UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLIV—XLV—1984

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ СНИЗУ ДЛЯ РАССТОЯНИЙ СОСЕДНИХ НУЛЕЙ ФУНКЦИИ $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. Пусть ([5], стр. 94)

$$Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \tag{1}$$

где ([5], стр. 383)

$$\vartheta(t)=-\frac{1}{2}t\ln\pi+\operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi+O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Пусть, далее, $\{t_0\}$ обозначает последовательность значений (см. [3]), для которых

$$Z'(t_0)=0,\ \gamma'<t_0<\gamma'',\ t_0\to+\infty,$$

где

$$\varrho'=\frac{1}{2}+i\gamma',\ \varrho''=\frac{1}{2}+i\gamma''$$

соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой. Пусть, наконец, $\{\gamma\}$ обозначает возрастающую последовательность ординат нулей

$$\varrho=\frac{1}{2}+i\gamma$$

функции $\zeta(s)$, $s=\sigma+it$, (ордината кратного нуля считается один раз).

В силу [4], стр. 34, (Следствие 2 и 3) имеет место следующее: члены последовательностей $\{t_0\}$, $\{\gamma\}$ отделяют друг друга при $t_0>T>0$. Значит, последовательности

$$\{m(t_0)\},\ \{Q(t_0)\},\ t_0>T,$$

где

$$m(t_0)=\min\{t_0-\gamma',\ \gamma''-t_0\},\qquad Q(t_0)=\max\{t_0-\gamma',\ \gamma''-t_0\},\tag{2}$$

однозначно определены.

Введем подпоследовательность $\{\tilde{t}_0\}$ согласно условию (ср. [3], стр. 308)

$$|Z(\tilde{t}_0)|>\frac{1}{(\tilde{t}_0)^\alpha},\quad \alpha>0.\tag{3}$$

Имеет место

Теорема 1. По гипотезе Римана,

$$\tilde{\gamma}''-\tilde{\gamma}'>(\tilde{t}_0)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{A}{\ln\ln\tilde{t}_0}},\quad \tilde{t}_0\to+\infty,\tag{4}$$

где $\tilde{\gamma}'<\tilde{t}_0<\tilde{\gamma}''$, $(0<A$ — абсолютная постоянная).

Примечание 1. Оценка (4) улучшает соответсвующую оценку из работы [3], стр. 308.

Как известно ([5], стр. 374, 379), из ослабленной гипотезы Мертенса

$$\int_1^X\left\{\frac{M(u)}{u}\right\}^2\mathrm{d}u<A\ln X,$$

($M(u)$ — функция Мертенса) следует оценка

$$\gamma''-\gamma'>\frac{1}{\gamma'\exp\left(A\dfrac{\ln\gamma'}{\ln\ln\gamma'}\right)}.\tag{5}$$

Напомним далее, что из ослабленной гипотезы Мертенса следует:

(a) гипотеза Римана ([6], стр. 23),

(b) утверждение, что все нули $\frac{1}{2}+i\gamma$ являются простыми ([5], стр. 374).

Так как, в силу (5), (см. (2)),

$$Q(t_0)\geqq\frac{1}{2}(\gamma''-\gamma')>\frac{1}{\gamma'\exp\left(A\dfrac{\ln\gamma'}{\ln\ln\gamma'}\right)},$$

то вопрос об оценке снизу величины $Q(t_0)$, в случае справедливости ослабленной гипотезы Мертенса, является тривиальным. Не так обстоит дело с вопросом об оценке снизу величины $m(t_0)$. Покажем, что в этом направлении имеет место

Теорема 2. Если справедлива ослабленная гипотеза Мертенса, то

$$m(t_0) > \frac{1}{\exp\left(A \frac{\ln^2 t_0}{\ln \ln t_0}\right)}. \tag{6}$$

2. В этой части мы приведем

Доказательство теоремы 1. Используем формулу ([3], стр. 308)

$$\frac{\zeta''}{\zeta}\left(\frac{1}{2}+it_0\right) = \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + \{\vartheta'(t_0)\}^2 + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \tag{7}$$

