UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XXXIX — 1980

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE NULLSTELLEN DER LÖSUNGEN DER QUASILINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 4. ORDNUNG

ADELA FILLOVÁ, Bratislava

Gewidmet dem Professor O. Borůvka zu seinem achtzigsten Geburtstag

In dieser Arbeit befassen wir uns mit der Untersuchung einiger Eigenschaften der Lösungen der quasilinearen Differentialgleichungen

$$(ry''')' + qy = 0 \tag{a}$$

$$(rz')''' + qz = 0 \tag{b}$$

mit stetigen Koeffizienten $r(x)$ und $q(x)$ im Interval $(-\infty, \infty)$. Hauptsächlich interessiert uns das Problem, wann alle Lösungen oszillatorisch und wann alle Lösungen nichtoszillatorisch sind, d. h. dass diese denselben Charakter haben. Für die Differentialgleichung $y^{(4)} + Q(x)y = 0$ wurde dieses Problem von M. Švec [3] gelöst.

Im Weiteren werden wir voraussetzen, dass $r(x) > 0$, $q(x) \geqq 0$ stetige Funktionen für $x \in (-\infty, \infty)$ sind, $q(x)$ ist nicht identisch gleich Null auf keinem Intervall und

$$\int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{r(x)} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{r(x)} \mathrm{d}x = \infty.$$

Verabredung 1. Die nichttriviale Lösung der quasilinearen Differentialgleichung nennen wir oszillatorisch in (x_1, ∞) $[(-\infty, x_1)]$, wenn die Menge ihrer Nullstellen von oben nicht beschränkt ist [von unten nicht beschränkt ist]. Anderenfalls ist diese nichtoszillatorisch.

Verabredung 2. Über die Lösungen irgendeiner quasidifferentialen Gleichung werden wir sagen, dass sie am Intervall (x_1, ∞) $[(-\infty, x_1)]$ einen gleichen Charakter haben, wenn sie auf diesem Intervall alle oszillatorisch oder alle nichtoszillatorisch sind.

Bemerkung 1.1. Wenn u, v zwei Funktionen mit stetigen ersten Ableitungen sind, dann sind sie gleichen Charakters in (x_1, ∞), wenn der Wronskian

$W(u, v) \neq 0$ oder $W(u, v) \equiv 0$ für $x \in (x_1, \infty)$ wo $x_1 \in (-\infty, \infty)$ ist.

Ähnlich wie in [3] S. 450 kann folgende Behauptung bewiesen werden:

Bemerkung 1.2. Jede Lösung der quasilinearen Differentialgleichung (a) [bezw. (b)] hat wenigstens eine Nullstelle am Intervall $(-\infty, \infty)$.

Es sei $x \in (-\infty, \infty)$. Bezeichnen wir mit $M(x)$ [$N(x)$] die Menge der Lösungen der Gleichung (a) [bezw. (b)], welche in $x \in (-\infty, \infty)$ eine Nullstelle haben. Mit Rücksicht auf die Bemerkung 1.2 gehört jede Lösung der Gleichung (a) [Gleichung (b)] wenigstens einer Menge $M(x)$ [Menge $N(x)$] an.

Es sei $x_1 \in (-\infty, \infty)$ ein beliebiger Punkt. Teilen wir die Lösungen der Menge $M(x_1)$ [$N(x_1)$] in zwei Gruppen:

I. In die erste Gruppe gehören jene Lösungen $u(x) \in M(x_1)$ [$v(x) \in N(x_1)$], für welche gilt

$$\begin{aligned} &u'(x_1)u''(x_1)u'''(x_1) \neq 0 \\ &\operatorname{sgn} u'(x_1) = \operatorname{sgn} u'''(x_1) \neq \operatorname{sgn} u''(x_1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\left[\begin{aligned} &v'(x_1)(rv')'(x_1)(rv')''(x_1) \neq 0 \\ &\operatorname{sgn} v'(x_1) = \operatorname{sgn}(rv')''(x_1) \neq \operatorname{sgn}(rv')'(x_1) \end{aligned}\right] \tag{1.1'}$$

II. In die zweite Gruppe gehören die Lösungen der Menge $M(x_1)$ [$N(x_1)$], welche sich nicht in der ersten Gruppe befinden.

