим, что справедлива гипотеза Линделёфа и $0 < l$ — сколь угодно малое число. Тогда:

(A) если $\alpha_1 \cdot \alpha_2 > 0$ и $|\alpha_1|$, $|\alpha_2| \geqq l$, то

$$|\Phi| > 2\sqrt{P_0},$$

(B) если $\alpha_1 \cdot \alpha_2 < 0$ и $|\alpha_1|$, $|\alpha_2| \geqq l$, то

$$|\Phi| < 2\sqrt{P_0}.$$

3. В этой части мы приведем

Доказательство теоремы 1.

(A) Напомним, что в предположении справедливости гипотезы Линделёфа мы получили соотношение

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H} Z(t_\nu) = O(K^2 T^\varepsilon \ln T) + R, \tag{16}$$

где

$$R = \sum_{T \leq t_\nu \leq T+H} (-1)^\nu \sum_{e^{-1/K} P_0 < n < P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(t_\nu \ln n),$$

(см. [6], (18), $\Delta \to \varepsilon$, $L \to K$).

Применяя преобразование Абеля и оценку А. А. Карацубы ([1], стр. 89), получаем, что

$$\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(t_\nu \ln n) = \frac{1}{\sqrt{P_0}} \sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} \cos(t_\nu \ln n) + O(K^{-1}T^\varepsilon),$$

(ср. [6], (81)—(83)), т. е.

$$R = \frac{1}{\sqrt{P_0}} \sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} \sum_{T\leq t_\nu \leq T+H} (-1)^\nu \cos(t_\nu \ln n) +$$

$$+ O(K^{-1}HT^\varepsilon \ln T) = \frac{1}{\sqrt{P_0}} R_1 + O(K^{-1}HT^\varepsilon \ln T). \tag{17}$$

(B) Так как (см. [2], (45))

$$t_{\bar\nu+k} = t_{\bar\nu} + \Omega k + O\left(\frac{H^2}{T \ln T}\right), \quad \Omega = \frac{\pi}{\ln P_0},$$

то (ср. [2], (49))

$$\sum_{T\leq t_\nu \leq T+H} (-1)^\nu \cos(t_\nu \ln n) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^{\bar\nu+k} \cos(t_{\bar\nu+k} \ln n) =$$

$$= (-1)^{\bar\nu} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cos(\omega k + \varphi) + O\left(\frac{H^2 N \ln n}{T \ln T}\right) =$$

$$= (-1)^{\bar\nu} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cos(-\omega k - \varphi) + O(H^3 T^{-1} \ln T) =$$

$$= (-1)^{\bar\nu} \sum_{k=0}^{N} \cos(\pi k - \omega k - \varphi) + O(H^3 T^{-1} \ln T) =$$

$$= (-1)^{\bar\nu} \sum_{k=0}^{N} \cos(2kX - \varphi) + O(H^3 T^{-1} \ln T), \tag{18}$$

где

$$\omega = \pi \frac{\ln n}{\ln P_0}, \quad \varphi = \varphi(n) = t_{\bar\nu} \ln n. \tag{19}$$

Следовательно (ср. [2], (52)),

$$R_1 = (-1)^{\bar\nu} \sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} \sum_{k=0}^{N} \cos(2Xk - \varphi) + O(H^3 T^{-1/2} K^{-1} \ln T) = \tag{20}$$

$$= (-1)^{\bar\nu} \sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} \frac{\sin\{(N+1)X\}}{\sin X} \cos(NX - \varphi) + O(H^3 T^{-1/2} K^{-1} \ln T) =$$

$$= (-1)^{\bar\nu} R_2 + O(H^3 T^{-1/2} K^{-1} \ln T),$$

где использовано, что (см. (3))

$$0 < X(n) < \frac{\pi}{2K}$$

для $n \in (e^{-1/K}P_0, P_0)$.

(C) Так как

$$\frac{1}{\sin X} = \frac{1}{X} + 2X \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^2\pi^2 - X^2},$$

то

$$R_2 = \sum_{e^{-1/K}P_0 < n < P_0} \frac{\sin\{(N+1)X\}}{X} \cos(NX - \varphi) + \tag{21}$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \sum_{e^{-1/K}P_0 < n < P_0} \frac{X(n)}{m^2\pi^2 - X^2(n)} \cos\{NX(n) - \varphi(n)\} = R_3 + R_4$$

где (см. (3), (19))

$$NX(n) - \varphi(n) = -(T_1 \ln n + \beta). \tag{22}$$

Если принять во внимание, что

$$\frac{d}{dn} \frac{X}{m^2\pi^2 - X^2} < 0, \quad 0 < \frac{X}{m^2\pi^2 - X^2} < \frac{\pi}{2K} \frac{1}{m^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4K^2}} < \frac{A}{Km^2},$$

