UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XXXIX — 1980

О РАЗМЕРНОСТИ ПОДМНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

МИЛАН ГЕРА, Братислава

Посвящается академику О. Борувке к его восьмидесятилетию

В статье [1] мы занимались размерностью подмножеств неосцилляционных решений дифференциального уравнения

$$Lx \equiv x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$$

и поведением этих решений при $t \to +\infty$. В настоящей работе мы будем исследовать ту же проблематику, но, в основном, для уравнений, которые обладают колебательным решением.

О коэффициентах уравнения $Lx = 0$ предполагаем, что они вещественны и непрерывны в интервале $I = (\alpha, +\infty)$, $\alpha \geqq -\infty$.

Приведем список применяемых обозначений и терминов.

$\mathscr{S}^+(J)(\mathscr{S}^-(J))$ – совокупность непрерывных неотрицательных (неположительных) функций в промежутке J;

$\mathscr{S}_0^+(J)(\mathscr{S}_0^-(J))$ – совокупность функций, принадлежащих $\mathscr{S}^+(J)(\mathscr{S}^-(J))$ и неравных тождественно нулю в ни каком промежутке $j \subset J$;

$$E(t, \tau) = \exp \int_\tau^t a(\eta)\, d\eta \quad \text{для} \quad (t, \tau) \in I \times I$$

$$lv \equiv v'' + a(t)v' + b(t)v, \quad l^+ v \equiv v'' + a(t)v' + b_+(t)v$$

где $b_+(t) = \max\{0, b(t)\}$ для $t \in I$.

Дифференциальное уравнение порядка n называем неосцилляционным (disconjugate) в промежутке J, если каждое его нетривиальное решение имеет в J не более $n-1$ нулей с учетом их кратности.

Ненулевое решение дифференциального уравнения называется колебательным в промежутке J, если для любого $\beta \in J$ это решение имеет в $(\beta, +\infty) \cap J$ бесконечное множество нулей. В противном случае, мы его называем неколебательным в J.

Дифференциальное уравнение называется колебательным в J, если оно обладает по крайней мере одним колебательным решением в J. Если дифференциальное уравнение не имеет колебательных решений в J, то мы его называем неколебательным в J.

$\mathscr{D}(J)$ – совокупность неосцилляционных дифференциальных уравнений в промежутке J;

$\mathscr{N}(J)$ – совокупность неколебательных дифференциальных уравнений в промежутке J;

$\mathscr{O}(J)$ – совокупность колебательных дифференциальных уравнений в промежутке J;

$L \in \mathscr{O}(J)(l \in \mathscr{D}(J))$ и т.п., где $J \subset I$, означает, что дифференциальное уравнение $Lx = 0$ $(lv = 0)$ колебательное (неосцилляционное) в J.

$\mathscr{E}$ – множество всех нетривиальных решений уравнения $Lx = 0$ в I;

$\mathscr{E}^0$ – множество всех колебательных решений уравнения $Lx = 0$ в I.

Пусть $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ и $\bar{\mathscr{F}}$ – векторное подпространство, порожденное множеством $\mathscr{F}$. Под размерностью $\mathscr{F}$ мы будем понимать размерность $\bar{\mathscr{F}}$ и обозначать $\dim \mathscr{F}$. Это значит, что $\dim \mathscr{F}$ равна максимальному числу линейно независимых решений уравнения $Lx = 0$ принадлежащих $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{E}^- = \{w(t) \in \mathscr{E} \mid \forall_{t \in I} w(t)w'(t) < 0\}$$
$$\mathscr{E}_0^- = \{w(t) \in \mathscr{E}^- \mid \lim_{t \to +\infty} w(t) = 0\}$$
$$\mathscr{E}_1^- = \{w(t) \in \mathscr{E}^- \mid w(t) \notin \mathscr{E}_0^-\}$$
$$\mathscr{E}_2^- = \{w(t) \in \mathscr{E}^- \mid \forall_{t \in I} w(t)w''(t) > 0\}$$
$$\mathscr{E}_1^+ = \{w(t) \in \mathscr{E} \mid \exists_{T \in I} \forall_{t \in (T, +\infty)} w(t)w'(t) > 0\}$$

Лемма 1 [2]. Пусть t_0 некоторая точка из I. Пусть $l^+ \in \mathscr{D}(I)$ и для $b(t) \notin \mathscr{S}^-(I)$ выполняется условие

$$\text{(E)} \qquad \int_{\tau_0}^{+\infty} E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s = +\infty \quad (\tau_0 \in I)$$

Тогда дифференциальное уравнение $lv = 0$ имеет решение $v_0(t)$, обладающее свойством

$$v_0(t) > 0, \quad v_0'(t) \geqq 0, \quad t \in (t_0, +\infty)$$

Лемма 1′ [3]. Если $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$,

$$\int_{\tau_0}^{+\infty} E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s < +\infty, \quad \int_{\tau_0}^{+\infty} b(s)E(s, \tau_0)\,\mathrm{d}s < +\infty \quad (\tau_0 \in I)$$

то существует такая точка $t_0 \in I$ и решение $v_0(t)$ уравнения $lv = 0$, что

$$v_0(t) > 0, \quad v_0'(t) \geqq 0 \quad \text{в} \quad (t_0, +\infty)$$

Теорема 1 [2]. Пусть $l \in \mathscr{D}(I)$ и $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$. Тогда $\mathscr{E}^- \neq \emptyset$. Если, кроме того

a) $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, то $\mathscr{E}^- = \mathscr{E}_2^-$ $(\dim \mathscr{E}_2^- \leqq 2)$;

b) $L \in \mathscr{O}(I)$, то $\mathscr{E} = \mathscr{E}^- \cup \mathscr{E}^0$, $\dim \mathscr{E}^0 = 3$;

c) $L \in \mathscr{N}(I)$, $l^+ \in \mathscr{D}(I)$ и выполнено условие (E) при $b(t) \notin \mathscr{S}^-(I)$, то $\mathscr{E} = \mathscr{E}^- \cup \mathscr{E}_1^+$ причем $\dim \mathscr{E}_1^+ = 3$.

