Werk

Label: Article

Jahr: 1984

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?312901348_44-45|log15

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLIV—XLV—1984

ОБ ОДНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

В предлагаемой работе получена асимптотическая формула – кубическая относительно $Z(t)$ – в направлении мемуара Е. К. Титчмарша [6]. А именно, получен момент типа Е. К. Титчмарша для функции $Z^3(t)$, относительно определенного отрезка почтиарифметической последовательности значений t с разностью

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}.$$

Теперь мы приступим к точным формулировкам и доказательствам.

1. Пусть (см. [5], стр. 94, 383)

$$Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right),$$

$$\vartheta=\vartheta(t)=-\frac{1}{2}t\ln\pi+\operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)=$$

$$=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi+O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Далее мы введем последовательность $\{k_\nu\}$, определенную соотношением

$$\vartheta(k_\nu)=\frac{1}{3}\pi\nu,\quad \nu=1,2,\dots. \tag{1}$$

Имеет место

Теорема.

$$\sum_{T\leqq k_\nu\leqq T+U}(-1)^\nu Z^3(k_\nu)=$$

$$=\frac{3}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{3/4}\ln T),\quad U\leqq T^{7/8}\sqrt{\ln T}. \tag{2}$$

Примечание. Соотношение (2) является асимптотическим например в случае

$$U_1 = T^{3/4}\psi,$$

где $\psi = \psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к ∞ функция.

Так как (см. (25))

$$Q = \sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U_1} 1 = \frac{3}{2\pi} U_1 \ln \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U_1^2}{T}\right),$$

то из (2) получаем

Следствие.

$$\frac{1}{Q} \sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U_1} (-1)^\nu Z^3(k_\nu) \sim 2, \quad T \to \infty. \tag{3}$$

Интересно сравнить соотношение (3) и соотношение Е. К. Титчмарша (см. [6], ср. [2], (3))

$$\frac{1}{Q_1} \sum_{T \leqq t_\nu T+H} (-1)^\nu Z(t_\nu) \sim 2, \quad T \to \infty,$$

где

$$H = T^{1/4}, \quad Q_1 = \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} 1$$

и последовательность $\{t_\nu\}$ определена соотношением (ср. (1))

$$\vartheta(t_\nu) = \pi\nu.$$

2. Доказательство теоремы опирается на формулу Римана—Зигеля (см. например [5], стр. 94)

$$Z(t) = 2 \sum_{n \leqq t_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta - t \ln n) + O(t^{-1/4}), \quad t_1 = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \tag{4}$$

и на следующие леммы.

Положим (m, n, p — натуральные числа)

$$V_1 = \sum_{M \leqq k_\nu \leqq k_N} \cos\{k_\nu \ln(mnp)\},$$

где

$$m, n, p \leqq \sqrt{\frac{k_N}{2\pi}} = t_2, \quad mnp \geqq 2,$$

$$k_N \leqq T + U < k_{N+1}, \; M = \max(T, 2\pi m^2, 2\pi n^2, 2\pi p^2)$$

и далее,

$$W_1 = \sum\sum\sum_{\substack{m,\,n,\,p \leqq t_2 \\ mnp \geqq 2}} \frac{1}{\sqrt{mnp}} V_1. \tag{5}$$

Имеет место

Лемма 1.

$$W_1 = O(T^{3/4} \ln T). \tag{6}$$

Положим

$$V_2 = \sum_{M \leqq k_\nu \leqq k_N} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\nu + k_\nu \ln \frac{mn}{p}\right) \tag{7}$$

и

$$W_2 = \sum\sum\sum_{m,\,n,\,p \leqq t_2} \frac{1}{\sqrt{mnp}} V_2. \tag{8}$$

Имеет место

Лемма 2.

$$W_2 = O(T^{3/4}). \tag{9}$$

Нам еще понадобится следующая

Лемма 3.

$$\sum_{T \leqq k_\nu \leqq T+U} Z^4(k_\nu) = O(T \ln^5 T). \tag{10}$$

При доказательстве лемм 1, 2 для оценок внутренних сумм V_1, V_2 применяется метод ван дер Корпута (ср. [6]).

При доказательстве леммы 3 применяются результаты из наших работ [3], [4]. Способ, использованный мною, естественно назвать способом «уплотнения» (см. часть 5 предлагаемой работы, ср. [3], ((11)).