(в этом месте мы предполагаем, что n обозначает действительное переменное $\geqq 1$), то, с помощью оценки А. А. Карацубы ([1], стр. 89), получаем

$$\sum_{e^{-1/K}P_0 < n < P_0} \frac{X}{m^2\pi^2 - X^2} \cos(NX - \varphi) = O\left(\frac{1}{Km^2}\sqrt{P_0}T^{\varepsilon}\right), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно,

$$R_4 = O\left(\sqrt{P_0}T^{\varepsilon}K^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right) = O(\sqrt{P_0}T^{\varepsilon}K^{-1})$$

и

$$R_2 = R_3 + O(\sqrt{P_0}T^{\varepsilon}K^{-1}). \tag{23}$$

(D) Теперь (см. (2), (16), (17), (20), (22), (23))

$$\sum_{k=0}^{N} Z(t_{\bar{v}+k}) = \frac{(-1)^{\bar{v}}}{\sqrt{P_0}} (N+1)\Phi + O(K^2T^{\varepsilon} \ln T) +$$

$$+ O(HT^{\varepsilon}K^{-1} \ln T) + O(H^3T^{-3/4}K^{-1} \ln T) + O(T^{\varepsilon}K^{-1}),$$

т. е. (см. (10))

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} Z(t_{\bar{\nu}+k})=\frac{(-1)^{\bar{\nu}}}{\sqrt{P_0}}\,\Phi+O(K^2T^{\varepsilon}H^{-1})+$$

$$+O(T^{\varepsilon}K^{-1})+O(H^2T^{-3/4}K^{-1})+O\{T^{\varepsilon}K^{-1}H^{-1}(\ln T)^{-1}\}=$$

$$=\frac{(-1)^{\bar{\nu}}}{\sqrt{P_0}}\,\Phi+R_5+R_6+R_7+R_8,$$

где (относительно H, K см. (6) и $\varepsilon=\frac{1}{6}\mu$)

$$R_5,\ R_6,\ R_7,\ R_8=O(T^{-\frac{1}{3}\mu}).$$

Доказательство теоремы 1 закончено.

4. В этой части мы обобщим результаты полученные для последовательности $\{t_\nu\}$ на случай семейства последовательностей $\{t_\nu(\tau)\}$, $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$, введенного нами в работе [7].

Однако, для этого семейства последовательностей мы не будем особо отмечать аналоги следствий 1—3. Мы отметим лишь следствия нового типа, касающиеся последовательности $\{t_\nu(\pi/2)\}$ (конечно, аналогичные следствия будут иметь место и для $\{t_\nu(-\pi/2)\}$).

Прежде всего мы положим (ср. (13))

$$\alpha_1(\tau)=\frac{1}{Q_1}\sum_{T\leqq t_{2\nu}\leqq T+H} Z[t_{2\nu}(\tau)],$$
$$\alpha_2(\tau)=\frac{1}{Q_2}\sum_{T\leqq t_{2\nu+1}\leqq T+H} Z[t_{2\nu+1}(\tau)]. \tag{24}$$

Далее напомним (см. [7], (42)), что

$$Z[t_\nu(\tau)]=2(-1)^\nu\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\tau-t_\nu(\tau)\ln n)+O(T^{-1/4}),$$

для $t_\nu(\tau)\in\langle T,T+H\rangle$. Следовательно, (ср. (18)—(20))

$$\Phi(\tau)=\Phi(T,N,K;\tau)=\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\frac{\sin\{(N+1)X\}}{(N+1)X}\cos(NX-\bar{\varphi}),$$

где (ср. (19), (22))

$$\bar{\varphi}=\varphi-\tau=t_{\bar{\nu}}(\tau)\ln n-\tau.$$

$\Phi(\tau)$ есть обобщенная модулированная короткая тригонометрическая сумма.

Заметим, что в случае семейства последовательностей $\{t_\nu(\tau)\}$ имеем (ср. (1))

$$\bar{\nu}(\tau)=\min\{\nu:\ t_\nu(\tau)\in\langle T,\ T+H\rangle\},$$

$$\bar{\nu}(\tau)+N(\tau)=\max\{\nu:\ t_\nu(\tau)\in\langle T,\ T+H\rangle\},$$

так что, вообще говоря, $\bar{\nu}=\bar{\nu}(0)\neq\bar{\nu}(\tau),\ \tau\neq 0$.

Теперь, способом аналогичным использованному в части 3, получается

Теорема 2. По гипотезе Линделёфа,

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} Z[t_{\bar{\nu}+k}(\tau)]=\frac{(-1)^{\bar{\nu}}}{\sqrt{P_0}}\,\Phi(\tau)+O(T^{-\frac{1}{6}\mu}),\ T\to\infty, \tag{25}$$

для

$$H=T^{\mu},\quad K=T^{\frac{\mu}{3}}$$

($0<\mu$ — сколь угодно малое число), равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi,\ \pi\rangle$.