Hilfssatz 1.1. Die Lösungen $u(x)$ [$v(x)$] der quasilinearer Differentialgleichung (a) [(b)] der II. Gruppe $M(x_1)$ [$N(x_1)$] haben im Intervall (x_1, ∞) den gleichen Charakter. (Siehe [3] S. 453, Hilfssatz 3.α.).

Es sei $x_1 \in (-\infty, \infty)$ ein beliebiger Punkt. Mit M_{ik} bezeichnen wir die Menge der Lösungen der quasilinearen Differentialgleichung (a), welche folgende Bedingungen erfüllt

$$y^{(j)}(x_1) = 0 \quad \text{für} \quad j \neq i, k, \quad 0 \leqq i < k \leqq 3$$

und mit N_{ik} die Menge der Lösungen der quasilinearen Differentialgleichung (b), welche folgende Bedingungen erfüllt

$$z(x_1) = 0, \quad (rz')^{(j-1)}(x_1) = 0 \quad \text{für} \quad j \neq i, k, \quad 0 < i < k \leqq 3$$

bezw. $(rz')^{(j-1)}(x_1) = 0$ $j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, 3$; $i = 0$.

Bemerkung 1.3. Es seien $y_1(x)$, $y_2(x)$ linear unabhängige Lösungen aus M_{ik}. Die Funktion $A_{ik}(x) = y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)$ hat folgende Eigenschaften:

a) Wenn $u_1(x)$, $u_2(x)$ linear unabhängige Lösungen aus M_{ik} sind, dann ist $u_1'(x)u_2(x) - u_1(x)u_2'(x) = cA_{ik}(x)$, wo c eine von Null verschiedene Konstante ist.

b) $A_{ik}(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_1$.

c) x_1 ist eine $(i+k-1)$ fache Nullstelle der Funktion $A_{ik}(x)$. Man kann es immer so einrichten, dass $A_{ik}(x)>0$ für $x \neq x_1$, wenn $i+k$ ungerade ist, $A_{ik}(x) \gtreqless 0$ für $x \gtreqless x_1$ wenn $i+k$ gerade ist.

d) Die Funktion $A_{ik}(x)$ ist für $x \in (x_1, \infty)$ stetig, wachsend, positiv. (Siehe [1] S. 53, Satz 1.7.)

Unter der Voraussetzung, dass $z_1(x)$, $z_2(x)$ linear unabhängige Lösungen aus N_{ik} sind, gilt eine analoge Behauptung für die Gleichung (b).

Im Weiteren bezeichnen wir mit $y_k(x)$ die Lösungen der Gleichung (a), welche die Anfangsbedingungen

$$y_k^{(j)}(x_1) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (j, k = 0, 1, 2, 3).$$

erfüllen.

Es ist ersichtlich, dass diese das Fundamentalsystem dieser Gleichung bilden.

Hilfssatz 1.2. Die Lösungen $u(x)$ der quasilinearen Differentialgleichung (a) I. Gruppe $M(x_1)$ haben für $x < x_1$ den gleichen Charakter.

Beweis. Es sei $u(x)$ eine beliebige Lösung der I. Gruppe $M(x_1)$, für welche z.B. gelte: $u(x_1)=0$, $u'(x_1)>0$, $u''(x_1)<0$, $u'''(x_1)>0$. Durch Transformation der unabhängiger Veränderlichen $x = x_1 - t$ erhalten wir die Lösung $u(x)$ in der Form $u(x) = u(x_1 - t) = v(t)$, wobei $u(x_1) = v(0) = 0$,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^3v}{dt^3} = -\frac{d^3u}{dx^3}.$$

Weiter wurde erfüllt

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{aligned} &\dot v(0)\ddot v(0)\dddot v(0) \neq 0, \quad \dot v(0) = -u'(x_1) < 0, \\ &\ddot v(0) = u''(x_1) < 0, \quad \dddot v(0) = -u'''(x_1) < 0. \end{aligned}$$

$v(t)$ entspricht der Gleichung

$$\text{(ā)} \qquad (\bar r \ddot v)^{\cdot\cdot} + \bar q v = 0$$

wo $\bar r(t) = r(x_1 - t) > 0$, $\bar q(t) = q(x_1 - t) \geqq 0$ (die Gleichheit gilt auf keinem Intervall).