В этой части мы приведем

Доказательство леммы 1. Положим

$$\varphi_1(\nu) = \frac{1}{2\pi} k_\nu \ln(mnp).$$

Предполагая, что k_ν определено соотношением (1) для всех $\nu \geqq 1$, получаем, что

$$\frac{dk_\nu}{d\nu} = \frac{\pi}{3} \frac{1}{\vartheta'(k_\nu)} = \frac{\pi}{3} \frac{1}{\frac{1}{2} \ln \frac{k_\nu}{2\pi} + O\left(\frac{1}{k_\nu}\right)},$$

где использовано первое из соотношений (см. [6])

$$\vartheta'(t)=\frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi}+O\left(\frac{1}{t}\right),\quad \vartheta''(t)\sim\frac{1}{2t}. \tag{11}$$

Следовательно,

$$\varphi_1'(v)=\frac{1}{3}\frac{\ln(mnp)}{2\vartheta'(k_v)}=\frac{1}{3}\frac{\ln(mnp)}{\ln\frac{k_v}{2\pi}+O\left(\frac{1}{k_v}\right)}. \tag{12}$$

Отсюда получаем

$$\varphi_1'(v)\leqq\frac{1}{3}\frac{\ln\left(\frac{k_N}{2\pi}\right)^{3/2}}{(1-\varepsilon)\ln\frac{k_v}{2\pi}}<\frac{1}{2}+\varepsilon', \tag{13}$$

$$\varphi_1'(v)\geqq\frac{1}{3}\frac{\ln 2}{(1+\varepsilon)\ln\frac{k_v}{2\pi}}>\frac{A}{\ln T}, \tag{14}$$

($0<\varepsilon$, ε', ε'' — сколь угодно малые числа). Кроме того (см. (11), (12)), $\varphi_1''(v)<0$, т. е., $\varphi_1'(v)$ — монотонна. Значит (см. [5], стр. 78, Лемма 2 и стр. 73, Лемма 1) имеет место

$$V_1=\int_{M\leqq k_x\leqq k_N}\cos\{2\pi\varphi_1(x)\}\,dx+O(1)=O(\ln T). \tag{15}$$

Отсюда (см. (5)) получаем (6).

4. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 2. Полагая (см. (7))

$$\varphi_2(v)=\frac{1}{3}v+\frac{1}{2\pi}k_v\ln\frac{mn}{p},$$

получаем

$$\varphi_2'(v)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{\ln\frac{mn}{p}}{2\vartheta'(k_v)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\bar{\varphi}_2(v).$$

Отсюда,

$$\bar{\varphi}_2(v)<\frac{\ln(mn)}{(1-\varepsilon)\ln\frac{k_v}{2\pi}}<1+\varepsilon',$$

$$\bar{\varphi}_2(v)>-\frac{\ln p}{(1-\varepsilon)\ln\frac{k_v}{2\pi}}>-\frac{1}{2}-\varepsilon',$$

т. е.,

$$\frac{1}{6}-\varepsilon''<\varphi_2'(\nu)<\frac{2}{3}+\varepsilon''.$$

Так как, кроме того, $\varphi_2''(\nu)$ сохраняет знак во всяком из случаев $mn>p$, $mn<p$, то $\varphi_1'(\nu)$ — монотонна в обоих случаях и обычным способом (ср. (15)) получаем оценку

$$V_2=O(1). \tag{16}$$

В случае $mn=p$ оценка (16) получается тривиальным образом. Отсюда следует оценка (9).

5. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 3. Пусть $\{\tilde{t}_\nu\}$ обозначает последовательность, определенную соотношением (см. [3])

$$\vartheta(\tilde{t}_\nu)=\frac{\pi}{2}\nu.$$

В работе [3], в связи с доказательством гипотезы Е. К. Титчмарша, мы получили оценку (обозначения см. там же)

$$\sum_{T_0\leqq\tilde{t}_\nu\leqq T} Z^4(\tilde{t}_\nu)=O(T\ln^5 T).$$

В работе [4] нам посчастливилось довести эту оценку до асимптотического равенства

$$\sum_{T_0\leqq\tilde{t}_\nu\leqq T} Z^4(\tilde{t}_\nu)\sim\frac{1}{2\pi^3}T\ln^5 T.$$

Теперь мы введем бесконечное семейство последовательностей $\{\tilde{t}_\nu(\tau)\}$, определенных условием

$$\vartheta[\tilde{t}_\nu(\tau)]=\frac{\pi}{2}\nu+\frac{\tau}{2},\quad \tau\in\langle-\pi,\pi\rangle, \tag{17}$$

$(\tilde{t}_\nu(0)=\tilde{t}_\nu)$.