где ([3], *стр.* 309)

$$\vartheta'(t_0) = \frac{1}{2}\ln t_0 - \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{t_0}\right) \tag{8}$$

и оценку ([5], стр. 379)

$$\left|\zeta''\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| < A \exp\left(A \frac{\ln t}{\ln \ln t}\right) < \exp\left(A \frac{\ln t}{\ln \ln t}\right). \tag{9}$$

Из (7) в силу (1), (9) получаем

$$\exp\left(A \frac{\ln t_0}{\ln \ln t_0}\right) > \frac{n(\gamma')|Z(t_0)|}{(t_0-\gamma')^2},$$

т. е.

$$t_0 - \gamma' > \frac{\{n(\gamma')|Z(t_0)|\}^{\frac{1}{2}}}{\exp\left(A \frac{\ln t_0}{\ln \ln t_0}\right)}, \tag{10}$$

и, аналогичным образом,

$$\gamma'' - t_0 > \frac{\{n(\gamma'')|Z(t_0)|\}^{\frac{1}{2}}}{\exp\left(A \frac{\ln t_0}{\ln \ln t_0}\right)}, \tag{11}$$

где $n(\gamma)$ — кратность нуля $1/2 + i\gamma$. Складывая (10) и (11), получаем

$$\gamma'' - \gamma' > \frac{\sqrt{|Z(t_0)|}}{\exp\left(A \frac{\ln t_0}{\ln \ln t_0}\right)}. \tag{12}$$

Отсюда, в случае (3), следует (4).

3. В этой части мы приведем

Доказательство теоремы 2. Прежде всего, в силу теоремы Крамера–Ландау ([5], стр. 378):

$$\frac{1}{\left|\zeta'\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|}<\exp\left(A\,\frac{\ln^2 t}{\ln\ln t}\right). \tag{13}$$

Далее (см. (1)),

$$-\zeta'\left(\frac{1}{2}+it\right)=\vartheta'(t)e^{-i\vartheta(t)}Z(t)+ie^{-i\vartheta(t)}Z'(t).$$

Полагая в этом соотношении $t=t_0$, (напомним, что $Z'(t_0)=0$), принимая во внимание (8), получаем

$$\left|\zeta'\left(\frac{1}{2}+it_0\right)\right|=\vartheta'(t_0)\,|Z(t_0)|<A\,|Z(t_0)|\,\ln t_0. \tag{14}$$

Следовательно, (см. (13), (14)),

$$|Z(t_0)|>\frac{1}{A\ln t_0\exp\left(A\,\frac{\ln^2 t_0}{\ln\ln t_0}\right)}>\frac{1}{\exp\left(A\,\frac{\ln^2 t_0}{\ln\ln t_0}\right)}. \tag{15}$$

Теперь, (см. (2), (10), (11)),

$$m(t_0)>\frac{\sqrt{|Z(t_0)|}}{\exp\left(A\,\frac{\ln t_0}{\ln\ln t_0}\right)}$$

и отсюда, в силу (15), следует (6).

4. В этой части мы обратим внимание на следующее обстоятельство: в случае справедливости гипотезы Римана, вопрос об оценке снизу величины $\gamma''-\gamma'$ связан с вопросом об оценке снизу величины $|Z(t_0)|$, $\gamma'<t_0<\gamma''$, (см. (12)).

Если имеет место

$$|Z(t_0)|>\frac{1}{t_0^2}, \tag{16}$$

то, (см. (12)),

$$\gamma''-\gamma'>\frac{1}{t_0\exp\left(A\,\frac{\ln t_0}{\ln\ln t_0}\right)}>\frac{1}{\gamma'\exp\left(A\,\frac{\ln\gamma'}{\ln\ln\gamma'}\right)},$$

(так как величина $\gamma''-\gamma'$ ограничена, см. [5], стр. 212, независимо от какой бы то ни было гипотезы), т. е., мы получили оценку (5). Однако оценку (5) мы упоминали как следствие из ослабленной гипотезы Мертенса, а теперь она получилась при других предположениях. Следовательно, имеет место