Теорема 1′ [1]. Пусть $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ и $t_0 \in I$. Тогда для любого решения $w(t) \in \mathscr{E}_2^-$ имеет место

$$\lim_{t \to +\infty} t w'(t) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} w''(t) \int_{t_0}^{t} sE(t, s)\, ds = 0$$

Теорема 2. Пусть $l \in \mathscr{D}(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$, $L \in \mathscr{O}(I)$ и пусть $\mathscr{E}_1^- \neq \emptyset$. Тогда $\mathscr{E}_0^- = \emptyset$, $\dim \mathscr{E}_1^- = 1$ и $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1^- \cup \mathscr{E}^0$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}_1^- \neq \emptyset$ и $\dim \mathscr{E}_1^- \geqq 2$. Тогда существует пара линейно независимых в I решений $w_1(t)$, $w_2(t) \in \mathscr{E}_1^-$. Очевидно, что

$$\lim_{t \to +\infty} w_i(t) = k_i \in (-\infty, +\infty) - \{0\}, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим решение уравнения $Lx = 0$

$$y(t) = w_1(t) - \frac{w_1(\tau)}{w_2(\tau)} w_2(t) \quad (t \in I)$$

где $\tau \in I$ произвольная фиксированная точка. Так как $y(\tau) = 0$ и $L \in \mathscr{O}(I)$, то, на основании леммы 11 [2], $y(t) \in \mathscr{E}^0$. По этой причине

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = k_1 - \frac{w_1(\tau)}{w_2(\tau)} k_2 = 0$$

Отсюда, в силу того, что $k_1 k_2 \neq 0$, следует

$$k_1 w_2(\tau) - k_2 w_1(\tau) = 0$$

для произвольного $\tau \in I$, а значит, что $w_1(t)$, $w_2(t)$ линейно зависимые в I. Это противоречит предположению их линейной независимости в I. Итак $\dim \mathscr{E}_1^- = 1$.

Еще нужно показать, что $\mathscr{E}_0^- = \emptyset$ и $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1^- \cup \mathscr{E}^0$. Пусть $\mathscr{E}_0^- \neq \emptyset$ и $w_0(t) \in \mathscr{E}_0^-$. Пусть далее $w_1(t) \in \mathscr{E}_1^-$. Тогда $w_1(t)$, $w_0(t) + w_1(t)$ линейно независимые решения из $\mathscr{E}_1^-$, т.е. $\dim \mathscr{E}_1^- = 2$. Но это невозможно, так как, ввиду выше доказанного, $\dim \mathscr{E}_1^- = 1$. Следовательно $\mathscr{E}_0^- = \emptyset$ и, согласно теореме 1, $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1^- \cup \mathscr{E}^0$.

Пример. Пусть

$$a(t) = \frac{2}{t}, \quad b(t) = \frac{1}{4t^2}, \quad c(t) = \frac{24 + 8 \ln t + \ln^2 t}{(4 + \ln t) t^3 \ln^3 t}, \quad t \in I = (1, +\infty)$$

Дифференциальное уравнение $Lx = 0$ имеет решение

$$w(t) = 1 + \frac{4}{\ln t}, \quad t \in I$$

т.е. $w(t) \in \mathscr{E}_1^-$.

Докажем, что $L \in \mathcal{O}(I)$ и $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1^- \cup \mathscr{E}^0$, $\dim \mathscr{E}_1^- = 1$. Чтобы убедится об этом, произведем замену переменной, положив

$$t = \tau^2, \quad \tau \in I$$

Тогда, как нетрудно подсчитать, уравнение $Lx = 0$ примет вид

$$\dddot{y} + \frac{1}{\tau}\ddot{y} + \frac{12 + 8\ln\tau + 2\ln^2\tau}{(2 + \ln\tau)\tau^3\ln^3\tau}\, y = 0 \quad \left(\cdot = \frac{d}{d\tau}, \ \tau \in I\right)$$

В силу теоремы 2 [4] это дифференциальное уравнение колебательное в I. Отсюда вытекает, что $L \in \mathcal{O}(I)$. Поскольку, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$, $l \in \mathscr{D}(I)$ и $\mathscr{E}_1^- \neq \emptyset$, согласно теореме 2, $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1^- \cup \mathscr{E}^0$ и $\dim \mathscr{E}_1^- = 1$.

Так как $a(t) \in \mathscr{S}^+(I)$, $2c(t) - b'(t) - a(t)b(t) = 2c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ и $\dim \mathscr{E}_1^- = 1$ ($\mathscr{E}^- = \mathscr{E}_1^-$), на основании теоремы 2 [1], для решения $w(t)$ в I имеет место тождество

$$\left[2w(t)w''(t) - w'^2(t) + \frac{1}{4t^2}w^2(t)\right]\frac{t^2}{t_0^2} = k_{t_0} + \frac{2}{t_0^2}\int_t^{+\infty} s w'^2(s)\,ds +$$

$$+ \frac{2}{t_0^2}\int_t^{+\infty} \frac{24 + 8\ln s + \ln^2 s}{s\ln^3 s(4 + \ln s)}\, w^2(s)\,ds \quad (t_0 \in I)$$

где $k_{t_0} = \dfrac{1}{4t_0^2}$.