Es wird die Bezeichnung $\dot v = \dfrac{dv}{dt}$ angewendet.

Es sei $z_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ ein solches Fundamentalsystem der Gleichung (ā), dass

$$\text{(1.3)} \qquad \begin{aligned} z_0(t) &= y_0(x) & z_2(t) &= y_2(x) \\ z_1(t) &= -y_1(x) & z_3(t) &= -y_3(x) \end{aligned}$$

die Anfangsbedingungen

$$\text{(1.4)} \qquad z_k^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (j, k = 0, 1, 2, 3)$$

erfüllen.

Aus der Bemerkung 1.3 geht hervor, dass die Funktionen $z_k(t)$ in $(0, \infty)$ denselben Charakter haben. Nach dem Beweis des Hilfssatzes 1.1 [3, S. 453, Hilfssatz 3.α], hat auch $v(t)$

$$v(t) = \dot{v}(0)z_1(t) + \ddot{v}(0)z_2(t) + \dddot{v}(0)z_3(t) \tag{1.5}$$

denselben Charakter wie $z_k(t)$ und weil $v(t) = u(x_1 - t) = u(x)$, hat auch $u(x)$ für $x < x_1$ den gleichen Charakter. Weil $u(x)$ die beliebige Lösung der I. Gruppe der Menge $M(x_1)$ war, ist damit die Behauptung bewiesen. Teilen wir die Lösungen der I. Gruppe der Menge $M(x_1)$ $[N(x_1)]$ in zwei Untergruppen [3].

I. a) Für jede Nullstelle $\varrho > x_1$ der Lösung $u(x)$ $[v(x)]$ gilt

$$\begin{gathered} u'(\varrho)u''(\varrho)u'''(\varrho) \neq 0 \\ \operatorname{sgn} u'(\varrho) = \operatorname{sgn} u'''(\varrho) \neq \operatorname{sgn} u''(\varrho) \end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\left[\begin{gathered} v'(\varrho)(rv')'(\varrho)(rv')''(\varrho) \neq 0 \\ \operatorname{sgn} v'(\varrho) = \operatorname{sgn}(rv')''(\varrho) \neq \operatorname{sgn}(rv')'(\varrho) \end{gathered}\right] \tag{1.6'}$$

I. b) In diese Untergruppe gehören die Lösungen der I. Gruppe, für welche wenigstens eine Nullstelle $\eta > x_1$ existiert, für welche (1.6) [(1.6′)] nicht gilt.

Es ist ersichtlich, dass die Lösung $u(x)$ $[v(x)]$ der Gleichung (a) [der Gleichung (b)] der Untergruppe I. b, in die II. Gruppe der Menge $M(\eta)$ $[N(\eta)]$ gehört.

Hilfssatz 1.3. Die Lösungen $u(x)$ der kvasilinearen Differentialgleichung (a) [bezw. $v(x)$ der Gleichung (b)] der Untergruppe I. b haben denselben Charakter wie die Lösungen $y(x)$ $[z(x)]$ der Gleichung (a) [Gleichung (b)] der II. Gruppe.