Далее, в случае (7) имеет место (см. [7], (46), (53), $\frac{1}{6}\to\Delta$) следующая формула

$$\sum_{T\leq t_\nu\leq T+H_1}(-1)^{\nu}Z[t_\nu(\tau)]=\frac{1}{\pi}\,H_1\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(T^{\Delta}\ln T),$$

равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi,\ \pi\rangle$.

Следовательно, по гипотезе Линделёфа имеем (ср. (9), (10))

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}(-1)^{\bar{\nu}+k}Z[t_{\bar{\nu}+k}(\tau)]= \tag{26}$$

$$=2\cos\tau+O\{T^{-\mu}(\ln T)^{-1}\cos\tau\}+O(T^{-\frac{5}{6}\mu})=$$

$$=2\cos\tau+O(T^{-\frac{5}{6}\mu}).$$

Наконец, в силу (24)—(26), по гипотезе Линделёфа имеют место следующие соотношения (ср. (14))

$$\alpha_1(\tau)+\alpha_2(\tau)=2\,\frac{(-1)^{\bar{\nu}}}{\sqrt{P_0}}\,\Phi(\tau)+O(T^{-\frac{1}{6}\mu}), \tag{27}$$

$$\alpha_1(\tau)-\alpha_2(\tau)=4\cos\tau+O(T^{-\frac{5}{6}}\mu). \tag{28}$$

Имеет место

Следствие 4. Если справедлива гипотеза Линделёфа и

$$\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}\right)<0, \tag{29}$$

то

$$\left|\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < A(\mu)\sqrt{P_0}T^{-\frac{1}{6}\mu} \tag{30}$$

$(0 < A(\mu)$ — постоянная, зависящая от выбора μ).

Действительно. Прежде всего (см. (27), (28))

$$\begin{gathered}\left|\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| > \frac{2}{\sqrt{P_0}}\left|\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| - A(\mu)T^{-\frac{1}{6}\mu},\\ \left|\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right)-\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < A(\mu)T^{-\frac{5}{6}\mu}.\end{gathered} \tag{31}$$

Однако,

$$\left|\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < \left|\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right)-\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \tag{32}$$

(см. (29)). Теперь из (32) в силу (31) следует (30).

Следствие 5. Если справедлива гипотеза Линделёфа и

$$\left|\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < A\sqrt{P_0}T^{-\delta},\quad 0<\delta, \tag{33}$$

$(0 < A$ — постоянная), то

$$\alpha_1(\tau)\cdot\alpha_2(\tau) < 0,\quad \tau \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}. \tag{34}$$

Действительно. Прежде всего в силу «свойства наследственности» (см. [8], Следствие 3, $\Delta = \varepsilon = \frac{1}{6}\mu$)

$$\begin{aligned}\alpha_1(\tau)+\alpha_2(\tau)-\left\{\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} &= O(N^{-1}T^{\varepsilon}\ln T)=\\ &= O(T^{-\frac{5}{6}}\mu),\end{aligned} \tag{35}$$

(см. также (10), (12), (13), (24)). Однако (см. (27), (33))

$$\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = O(T^{-\delta})+O(T^{-\frac{1}{6}\mu}).$$

Следовательно (см. (35))

$$\alpha_1(\tau)+\alpha_2(\tau) = O(T^{-\delta})+O(T^{-\frac{1}{6}}\mu) = o(1)$$

для всех $\tau \in \langle -\pi, \pi\rangle$ и (см. (27))

$$\Phi(\tau) = o(\sqrt{P_0}),\quad \tau \in \langle -\pi, \pi\rangle. \tag{36}$$

Так как (см. (27), (28))

$$\alpha_1(\tau)=2\cos\tau+\frac{(-1)^{\bar{\nu}}}{\sqrt{P_0}}\,\Phi(\tau)+o(1),$$

$$\alpha_2(\tau)=-2\cos\tau+\frac{(-1)^{\bar{\nu}}}{\sqrt{P_0}}\,\Phi(\tau)+o(1),$$

то отсюда в силу (36) получаем (34).