Этот пример показывает, что в тождестве установленном в теореме 2 [1], которое имеет место для некоторых решений $w(t)$ (без нулевых точек в I) уравнения $Lx = 0$, в общем необязательно должно выполнятся $k_{t_0} = 0$ при $b(t) \notin \mathscr{S}^-(I)$.

Лемма 2. Пусть $a(t) \in \mathscr{S}^+(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$, $b(t) \equiv 0$ в I. Если $L \in \mathcal{O}(I)$, то $\mathscr{E} = \mathscr{E}_2^- \cup \mathscr{E}^0$ и $\dim \mathscr{E}_2^- = 1$.

Доказательство. Согласно теореме 1, $\mathscr{E} = \mathscr{E}^- \cup \mathscr{E}^0$, $\mathscr{E}^- = \mathscr{E}_2^-$ и $\dim \mathscr{E}_2^- \leqq 2$. Пусть $\dim \mathscr{E}_2^- = 2$. Тогда, в силу теоремы 2, мы получаем $\mathscr{E}_2^- = \mathscr{E}_0^-$ ($\mathscr{E}_1^- = \emptyset$). Пусть $w_1(t)$, $w_2(t)$ линейно независимые решения из $\mathscr{E}_2^-$. Тогда

$$\lim_{t\to+\infty} w_1(t) = \lim_{t\to+\infty} w_2(t) = 0.$$

Кроме того, из теоремы 1, для $w_1(t)$, $w_2(t)$ следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} w_i''(t)E(t, t_0) = 0, \quad i = 1, 2;\ t_0 \in I$$

Из этих фактов для решения

$$y(t) = w_1(t) - \frac{w_1(t_0)}{w_2(t_0)} w_2(t), \quad t \in I$$

уравнения $Lx = 0$ вытекает

$$(1) \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} y''(t)E(t, t_0) = 0$$

Поскольку $y(t_0) = 0$, то в силу леммы 11 [2], $y(t)$ колебательное в I. Решение $y(t)$ удовлетворяет тождеству

$$(2) \qquad \left[y(t)y''(t) - \frac{1}{2} y'^2(t)\right] E(t, t_0) = = -\frac{1}{2} y'^2(t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} [a(s)y'^2(s) + 2c(s)y^2(s)]E(s, t_0)\,ds$$

Пусть $\{t'_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность нулевых точек $y'(t)$ такая, что

$$\lim_{t \to +\infty} t'_n = +\infty.$$

Тогда, согласно (1) и (2), мы получаем

$$0 = \lim_{t \to +\infty} y(t'_n)y''(t'_n)E(t'_n, t_0) \leqq$$

$$\leqq -\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t'_n} [2c(s)y^2(s) + a(s)y'^2(s)]E(s, t_0)\,ds < 0$$

а это невозможно. И тем доказано, что $\dim \mathscr{E}_2^- = 1$.

Лемма 3. Пусть $b(t) \equiv 0$ в I, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I) \cap C^1(I)$ и $(c(t)E(t, t_0))' \in \mathscr{S}^+(I)$, где t_0 некоторая точка принадлежащая I. Тогда $\mathscr{E}_2^- = \mathscr{E}_0^-$, $\dim \mathscr{E}_2^- = 1$ и, кроме того, для $w(t) \in \mathscr{E}_2^-$ имеет место

$$\lim_{t \to +\infty} c(t)E(t, t_0)w^2(t) = 0$$

Доказательство. На основании теоремы 4 [1], в силу условия $(c(t)E(t, t_0))' \in \mathscr{S}^+(I)$, мы получаем, что $\mathscr{E}_2^- = \mathscr{E}_0^-$. Если $L \in \mathscr{N}(I)$ то утверждение леммы касающееся размерности $\mathscr{E}_2^-$, вытекает из следствия 2 теоремы 9 [1]. В случае $L \in \mathscr{O}(I)$, доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1 (что касается размерности $\mathscr{E}_2^-$), отличается только в том, что вместо тождества (2), нужно пользоваться тождеством

$$\left[y'(t)y''(t) + \frac{1}{2} c(t)y^2(t)\right] E(t, t_0) = y'(t_0)y''(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} y''^2(s)E(s, t_0)\,ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} [c'(s) + a(s)c(s)]E(s, t_0)y^2(s)\,ds$$

которое имеет место для любого нетривиального решения $y(t)$ уравнения $Lx=0$ $(b(t)\equiv 0)$ с нулем в точке t_0. При этом вместо последовательности $\{t'_n\}_{n=1}^{\infty}$ нулевых точек $y'(t)$ нужно рассматривать последовательность

$$\{t_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$$

нулевых точек решения $y(t)$. Кроме того отметим, что если t_0 не является первой нулевой точкой $y(t)$, то $y'(t_0)y''(t_0)>0$ (теорема 1 [5]).