Ähnlich wie in [1] S. 47—49 kann folgende Behauptung bewiesen werden:

Bemerkung 1.4. Es seien $r(x) > 0$, $q(x) \geqq 0$ stetige Funktionen für $x \in (-\infty, \infty)$, wobei $q(x)$ identisch nicht gleich Null ist auf keinem Intervall. Es sei $x_1 \in (-\infty, \infty)$, $0 \leqq k \leqq 3$ ist eine ganze Zahl und $y(x)$ sei eine solche nichttriviale Lösung der Differenzialgleichung (a) welche die Bedingungen (A.1), (A.2) erfüllt:

$$y^{(j)}(x_1) \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{A.1}$$

haben gleiche Zeichen

$$\begin{gathered} y^{(k)}(x_1) \neq 0 \\ y^{(j)}(x_1) = 0 \quad (j = k+1, \ldots, 3). \end{gathered} \tag{A.2}$$

Dann kann im Punkt ξ, der ein beliebiger Punkt aus dem Intervall (x_1, ∞) ist, höchstens eine der Funktionen $y^{(j)}(x)$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ die Nullstelle haben. Ist $y^{(m)}(\xi) = 0$, $0 \leqq m \leqq 3$, so ist $y^{(j)}(\xi) \neq 0$, $j = 0, 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, 3$ und es haben die Zahlen $y^{(j)}(\xi)$ mit $j > m$, als auch diejenigen mit $j < m$ das gleiche Vorzeichen.

Bemerkung 1.5. Seien die Voraussetzungen der Bemerkung 1.4 für die Gleichung (a) erfüllt. Es seien $0 \leqq i < k \leqq 3$ ganze Zahlen. $y(x)$ sei die nichttriviale Lösung der Gleichung (a), welche die folgenden Bedingungen erfüllt: $y^{(j)}(x_1) = 0$ für $j \neq i$, k, $0 \leqq i < k \leqq 3$.

Dann ist in jedem Punkt $\xi \in (-\infty, \infty)$, $\xi \neq x_1$ höchstens eine der Funktionen $y^{(j)}(x)$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ gleich Null. Wenn z.B. $y^{(m)}(\xi) = 0$, $0 \leqq m \leqq 3$, dann ist $y^{(j)}(\xi) \neq 0$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, 3)$ und wenn $\xi > x_1$, dann haben die Zahlen $y^{(j)}(\xi)$ für $j > m$ wie auch für $j < m$ gleiche Zeichen. Wenn $\xi < x_1$ dann gilt: $\operatorname{sgn} y^{(j)}(\xi) \neq \operatorname{sgn} y^{(j+1)}(\xi)$ für $j > m$, $\operatorname{sgn} y^{(j-1)}(\xi) \neq \operatorname{sgn} y^{(j)}(\xi)$ für $j < m$.

Bemerkung 1.6. Die Behauptungen 1.4 und 1.5 gelten auch für die Gleichung (b).

Hilfssatz 1.4. a) Es sei irgendeine Lösung der Differentialgleichung (a) der II. Gruppe oszillatorisch und irgendeine Lösung der Gleichung (b) der II. Gruppe sei ebenfalls oszillatorisch. Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung (a) auf dem Intervall (x_1, ∞) oszillatorisch.

Beweis. Es habe die Differentialgleichung (a) eine nichtoszillatorische Lösung $u(x)$. Dann existiert eine Nullstelle $\alpha \geqq x_1$ der Lösung $u(x)$, welche die letzte ist. Ohne Verlust an der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass $u(x) > 0$ für $x > \alpha$ ist. Aus der Gleichung (a) erhalten wir $(ru''')'(x) \leqq 0$ (die Gleichheit gilt in keinem Intervall) für $x \geqq \alpha$, also ist $(ru''')(x)$ eine abnehmende Function im Intervall (α, ∞). Zeigen wir, dass $u'''(x)$ in jeder Zahl $x \geqq \alpha$ positiv ist.

Es existiere ein solches $\tau \geqq \alpha$, dass $(ru''')(\tau) \leqq 0$ ist. Für $x > \tau_1 > \tau$ gilt dann

$$u'''(x) = \frac{(ru''')(x)}{r(x)} \leqq \frac{(ru''')(\tau_1)}{r(x)}.$$

Mit Rücksicht auf die Voraussetzung $\int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{r(x)} \mathrm{d}x = \infty$ folgt, dass $\lim_{x \to \infty} u(x) = -\infty$, was jedoch im Widerspruch damit steht, dass $0 < u(x)$ für $x > \alpha$ ist.