Просмотрев внимательно доказательства в работах [3], [4], мы убедимся в том, что имеет место

Формула.

$$\sum_{T_0\leqq\tilde{t}_\nu(\tau)\leqq T} Z^4[\tilde{t}_\nu(\tau)]\sim\frac{1}{2\pi^3}T\ln^5 T, \tag{18}$$

равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

Далее (см. (1), (17)) получаем, что

$$k_{3\nu}=\tilde{t}_{2\nu},\quad k_{3\nu+1}=\tilde{t}_{2\nu+1}(-\pi/3),\quad k_{3\nu+2}=\tilde{t}_{2\nu+1}(\pi/3).$$

Так как (см. (18))

$$\sum_{T\leq \tilde{t}_\nu(\tau)\leq 2T} Z^4[\tilde{t}_\nu(\tau)]\sim\frac{1}{2\pi^3}T\ln^5 T,$$

то получаем

$$\sum_{T\leqq k_{3\nu}\leqq T+U} Z^4(k_{3\nu})=\sum_{T\leqq \tilde{t}_{2\nu}\leqq T+U} Z^4(\tilde{t}_{2\nu})\leqq \tag{19}$$
$$\leqq \sum_{T\leqq \tilde{t}_\nu\leqq 2T} Z^4(\tilde{t}_\nu)<AT\ln^5 T,$$

$$\sum_{T\leqq k_{3\nu+1}\leqq T+U} Z^4(k_{3\nu+1})<\sum_{T\leqq \tilde{t}_\nu(-\pi/3)\leqq 2T} Z^4[\tilde{t}_\nu(-\pi/3)]<AT\ln^5 T, \tag{20}$$

$$\sum_{T\leqq k_{3\nu+2}\leqq T+U} Z^4(k_{3\nu+2})\leqq\sum_{T\leqq \tilde{t}_\nu(\pi/3)\leqq 2T} Z^4[\tilde{t}_\nu(\pi/3)]<AT\ln^5 T.$$

Наконец, складывая соотношения (19)—(21), получаем (10).

6. В этой части мы приведем

Доказательство теоремы. Из формулы Римана—Зигеля (4) получаем, что

$$Z^3(t)=S+R_1+R_2+O(t^{-3/4}),$$

где

$$S=2\sum\sum\sum_{m,n,p\leqq t_1}\frac{1}{\sqrt{mnp}}\cos(3\vartheta-t\ln(mnp))+$$
$$+6\sum\sum\sum_{m,n,p\leqq t_1}\frac{1}{\sqrt{mnp}}\cos\left(\vartheta-t\ln\frac{mn}{p}\right)=S_1+S_2 \tag{22}$$

и

$$R_1=O\left\{t^{-1/4}\left(\sum_{n\leqq t_1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)\right)^2\right\},$$

$$R_2=O\left\{t^{-1/2}\left|\sum_{n\leqq t_1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)\right|\right\}.$$

Так как (см. [5], стр. 94, 109)

$$Z(t)=O(t^{1/6}\ln t),$$

то (см. также (4))

$$R_1=O\{t^{-1/4}Z^2(t)\}+O(t^{-1/2}|Z(t)|)+O(t^{-3/4})=$$
$$=O\{t^{-1/4}Z^2(t)\}+O(t^{-1/3}\ln t),$$
$$R_2=O\{t^{-1/2}|Z(t)|\}+O(t^{-3/4})=O(t^{-1/3}\ln t)$$

и, следовательно,

$$Z^3(t)=S+R_3+O(t^{-1/3}\ln t), \tag{23}$$

где

$$R_3=O\{t^{-1/4}Z^2(t)\}. \tag{24}$$

(A) Так как в случае последовательности $\{k_\nu\}$ имеют место (ср. [6], стр. 102, [1], (40)—(42)) соотношения

$$k_{\nu+1}-k_\nu=\frac{1}{3}\frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{U}{T\ln^2 T}\right),$$

$$\sum_{T\le k_\nu\le T+U}1=\frac{3}{2\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U^2}{T}\right)+O(1), \tag{25}$$