Нам нужно еще показать, что если $w(t)\in\mathscr{E}_2^-$, то

$$\lim_{t\to+\infty} c(t)E(t, t_0)w^2(t)=0$$

Действительно, в силу того, что

$$\left(\left[w'(t)w''(t)+\frac{1}{2}c(t)w^2(t)\right]E(t, t_0)\right)'=$$

$$=\left[w''^2(t)E(t, t_0)+\frac{1}{2}w^2(t)(c(t)E(t, t_0))'\right]\in\mathscr{S}^+(I)$$

то существует предел

$$\lim_{t\to+\infty}\left[w'(t)w''(t)+\frac{1}{2}c(t)w^2(t)\right]E(t, t_0)$$

Поскольку

(3) $$\lim_{t\to+\infty} w'(t)=0, \quad \lim_{t\to+\infty} w''(t)E(t, t_0)=0$$

(теорема 1′), то существует и предел

$$\lim_{t\to+\infty} c(t)E(t, t_0)w^2(t)$$

Пусть этот предел равняется M и $0<M\leqq+\infty$, тогда для $m\in(0, M)$ существует такая точка $t_1\in I$, что

$$c(t)E(t, t_0)w^2(t)>m \quad \text{для} \quad t>t_1$$

Считая $w(t)>0$ в I, то из

$$\lim_{t\to+\infty} w(t)=0$$

вытекает, что $w^2(t)<w(t)$ для $t>t_2\geqq t_1$. На основании последнего, мы имеем

$$c(t)E(t, t_0)w(t)>m \quad \text{для} \quad t>t_2$$

Далее из равенства $Lw=0$ $(b(t)\equiv 0)$, мы получаем

$$[w''(t)E(t, t_0)]'=-c(t)E(t, t_0)w(t)<-m \quad \text{для} \quad t>t_2$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} w''(t)E(t, t_0) = -\infty$$

Но это противоречит (3). Лемма доказана.

На основании этих результатов, преобразованием независимой переменной в уравнении $Lx = 0$, мы установим условия для $\dim \mathscr{E}^- = 1$ в случае $b(t) \not\equiv 0$ в I.

Пусть $I_0 = (\beta, +\infty) \subset I$ и $\lambda \in I_0$. Обозначим через $\mathscr{C}^2_+(I_0)$ множество всех функций $v_0(t) \in \mathscr{C}^2(I_0)$ таких, что $v_0(t) > 0$ в I_0 и

$$\int_\lambda^{+\infty} v_0(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$$

Положим

$$\tau = \tau(t) = \int_\lambda^t v_0(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{для} \quad t \in I_0 \quad \text{и} \quad v_0(t) \in \mathscr{C}^2_+(I_0)$$

Тогда

$$\lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty$$

и функция $\tau(t)$ отображает I_0 на $I_1 = (\gamma, +\infty)$, где

$$\gamma = \lim_{t\to\beta} \tau(t).$$

Пусть $\sigma(\tau)$ обратная функция к функции $\tau(t)$. Тогда преобразованием $t = \sigma(\tau)$ дифференциальное уравнение $Lx = 0$ переходит в уравнение

$$\dddot{y} + \tilde{a}(\tau)\ddot{y} + \tilde{b}(\tau)\dot{y} + c(\tau)y = 0 \quad \left(\cdot = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right) \tag{4}$$

где

$$y(\tau) = x(t), \quad \tilde{a}(\tau) = 3\frac{v_0'(t)}{v_0^2(t)} + \frac{a(t)}{v_0(t)}, \quad \tilde{b}(\tau) = \frac{lv_0(t)}{v_0^3(t)}, \quad \tilde{c}(\tau) = \frac{c(t)}{v_0^3(t)}$$

при $t = \sigma(\tau)$, $\tau \in I_1$.

Вместе с тем следует отметить:

a) Дифференциальное уравнение $Lx = 0$ имеет единственное решение $w(t)$ (с точностью до постоянного множителя), для которого $w(t)w'(t) < 0$ в I, тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение (4) обладает только одним решением $z(\tau)$ (с точностью до постоянного множителя) таким, что $z(\tau)\dot{z}(\tau) < 0$ для $\tau \in I_1$.

b) Если для решения $z(\tau)$ уравнения (4) имеет место

$$\lim_{\tau\to+\infty} z^2(\tau)\tilde{c}(\tau)\exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{a}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right) = 0 \quad (\tau_0 \in I_1)$$

то для решения $w(t)=z(\tau(t))$ уравнения $Lx=0$ выполняется

$$\lim_{t\to+\infty} w^2(t)c(t)E(t,t_0)=0$$

c) Если $a(t)\in\mathcal{S}^+(I)$ и $v_0'(t)\geqq 0$ в I для $v_0(t)\in\mathscr{C}_+^2(I_0)$, то $\tilde a(\tau)\geqq 0$ для $\tau\in I_1$.

d) Если $v_0(t)\in\mathscr{C}_+^2(I_0)$ решение уравнения $lv=0$, то $\tilde b(\tau)\equiv 0$ в I_1.

e) Если $lv_0(t)\leqq 0$ в I_0 для $v_0(t)\in\mathscr{C}_+^2(I_0)$, то $l\in\mathscr{D}(I_0)$ (лемма 2 [6]).

Учитывая эти факты, в силу теоремы 1 и лем 1–3, мы получаем:

Теорема 3. Пусть $a(t)\in\mathcal{S}^+(I)$, $c(t)\in\mathcal{S}_0^+(I)$, $l^+\in\mathscr{D}(I)$ и выполняется условие (E) при $b(t)\notin\mathcal{S}^-(I)$. Если $L\in\mathcal{O}(I)$, то $\mathscr{E}=\mathscr{E}^-\cup\mathscr{E}^0$ и $\dim\mathscr{E}^-=1$.

Теорема 3'. Пусть выполнены условия $a(t)\in\mathcal{S}^+(I)$, $b(t)\in\mathcal{S}^+(I)$, $l\in\mathscr{D}(I)$, $c(t)\in\mathcal{S}_0^+(I)$ и

$$\int_{t_0}^{+\infty} E(t_0,s)\,\mathrm{d}s<+\infty,\quad \int_{t_0}^{+\infty} b(s)E(s,t_0)\,\mathrm{d}s<+\infty\quad (t_0\in I) \tag{5}$$

Тогда $\mathscr{E}=\mathscr{E}^-\cup\mathscr{E}^0$, $\dim\mathscr{E}^-=1$ для $L\in\mathcal{O}(I)$.