Also ist $u'''(x) > 0$ für $x \geqq \alpha$. Daraus folgt, dass $u''(x)$ eine steigende Funktion am Intervall $\langle \alpha, \infty)$ ist. Es können zwei Fälle eintreten:

1. Es existiert eine solche Zahl $\bar{\tau} > \alpha$, dass $u''(x) > 0$ für $x \geqq \bar{\tau}$;
2. $u''(x) < 0$ für $x \geqq \alpha$.

Zuerst untersuchen wir den Fall 1. Da $u''(x)$ eine wachsende Funktion ist, ist $u''(x) > u''(\bar{\tau}) > 0$ für $x > \bar{\tau}$. Daraus $\lim_{x \to \infty} u'(x) = \lim_{x \to \infty} u(x) = +\infty$.

Es existiert also eine solche Zahl $\eta > \bar{\tau}$, dass $u(x) > 0$, $u'(x) > 0$, $u''(x) > 0$ für $x \geqq \eta$ gilt.

Jetzt zeigen wir, dass im Falle 2 eine solche Zahl η existiert, dass für $x \geqq \eta$ $u(x) > 0$, $u'(x) > 0$ ist. In diesem Falle ist $u''(x) < 0$ für $x \geqq \alpha$, deshalb ist $u'(x)$ eine abnehmende Funktion in $\langle \alpha, \infty)$. Es soll eine solche Zahl $\beta > \alpha$

existieren, dass $u'(\beta)\leqq 0$. Für $x\geqq\gamma>\beta$ gilt dann: $u'(x)<u'(\gamma)<0$. Daraus folgt $\lim_{x\to\infty} u(x)=-\infty$, was aber nicht eintreten kann, weil $u(x)>0$ für $x>\alpha$ ist.

Damit haben wir gezeigt, dass in beiden Fällen für die nichtoszillatorische Lösung $u(x)$ eine solche Zahl $\eta>\alpha$ existiert, dass entweder

a) $u(x)>0,\ u'(x)>0,\ u''(x)>0,\ u'''(x)>0$, oder

b) $u(x)>0,\ u'(x)>0,\ u''(x)<0,\ u'''(x)>0$

für $x\geqq\eta$ ist.

Zuerst untersuchen wir den Fall a). Aus dem Hilfssatz 1.1 geht hervor, dass die Lösungen der II. Gruppe denselben Charakter haben. Deshalb weil wenigstens eine oszillatorische Lösung der Gleichung (a) der II. Gruppe existiert, sind alle Lösungen dieser Gruppe oszillatorisch.

Es seien $z_k(x)$ $(k=0, 1, 2, 3)$ Lösungen der Differentialgleichung (a), welche die Anfangsbedingungen

$$z_k^{(j)}(\eta)=\begin{cases}0 & k\neq j\\ 1 & k=j\end{cases}\qquad (j, k=0, 1, 2, 3)$$

erfüllen. Die Lösungen z_1, z_2, z_3 gehören in die II. Gruppe $M(\eta)$, sind also oszillatorisch. Aus der Bemerkung 1.3 folgt, dass $W(z_0, z_3)>0$, $W(z_1, z_3)>0$, $W(z_2, z_3)>0$ für $x>\eta$ sind. Es ist ersichtlich, dass wir $u(x)$ in der Form

$$u(x)=u(\eta)z_0(x)+u'(\eta)z_1(x)+u''(\eta)z_2(x)+u'''(\eta)z_3(x) \tag{1.7}$$

schreiben können. Es ist also

$$W(u, z_3)=u(\eta)W(z_0, z_3)+u'(\eta)W(z_1, z_3)+ + u''(\eta)W(z_2, z_3) \tag{1.8}$$

für $x>\eta$.