Теорема 3. Если справедлива гипотеза Римана и для всех членов последовательности $\{t_0\}$ (начиная с некоторого) справедлива оценка (16), то имеет место

$$\gamma'' - \gamma' > \frac{1}{\gamma' \exp\left(A \dfrac{\ln \gamma'}{\ln \ln \gamma'}\right)}$$

5. Теперь мы приведем некоторые численные данные, касающиеся оценки (16). Лемер (см. [1]) открыл следующую пару нулей функции $\zeta(s)$,

$$\text{(L)} \qquad \frac{1}{2} + i17\,143{,}7319\,; \quad \frac{1}{2} + i17\,143{,}7673\,.$$

Эта – в высшей степени интересная – пара нулей обладает наименьшим расстоянием $\gamma'' - \gamma'$ и наименьшим значением $|Z(t_0)|$ среди первых 25 000 нулей (если счет вести в положительном направлении от действительной оси).

Вот численные значения, полученные Лемером ([1], стр. 106, 107), в принятых нами обозначениях:

$$\gamma'' - \gamma'\Big|_{(L)} = \min_{\langle \gamma', \gamma'' \rangle \subset \langle 0, T_1 \rangle} \{\gamma'' - \gamma'\} \doteq 0{,}0354\,,$$

$$|Z(t_0)|\Big|_{(L)} = \min_{t_0 \in \langle 0, T_1 \rangle} \{|Z(t_0)|\} \doteq 0{,}00215\,,$$

где $T_1 = 2\pi \cdot 3492$. Однако,

$$\frac{1}{t_0^2}\Big|_{(L)} < (1{,}7 \cdot 10^4)^{-2} < 10^{-8}\,,$$

$$|Z(t_0)|\Big|_{(L)} > 2 \cdot 10^{-3}.$$

В силу этого результата делаем

Примечание 2. При $0 < t_0 < \gamma_N$, $N = 25\,000$, не существует исключений из оценки (16).

Примечание 3. Вероятно вообщее не существует исключений из оценки

$$|Z(t_0)| > \frac{1}{t_0^2}.$$

Наконец заметим, что пары нулей (L) обнаружил и Меллер (см. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lehmer, D. H.: Extended computation of the Riemann zeta-function, Mathematika, 3 (1956), 102—108.

[2] Меллер, Н. А.: О вычислениях, связанных с проверкой гипотезы Римана, ДАН СССР, 1958, т. 123, №2.
[3] Мозер, Ян: Об одном новом следствии из гипотезы Римана, Acta Arith., 25 (1974), 307—311.
[4] Мозер, Ян: Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой, Acta Arith., 26 1974, 33—39.
[5] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.
[6] Titchmarsh, E. C.: Some properties of the Riemann zeta-funkction, Quart. J. Math., 14 (1943), 16—26.

Адрес автора:

Ján Moser
Katedra matematickej analýzy MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступило: 20. 5. 1982

SÚHRN

O NIEKTORÝCH ODHADOCH ZDOLA PRE VZDIALENOSŤ SUSEDNÝCH NULOVÝCH BODOV FUNKCIE $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$

J. Moser, Bratislava

V práci sú dokázané nové odhady zdola:

(a) pre vzdialenosť susedných koreňov rovnice $Z(t)=0$,

(b) pre vzdialenosť koreňov rovníc $Z(t)=0$, $Z'(t)=0$,

ktoré sa od istého $T>0$ navzájom oddeľujú.

Odhady sú urobené na základe oslabenej Mertensovej hypotézy a Riemannovej hypotézy. $Z(t)$ označuje štandardnú funkciu v teórii Riemannovej dzeta-funkcie.

SUMMARY

ON SOME LOWER ESTIMATES FOR THE DISTANCE OF CONSECUTIVE ZERO POINTS OF THE FUNCTION $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$

J. Moser, Bratislava

New lower estimates of the following kind are proved:

(a) for the distance of the consecutive roots of the equation $Z(t)=0$,

(b) for the distance of roots of the equations $Z(t)=0$, $Z'(t)=0$,

which separates each other begining from certain.

The weakened Mertens and the Riemann hypothesis is used to prove the estimates. $Z(t)$ denotes the standard function in the theory of Riemann zeta-function.