Теорема 4. Пусть t_0 некоторая точка из I. Пусть $l^+\in\mathscr{D}(I)$, $c(t)\in\mathcal{S}_0^+(I)\cap\mathscr{C}^1(I)$, $(c(t)E(t,t_0))'\in\mathcal{S}^+(I)$ и для $b(t)\notin\mathcal{S}^-(I)$ выполнено условие (E). Тогда $\mathscr{E}^-=\mathscr{E}_0^-$, $\dim\mathscr{E}^-=1$ и решение $w(t)\in\mathscr{E}^-$ обладает свойством

$$\lim_{t\to+\infty} w^2(t)c(t)E(t,t_0)=0 \tag{6}$$

Теорема 4'. Пусть $b(t)\in\mathcal{S}^+(I)$, $l\in\mathscr{D}(I)$, $c(t)\in\mathcal{S}_0^+(I)\cap\mathscr{C}^1(I)$, $[c(t)E(t,t_0)]'\in\mathcal{S}^+(I)$ и, кроме того, выполнены условия (5). Тогда $\mathscr{E}^-=\mathscr{E}_0^-$, $\dim\mathscr{E}_0^-=1$ и для $w(t)\in\mathscr{E}_0^-$ имеет место (6).

Из теорем 1, 3 и 4 вытекает

Следствие. Пусть $b(t)\in\mathcal{S}^-(I)$ и пусть

i) $a(t)\in\mathcal{S}^+(I)$, $c(t)\in\mathcal{S}_0^+(I)$ и $L\in\mathcal{O}(I)$. Тогда $\mathscr{E}=\mathscr{E}_2^-\cup\mathscr{E}^0$, $\dim\mathscr{E}_2^-=1$ (в случае $a(t)\equiv 0$ в I имеет место $\mathscr{E}_2^-=\mathscr{E}_0^-$ (теорема 7 [1])).

ii) $c(t)\in\mathcal{S}_0^+(I)\cap\mathscr{C}^1(I)$, $[c(t)E(t,t_0)]'\in\mathcal{S}^+(I)$ $(t_0\in I)$. Тогда $\mathscr{E}_2^-=\mathscr{E}_0^-$, $\dim\mathscr{E}_2^-=1$ и для $w(t)\in\mathscr{E}_2^-$ имеет место (6).

Замечание 1. В случае $a(t)\equiv 0$ в I, из теорем 2 и 9 работы [1] и следствия теорем 3 и 4, мы получаем обобщение теорем 2 и 3 из [7] и теоремы 4 [8]. Кроме того, из следствия теорем 3 и 4 вытекает теорема 5 [9].

Применяя теоремы 1, 3 и 4 к дифференциальному уравнению (4) (учитывая при этом соотношения между решениями уравнения $Lx=0$ и уравнения (4)) получаем:

Теорема 5. Пусть существует функция $v_0(t)\in\mathscr{C}_+^2(I)$ такая, что дифференциальное уравнение второго порядка

$$v''+\left(\frac{2v_0'(t)}{v_0(t)}+a(t)\right)v'+\max\left\{0,\frac{lv_0(t)}{v_0(t)}\right\}v=0$$

неосцилляционное в I и, кроме того, пусть

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{E(t_0, s)}{v_0^2(s)} \mathrm{d}s = +\infty \quad (t_0 \in I)$$

если $lv_0(t) \notin \mathscr{S}^-(I)$. Пусть далее

j) $3v_0'(t) + a(t)v_0(t) \geqq 0$ в I, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ и $L \in \mathcal{O}(I)$. Тогда $\mathscr{E} = \mathscr{E}^- \cup \mathscr{E}^0$ и $\dim \mathscr{E}^- = 1$, $\dim \mathscr{E}^0 = 3$.

jj) $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I) \cap \mathscr{C}^1(I)$, $[c(t)E(t, t_0)]' \in \mathscr{S}^+(I)$. Тогда $\mathscr{E}^- = \mathscr{E}_0^-$, $\dim \mathscr{E}^- = 1$ и для $w(t) \in \mathscr{E}^-$ имеет место (6). При этом для $L \in \mathcal{O}(I)$ $[L \in \mathcal{N}(I)]$ $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0^- \cup \mathscr{E}^0$, $\dim \mathscr{E}^0 = 3$ $(\mathscr{E} = \mathscr{E}_0^- \cup \mathscr{E}_1^+$, $\dim \mathscr{E}_1^+ = 3)$.

Если $E^{1/3}(t_0, t) \in \mathscr{C}_+^2(I)$ (например, когда $a(t) \in \mathscr{S}^-(I) \cap \mathscr{C}^1(I)$) и если положим $v_0(t) = E^{1/3}(t_0, t)$, то из теоремы 5 получим:

Следствие. Пусть $t_0 \in I$ и $E^{1/3}(t_0, t) \in C_+^2(I)$, т.е. $a(t) \in \mathscr{C}^1(I)$ и

$$\int_{t_0}^{+\infty} E^{1/3}(t_0, s) \, \mathrm{d}s = +\infty$$

Пусть далее дифференциальное уравнение второго порядка

$$v'' + \frac{1}{3} a(t)v' + \max\left\{0, b(t) - \frac{2}{9} a^2(t) - \frac{1}{3} a'(t)\right\} v = 0$$

неосцилляционное в I и пусть

j) $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ и $L \in \mathcal{O}(I)$, тогда $\mathscr{E} = \mathscr{E}^- \cup \mathscr{E}^0$ и $\dim \mathscr{E}^- = 1$, $\dim \mathscr{E}^0 = 3$.