Aus der Relation (1.8) folgt, dass $u(x)$ und $z_3(x)$ denselben Charakter haben und weil $z_3(x)$ oszillatorisch ist, erhalten wir den Widerspruch mit der Voraussetzung, dass $u(x)$ eine nichtoszillatorische Lösung der Differentialgleichung (a) ist.

Jetzt zeigen wir, dass auch der Fall b) nicht eintreten kann. Es sei $\omega(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (b) mit einer dreifachen Nullstelle in α. Dann ist $\omega(x)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\omega(ru''')-(r\omega')u''+(r\omega')'u'-(r\omega')''u=0$$

(siehe den Satz 3, [4] S. 105), welche für $x\geqq\eta$ in der Form

$$\left[\frac{(r\omega')'}{u}\right]'+\frac{u''}{u^2}r\omega'=\frac{r\omega u'''}{u^2} \tag{1.9}$$

geschrieben werden kann.

Es seien α_1, β_1, $\eta<\alpha_1<\beta_1$ zwei nacheinanderfolgende Nullstellen der Lösung $\omega(x)$. Es sei $\omega(x)$ für $x\in(\alpha_1, \beta_1)$ positiv; dann ist $\omega'(\alpha_1)>0$, $\omega'(\beta_1)<0$

und gemäss den Bemerkungen 1.5 und 1.6 ist $(r\omega')'(\alpha_1)>0$, $(r\omega')'(\beta_1)<0$. Weil $(r\omega')'(x)$ eine stetige Funktion ist, hat sie wenigstens eine Nullstelle in (α_1, β_1). Es sei ξ nach α_1 die erste Nullstelle $(r\omega')'(x)$. Dann ist ersichtlich $(r\omega')(x)>0$ in $\langle\alpha_1, \xi\rangle$. Durch Integration (1.9) am Intervall $\langle\alpha_1, \xi\rangle$ erhalten wir

$$-\frac{(r\omega')'(\alpha_1)}{u(\alpha_1)}+\int_{\alpha_1}^{\xi}\frac{u''}{u^2}(r\omega')(x)\,dx=\int_{\alpha_1}^{\xi}\frac{r\omega u'''}{u^2}\,dx \tag{1.10}$$

Weil die linke Seite der Gleichheit (1.10) negativ und die rechte Seite positiv ist, erhalten wir einen Widerspruch.

Damit haben wir bewiesen, dass die Gleichung (a) unter den gegebenen Voraussetzungen keine nichtoszillatorische Lösung hat.

Hilfssatz 1.4. b) Es sei irgendeine Lösung der Differentialgleichung (b) der II. Gruppe oszillatorisch und irgendeine Lösung der Differentialgleichung (a) der II. Gruppe ist ebenfalls oszillatorisch. Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung (b) oszillatorisch.

Beweis. Die Behauptung beweist sich auf dieselbe Art wie der Hilfssatz 1.3.

Satz 1.1. Es seien $r(x)>0$, $q(x)\geqq 0$ stetige Funktionen für $x\in(x_1, \infty)$, wobei $q(x)$ auf keinem Teilintervall $\langle x_1, \infty)$ identisch gleich Null ist. Es sei $\int_{x_1}^{\infty}\frac{1}{r(x)}\,dx=$ $=\int_{x_1}^{\infty}q(x)\,dx=+\infty$. Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung (a) [bezw. der Gleichung (b)] am Interval $\langle x_1, \infty)$ oszillatorisch.

Beweis. Den Beweis führen wir für die Gleichung (a) durch, für die Gleichung (b) verläuft dieser auf diesselbe Art. Nehmen wir an, dass die Differentialgleichung (a) eine nichtoszillatorische Lösung $u(x)$ hat. Auf ähnliche Weise wie im Beweis des Hilfssatzes 1.4.a), kann gezeigt werden, dass für $u(x)$ ein solcher Punkt $\eta\in\langle x_1, \infty)$ existiert, dass $u(x)>0$, $u'(x)>0$, $u'''(x)>0$, $x\in(\eta, \infty)$ gilt. Andererseits geht aus der Gleichung (a) für die Lösung $u(x)$ im Intervall $\langle\eta, \infty)$ hervor