5. В этой части, в качестве добавления, мы получим точную асимптотическую формулу для величины

$$W=\sum_{T\le t_\nu\le T+U}1.$$

Прежде всего (см. [2], (42))

$$t_{\nu+1}-t_\nu=\frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{U}{T\ln^2 T}\right);\quad t_\nu,\ t_{\nu+1}\in\langle T,\ T+U\rangle. \tag{37}$$

Эта формула является асимптотической в случае

$$U=o(T\ln T)$$

Пусть

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_1&=\min\{\nu\colon t_\nu\in\langle T,\ T+U\rangle\},\\ \bar{\nu}_1+N_1&=\max\{\nu\colon t_\nu\in\langle T,\ T+U\rangle\}.\end{aligned} \tag{38}$$

Очевидно

$$\mathrm{N}_1=\sum_{\langle t_\nu,\,t_{\nu+1}\rangle\subset\langle T,\,T+U\rangle}1$$

и

$$t_{\bar{\nu}_1+N_1}-t_{\bar{\nu}_1}=\sum_{\nu=\bar{\nu}_1}^{N_1-1}(t_{\nu+1}-t_\nu)=\frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}\,N_1+O\left(\frac{N_1U}{T\ln^2 T}\right)= \tag{39}$$

$$=\frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}\,N_1+O\left(\frac{U^2}{T\ln T}\right),$$

так как в силу (37) имеет место тривиальная оценка $N_1=O(U\ln T)$. Однако (см. (37), (38))

$$U=(t_{\bar{\nu}_1+N_1}-t_{\bar{\nu}_1})+(t_{\bar{\nu}_1}-T)+(T+U-t_{\bar{\nu}_1+N_1})=$$

$$= t_{\bar{\nu}_1+N_1} - t_{\bar{\nu}_1} + O\left(\frac{1}{\ln T}\right).$$

Следовательно (см. (39))

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O(1) + O\left(\frac{U^2}{T}\right)$$

и

$$W = N_1 + 1 = \frac{1}{2\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O(1) + O\left(\frac{U^2}{T}\right).$$

Это и есть точная асимптотическая формула для величины W. Отсюда следует, что

$$W = \frac{1}{2\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O(1), \quad U \leqq \sqrt{T}.$$

(ср. (10)).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карацуба, А. А.: Основы аналитической теории чисел, Москва 1975.

[2] Мозер, Ян: Об одной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 31—43.

[3] Мозер, Ян: Об одной теореме Харди—Литтлвуда в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 45—51.

[4] Мозер, Ян: Добавление к работе: «Об одной теореме Харди—Литтлвуда в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 45—51‘, Acta Arith., 35 (1979), 403—404.

[5] Мозер, Ян: Исправление к работам: "Acta Arith., 31 (1976), 31—43, 31 (1976), 45—51, 35 (1979), 403—404", Acta Arith., Vol. 40.

[6] Мозер, Ян: Новые оценки коротких тригонометрических сумм, Acta Arith., 40 (1982), 357—367.

[7] Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана—Зигеля, Acta Arith., 42 (1982), 1—10.

[8] Мозер, Ян: О свойствах последовательности $\{Z[t_\nu(\tau)]\}$ в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen. 42—43 (1983), 55—63.

[9] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

[10] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-funktion of Riemann, IV, Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105.

Адрес автора:

Поступило: 14. 5. 1982

Ján Moser
Katedra matematickej analýzy MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

SÚHRN

O MODULOVANOM KRÁTKOM TRIGONOMETRICKOM SÚČTE

J. Moser, Bratislava

V práci je zavedený pojem modulovaného krátkeho trigonometrického súčtu Φ. Na základe Lindelöfovej hypotézy je dokázané, že aritmetický priemer hodnôt

$$Z(t_\nu),\quad t_\nu \in \langle T, T+T^\mu \rangle$$

($0<\mu$ — ľubovoľne malé číslo), sa vyjadruje pomocou Φ. Okrem toho je dokázaná súvislosť medzi odhadom pre Φ a znamienkami aritmetických priemerov hodnôt:

$$Z(t_{2\nu}),\quad t_{2\nu} \in \langle T, T+T^\mu \rangle,$$

$$Z(t_{2\nu+1}),\quad t_{2\nu+1} \in \langle T, T+T^\mu \rangle.$$

Použité sú ustálené označenia v teórii Riemannovej dzeta-funkcie: $Z(t)$, $\{t_\nu\}$.

SUMMARY

ON A MODULATED SHORT TRIGONOMETRIC SUM

J. Moser, Bratislava

In the paper the notion of a modulated short trigonometric sum Φ is introduced. Using the Lindelöf hypothesis is proved that the arithmetic mean of the values

$$Z(t_\nu),\quad t_\nu \in \langle T, T+T^\mu \rangle$$

($0<\mu$ — is arbitrary small number) may be expressed by means of Φ. Moreover the connection between the estimate of Φ and the signs of the arithmetic means of the values

$$Z(t_{2\nu}),\quad t_{2\nu} \in \langle T, T+T^\mu \rangle,$$

$$Z(t_{2\nu+1}),\quad t_{2\nu+1} \in \langle T, T+T^\mu \rangle$$

is proved. The standard notations in the theory of Riemann zeta-function: $Z(t)$, $\{t_\nu\}$ are used.