jj) $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I) \cap \mathscr{C}^1(I)$, $[c(t)E(t, t_0)]' \in \mathscr{S}^+(I)$. Тогда $\mathscr{E}^- = \mathscr{E}_0^-$, $\dim \mathscr{E}^- = 1$ и для $w(t) \in \mathscr{E}^-$ имеет место (6). Кроме того, для $L \in \mathcal{O}(I)$ $(L \in \mathcal{N}(I))$ $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0^- \cup \mathscr{E}^0$, $\dim \mathscr{E}^0 = 3$ $(\mathscr{E} = \mathscr{E}_0^- \cup \mathscr{E}_1^+$, $\dim \mathscr{E}_1^+ = 3)$.

Если $a(t) \in \mathscr{S}^+(I)$ и

$$\left[b(t) - \frac{2}{9} a^2(t) - \frac{1}{3} a'(t)\right] \in \mathscr{S}^-(I),$$

то $\mathscr{E}^- = \mathscr{E}_2^-$ в случаях j) и jj).

2. Лемма 4. Пусть $l \in \mathscr{D}(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ и $L \in \mathcal{O}(I)$. Тогда $\mathscr{E}^- \neq \emptyset$ и для всякого $w(t) \in \mathscr{E}^-$ и $x(t) \in \mathscr{E}$, которое линейно независимое с $w(t)$, существует такое $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ и $z(t) \in \mathscr{E}^0$, что имеет место

$$x(t) = \lambda w(t) + z(t) \quad \text{для} \quad t \in I$$

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что $\mathscr{E}^- \neq \emptyset$. Пусть $w(t) \in \mathscr{E}^-$ и $x_1(t)$, $x_2(t)$ решения уравнения $Lx = 0$, которые в точке $t_0 \in I$ удовлетворяют условию

$$x_i^{(k)}(t_0) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad k \neq 3 - i \\ 1 & \text{для} \quad k = 3 - i \end{cases}, \quad i = 1, 2; \quad k = 0, 1, 2$$

Тогда $w(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $Lx=0$ в I. Пусть $x(t)\in\mathscr{E}$ линейно независимое решение с $w(t)$. Тогда существует постоянная λ и нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1x_1(t)+\lambda_2x_2(t)=z(t)$ так, что

$$x(t)=\lambda w(t)+z(t) \quad \text{для} \quad t\in I$$

Так как, $z(t_0)=0$, в силу леммы 11 [2], $z(t)\in\mathscr{E}^0$.

Теорема 6. Пусть $l\in\mathscr{D}(I)$, $c(t)\in\mathscr{S}_0^+(I)$ и $L\in\mathcal{O}(I)$. Тогда $\mathscr{E}^-\neq\emptyset$ и $\dim\mathscr{E}^-=1$ в том и только в том случае, если для любого решения $z(t)\in\mathscr{E}^0$ и $w(t)\in\mathscr{E}^-$ имеет место

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{z^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}=-\infty \quad \left(\limsup_{t\to+\infty}\frac{z^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}=+\infty\right) \tag{7}$$

где i любое из чисел 0, 1.

Доказательство. Из леммы 4 следует, что $\mathscr{E}^-\neq\emptyset$.

a) Пусть $\dim\mathscr{E}^-=1$ и пусть (7) не выполняется. Тогда существует такое $\bar{z}(t)\in\mathscr{E}^0$ и $w(t)\in\mathscr{E}^-$, что

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{\bar{z}^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}>-\infty \quad \left(\limsup_{t\to+\infty}\frac{\bar{z}^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}<+\infty\right)$$

для некоторого $i=0, 1$. Рассмотрим решения уравнения $Lx=0$ вида

$$\bar{x}(t)=\lambda w(t)+\bar{z}(t) \quad (t\in I)$$

для $\lambda\in(-\infty, +\infty)$. Пусть, например

$$\lambda_i=\liminf_{t\to+\infty}\frac{\bar{z}^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}>-\infty$$

Тогда для $\lambda>-\lambda_i$ имеет место

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{\bar{x}^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}>0$$

Поэтому $\bar{x}^{(i)}(t)\neq0$ в некоторой окресности точки $+\infty$. Поскольку $\mathscr{E}=\mathscr{E}^-\cup\mathscr{E}^0$, то $\bar{x}(t)\in\mathscr{E}^-$ для $\lambda>-\lambda_i$. Итак $w(t)$, $\lambda w(t)+\bar{z}(t)$ – два линейно независимых решений из $\mathscr{E}^-$ (для $\lambda>-\lambda_i$), т.е. $\dim\mathscr{E}^-=2$, что противоречит предположению $\dim\mathscr{E}^-=1$.

b) Пусть для любого $z(t)\in\mathscr{E}^0$ и $w(t)\in\mathscr{E}^-$ выполняется (7). Пусть $x(t)\in\mathscr{E}$ не является линейно зависимым с $w(t)$. Тогда, согласно лемме 4, существует $\lambda\in(-\infty, +\infty)$ и $z(t)\in\mathscr{E}^0$, так что

$$x(t)=\lambda w(t)+z(t), \quad t\in I$$

Из условия (7), учитывая, что $-z(t)\in\mathscr{E}^0$, мы получаем

$$-\infty=\liminf_{t\to+\infty}\frac{x^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}=\liminf_{t\to+\infty}\frac{-x^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}$$

$$\left(\limsup_{t\to+\infty}\frac{x^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}=\limsup_{t\to+\infty}\frac{-x^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}=+\infty\right)$$

где i любое из чисел 0, 1. Отсюда, так как $\mathscr{E}=\mathscr{E}^-\cup\mathscr{E}^0$, следует, что $x(t)\in\mathscr{E}^0$. И тем показано, что $\dim\mathscr{E}^-=1$.