то (см. (23), (24))

$$\sum_{T\le k_\nu\le T+U}O(k_\nu^{-1/3}\ln k_\nu)=O(UT^{-1/3}\ln^2 T) \tag{26}$$

и, пользуясь леммой 3,

$$\sum_{T\le k_\nu\le T+U}R_3(k_\nu)=O\left\{T^{-1/4}\sqrt{U\ln T}\left(\sum_{T\le k_\nu\le T+U}Z^4(k_\nu)\right)^{1/2}\right\}=$$
$$=(T^{1/4}U^{1/2}\ln^3 T). \tag{27}$$

(B) Так как (см. (22))

$$S_1(k_\nu;\,m=n=p=1)=2(-1)^\nu,$$

то

$$\sum_{T\le k_\nu\le T+U}(-1)^\nu S_1(k_\nu;\,m=n=p=1)=\frac{3}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U^2}{T}\right).$$

Следовательно, используя леммы 1, 2, получаем

$$\sum_{T\le k_\nu\le T+U}(-1)^\nu S=\frac{3}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U^2}{T}\right)+O(T^{3/4}\ln T). \tag{28}$$

(C) Теперь (см. (22)—(24), (26)—(28), получаем соотношение

$$\sum_{T\le k_\nu\le T+U}(-1)^\nu Z^3(k_\nu)=\frac{3}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U^2}{T}\right)+$$

$$+O(T^{3/4}\ln T)+O(UT^{-1/3}\ln^2 T)+O(T^{1/4}U^{1/2}\ln^3 T) \tag{29}$$

Так как, однако,

$$\frac{U^2}{T},\ UT^{-1/3}\ln^2 T,\ T^{1/4}U^{1/2}\ln^3 T\leqq T^{3/4}\ln T$$

в случае

$$U\leqq T^{7/8}\sqrt{\ln T},$$

то из (29) следует (2), т. е., теорема доказана.

7. Наконец мы обобщим кубическое соотношение (2). А именно, нетрудно убедиться в том, что для семейства последовательностей $\{k_\nu(\tau)\}$, определенных условием

$$\vartheta[k_\nu(\tau)]=\frac{\pi}{3}\nu+\frac{\tau}{3},\quad \tau\in\langle-\pi,\pi\rangle,$$

имеют место соотношения

$$\sum_{T\leq k_\nu\leq T+U}(-1)^\nu Z^3[k_\nu(\tau)]=\frac{3}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(T^{3/4}\ln T),$$

$$U\leqq T^{7/8}\sqrt{\ln T},$$

где O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мозер, Ян.: Об одной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 31—43.

[2] Мозер, Ян: Исправление к работам: „Acta Arith., 31 (1976), 31—43; 31 (1976), 45—51; 35 (1979), 403—404", Acta Arith., 40 (1981), 97—107.

[3] Мозер, Ян: Доказательство гипотезы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 36 (1980), 147—156.

[4] Мозер, Ян: Об одной биквадратной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., 42—43, (1983), 35—39.

[5] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

[6] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, (IV), Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105.

Адрес автора:

Поступило: 4. 2. 1982

Ján Moser
Katedra matematickej analýzy MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

SÚHRN

O JEDNOM KUBICKOM VZORCI V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

J. Moser, Bratislava

V práci je dokázaný vzorec

$$\sum_{T \leqq k_v \leqq T+U} (-1)^v Z(k_v) = \frac{3}{\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{3/4} \ln T), \quad U \leqq T^{7/8} \sqrt{\ln T},$$

kde $Z(t) = e^{i\vartheta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, $\{k_v\}$ je postupnosť definovaná vzťahom $\vartheta(k_v) = \frac{1}{3} \pi v$, $v = 1, 2, \ldots$ a $\vartheta(t)$ je známa funkcia.

SUMMARY

ON A CUBIC FORMULA IN THE THEORY OF RIEMANN ZETA-FUNCTION

J. Moser, Bratislava

In the paper the formula

$$\sum_{T \leqq k_v T+U} (-1)^v Z^3(k_v) = \frac{3}{\pi} U \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{3/4} \ln T), \quad U \leqq T^{7/8} \sqrt{\ln T},$$

in proved, where $Z(t) = e^{i\vartheta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, $\{k_v\}$ is a sequence defined by $\vartheta(k_v) = \frac{1}{3} \pi v$, $v = 1, 2, \ldots$ and $\vartheta(t)$ is known function.