$$(ru''')(x)=(ru''')(\eta)-\int_{\eta}^{x}q(t)u(t)\,dt \tag{1.11}$$

Mit Rücksicht darauf, dass $\int_{x_1}^{\infty}q(x)\,dx=+\infty$ und mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Lösung $u(x)$ erhalten wir, dass $\int_{\eta}^{\infty}q(t)u(t)\,dt=\infty$ ist. Aus dieser Tatsache und aus (1.11) geht hervor, dass $\lim_{x\to\infty}(ru''')(x)=-\infty$; dies ist im Widerspruch mit $u'''(x)>0$ für $x\geqq\alpha$.

Damit haben wir gezeigt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Differentialgleichung (a) auf $\langle x_1, \infty)$ keine nichtoszillatorische Lösung haben kann.

LITERATUR

[1] Švec, M.: Eine Eigenwertaufgabe der Differentialgleichung $y^{(n)} + Q(x, \lambda)y = 0$. Čechoslov. mat. žurnal T 6 (81), 1956, 46—71.

[2] Zlámal, M.: Über eine Eigenwertaufgabe bei der differentialgleichung $y^{(n)} + \lambda A(x)y = 0$. Spisy přírodovědecké fak. M.U. A8, č. 345, 1953/3, 91—99.

[3] Švec, M.: Propriété des intégrales de équation $y^{(n)} + Q(x)y = 0$, $n = 3, 4$. Čechoslov. mat. žurnal T7 (82) 1957, 450—462.

[4] Fillová, A.: Über einige Eigenschaften der Lösungen der quasilinearen Differentialgleichung 4. Ordnung, Acta FRN UC XX, Mathematica XX, 1970, 101—112.

Received: September 5, 1978

Author's address:
Katedra numerickej matematiky MFFUK
Mlynská dolina — Matematický pavilón
816 31 Bratislava

SÚHRN

POZNÁMKA O NULOVÝCH BODOCH RIEŠENÍ KVÁZILINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC 4. RÁDU

A. Fillová, Bratislava

V práci sa rozširujú výsledky týkajúce sa oscilatorických vlastností riešení diferenciálnej rovnice $y^{(4)} + Q(x)y = 0$ na kvázilineárnu diferenciálnu rovnicu $(ry''')' + qy = 0$, resp. rovnicu $(rz')''' + qz = 0$. O funkciách r a q sa predpokladá, že $r > 0$, $q \geqq 0$ sú spojité v R, $q \equiv 0$ neplatí v žiadnom intervale a $\int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{r(x)} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{r(x)} \mathrm{d}x = \infty$. Množina riešení rovnice s tým istým nulovým bodom x_1 sa rozloží do dvoch tried a ukáže sa, že riešenia jednej triedy majú rovnaký oscilatorický charakter. Z riešení druhej triedy jedna časť je rovnakého charakteru a druhá časť riešení je za doplňujúcich predpokladov oscilatorická. Hlavný výsledok práce hovorí, že za dodatočného predpokladu $\int_{x_1}^{\infty} q(x)\,\mathrm{d}x = \infty$ každé riešenie uvažovaných rovníc je oscilatorické na intervale $\langle x_1, \infty)$.

РЕЗЮМЕ

ЗАМЕТКА О КОРНЯХ ИНТЕГРАЛОВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А. Филлова, Братислава

Как известно, линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка $y^{(4)} + Q(x)y = 0$ обладает следующим свойством: если функция $Q(x)$ непрерывна и неотрицательна на интервале $(-\infty, \infty)$, то или все ее интегралы колеблющиеся, или все неколеблющиеся, т.э. носят одинако-

вый характер. В этой работе решения квазилинейного дифференциального уравнения четвертого порядка разделены до двух групп. Из решений первой группы одна часть одинакового характера, а вторая часть решений при определенных условиях колеблющаяся. Кроме того, при условии

$$\int_{x_1}^{\infty} q(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$$

показано, что все решения рассматриваемого в работе уравнения колеблющиеся.