Из этой теоремы и теоремы 2 вытекает

Следствие. Пусть $l\in\mathscr{D}(I)$, $c(t)\in\mathscr{S}_0^+(I)$, $L\in\mathscr{O}(I)$ и пусть $\mathscr{E}_1^-\neq\emptyset$. Тогда каждое решение из $\mathscr{E}^0$ неограничено сверху и снизу.

Повторяя те же рассуждения, что в доказательстве теоремы 6, можно доказать

Теорема 6′. Пусть $b(t)\in\mathscr{S}^-(I)$, $c(t)\in\mathscr{S}_0^+(I)$ и $L\in\mathscr{O}(I)$. Тогда $\mathscr{E}_2^-\neq\emptyset$ и $\dim\mathscr{E}_2^-=1$ тогда и только тогда, когда для каждого решения $z(t)\in\mathscr{E}^0$ и $w(t)\in\mathscr{E}_2^-$ имеет место

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{z^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}=-\infty\quad\left(\limsup_{t\to+\infty}\frac{z^{(i)}(t)}{w^{(i)}(t)}=+\infty\right)$$

где i любое из чисел 0, 1, 2.

Теорема 7. Пусть $l\in\mathscr{D}(I)$, $c(t)\in\mathscr{S}_0^+(I)$ и $L\in\mathscr{O}(I)$. Если для любого решения $z(t)\in\mathscr{E}^0$ выполняется условие

$$\liminf_{t\to+\infty}z(t)<0\quad(\limsup_{t\to+\infty}z(t)>0)$$

то $\dim\mathscr{E}^-=1$.

Доказательство. В силу теоремы 1 $\mathscr{E}^-\neq\emptyset$. Пусть $\dim\mathscr{E}^->1$ и $w_1(t)$, $w_2(t)$ линейно независимые решения из $\mathscr{E}^-$. Тогда, по теореме 2,

$$\lim_{t\to+\infty}w_1(t)=\lim_{t\to+\infty}w_2(t)=0.$$

Рассмотрим решение

$$\bar z(t)=w_1(t)-\frac{w_1(t_0)}{w_2(t_0)}w_2(t)\quad(t\in I)$$

где t_0 некоторая точка из I. Тогда

$$\lim_{t\to+\infty}\bar z(t)=0.$$

С другой стороны, поскольку $\bar z(t_0)=0$, согласно лемме 11 [2], $\bar z(t)\in\mathscr{E}^0$. Следовательно, в силу нашего предположения,

$$\liminf_{t\to+\infty}\bar z(t)<0\quad(\limsup_{t\to+\infty}\bar z(t)>0)$$

Однако это противоречит тому, что

$$\lim_{t\to+\infty} \bar{z}(t)=0.$$

Полученное противоречие показывает, что $\dim \mathscr{E}^- = 1$.

Аналогично, используя теорему 1′, можно доказать

Теорема 7′. Пусть $b(t)\in\mathscr{S}^-(I)$, $c(t)\in\mathscr{S}_0^+(I)$ и $L\in\mathscr{O}(I)$. Если для любого $z(t)\in\mathscr{E}^0$ выполняется

$$\liminf_{t\to+\infty} t^i z^{(i)}(t)<0 \quad (\limsup_{t\to+\infty} t^i z^{(i)}(t)>0)$$

где i некоторое из чисел 0, 1 или

$$\liminf_{t\to+\infty} z''(t)\int_{t_0}^{t} sE(t, s)\,ds<0 \quad \left(\limsup_{t\to+\infty} z''(t)\int_{t_0}^{t} sE(t, s)\,ds>0\right)$$

где t_0 некоторая точка из I, то $\dim \mathscr{E}_2^- = 1$.

Замечание 2. Пусть $\mathscr{M}$ – совокупность функций, определенных в интервале I и обладающих свойством: если $f(t)\in\mathscr{M}$, то и $-f(t)\in\mathscr{M}$.

Пусть $g(t)$ – функция определенная в I и $g(t)\neq 0$ в некоторой окресности точки $+\infty$. Тогда имеет место

$$\forall_{f(t)\in\mathscr{M}} \liminf_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)}=-\infty \Leftrightarrow \forall_{f(t)\in\mathscr{M}} \limsup_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)}=+\infty$$

Ввиду этого, предположения приведенные в теоремах 6–7′ с нижним пределом, эквивалентны предположениям с верхним пределом выписанных в скобках.

Лемма 5. Пусть $c(t)>0$ в I, $c(t)E(t, t_0)\in\mathscr{C}^2(I)$, $(t_0\in I)$ и пусть

$$\frac{2b(t)}{c(t)}-\left(\frac{c'(t)+a(t)c(t)}{c^2(t)}\right)'\leqq 0 \quad \text{для} \quad t\in I \tag{8}$$

Если $L\in\mathscr{O}(I)$, то последовательность локальных максимумов (минимумов) любого решения из $\mathscr{E}^0$ является неубывающей (невозрастающей) последовательностью.

Доказательство. Для любого решения $z(t)\in\mathscr{E}^0$ имеет место тождество

$$V[t, z(t)]\equiv z^2(t)+\frac{2z'(t)z''(t)}{c(t)}+z'^2(t)\,\frac{c'(t)+a(t)c(t)}{c^2(t)}=$$

$$=V[t_0, z(t_0)]+2\int_{t_0}^{t}\frac{z''^2(s)}{c(s)}\,ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[\left(\frac{c'(s)+a(s)b(s)}{c^2(s)}\right)'-\frac{2b(s)}{c(s)}\right]z'^2(s)\,ds, \quad t\in I\ (t_0\in I)$$

об котором можно убедится дифференцированием.

Из этого тождества, согласно предположениям леммы, мы получаем $(V[t, z(t)])' \geqq 0$ для $t \in I$. Это значит, что $V[t, z(t)]$ не убывает в I. Если $z(t)$ имеет в некоторой точке $\bar{t} \in I$ локальный максимум (минимум), то $z'(\bar{t}) = 0$ и $V[\bar{t}, z(\bar{t})] = z^2(\bar{t})$. Из этих соображений вытекает, что локальные максимумы и минимумы функции $z^2(t)$, следовательно и $|z(t)|$, образуют неубывающую последовательность. Поэтому последовательность локальных максимумов (минимумов) решения $z(t)$ является неубывающей (невозрастающей) последовательностью.

Следствие. Пусть $c(t) > 0$ в I, $c(t)E(t, t_0) \in \mathscr{C}^2(I)$ $(t_0 \in I)$ и пусть выполнено (8). Если $L \in \mathcal{O}(I)$, то для любого решения $z(t) \in \mathscr{E}^0$ имеет место

$$\liminf_{t \to +\infty} z(t) < 0, \quad \limsup_{t \to +\infty} z(t) > 0$$

Лемма 5'. Пусть $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$, $c(t) > 0$ в I, $[c(t)E(t, t_0)]' \in \mathscr{C}^2(I)$ $(t_0 \in I)$ и пусть (8) выполняется. Тогда $l \in \mathscr{D}(I)$.

Доказательство. Так как $c(t)E(t, t_0) > 0$ в I, $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$ и (8) выполнено, то

$$l\,\frac{E(t_0, t)}{c(t)} = \left[\frac{b(t)}{c(t)} - \left(\frac{c'(t) + a(t)b(t)}{c^2(t)}\right)'\right] E(t, t_0) \leqq$$

$$\leqq -\frac{b(t)}{c(t)}\,E(t_0, t) \in \mathscr{S}^-(I)$$

Поэтому, согласно лемме 2 [6], $l \in \mathscr{D}(I)$.

Из теоремы 7 (теоремы 1) и следствия леммы 5 мы получаем:

Теорема 8. Пусть $l \in \mathscr{D}(I)$, $c(t) > 0$ в I, $c(t)E(t, t_0) \in \mathscr{C}^2(I)$ $(t_0 \in I)$ и пусть выполняется (8). Если $L \in \mathcal{O}(I)$, то $\dim \mathscr{E}^- = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gera, M.: Über die Untermengen der Lösungen der Gleichung $x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, $c(t) \geqq 0$. Math. Slovaca, 30, 1980, 313—326.

[2] Gera, M.: Über einige Eigenschaften der Lösungen der Gleichung $x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, $c(t) \geqq 0$. Mat. Čas., 24, 1974, 357—370.

[3] Левин, А. Ю.: Поведение решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + g(t)x = 0$ в неколебательном случае. Мат. сб. Т. 75 (117), №1, 1968, 32–63.

[4] Gera, M.: Bedingungen für die Existenz oszillatorischer Lösungen der Gleichung $x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, $c(t) \geqq 0$. Mat. Čas., 25, 1975, 23—40.

[5] Gera, M.: Bedingungen der Nichtoszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$. Acta F.R.N. Univ. Comen.-Mathematica, XXIII, 1969, 13—34.

[6] Gera, M.: Nichtoszillatorische und oszillatorische Differentialgleichungen dritter Ordnung. Čas. pěstov. Mat. 96, 1971, 278—293.

[7] Švec, M.: Einige asymptotische und oszillatorische Eigenschaften der Differentialgleichung $y''' + A(x)y' + B(x)y = 0$. Czech. mat. J. 15 (90), 1965, 378—393.
[8] Jones, G.: Oscillatory behavior of third order differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 43, 1974, 133—136.
[9] Moravský, L.: Einige oszillatorische und asymptotische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$. Acta F.R.N. Univ. Comen. — Mathematica XVI, 1967, 49—57.

Поступила в редакцию 2. 2. 1979

Адрес автора:
Katedra matematickej analýzy MFFUK, Pavilón matematiky,
Mlynská dolina,
816 31 Bratislava,
Czechoslovakia

SUMMARY

ON THE DIMENSION OF SUBSETS OF SOLUTIONS OF A THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

M. Gera, Bratislava

In the paper, theorems (both sufficient conditions and characterizations) are derived concerning the dimension of subsets of solutions without zeros in an interval I, mainly for oscillatory third order linear differential equations.

SÚHRN

O DIMENZII PODMNOŽÍN RIEŠENÍ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE TRETIEHO RÁDU

M. Gera, Bratislava

V práci su odvodené podmienky (nutné aj postačujúce) týkajúce sa dimenzie podmnožín riešení bez nulových bodov v intervale I, hlavne pre oscilatorické diferenciálne rovnice tretieho rádu.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XXXIX — 1980

ON SOME CONDITIONS FOR ABSOLUTE CONTINUITY OF MEASURES

TIBOR NEUBRUNN, Bratislava

Dedicated to Professor O. Borůvka on the occasion of his 80th birthday

The characterization of absolute continuity is closely related to 'Radon--Nikodym theorem. The last is usually formulated for totally σ-finite measures ([2] p. 128). It is discussed for more general cases too, ([1], [7]) but not all cases of measures are included. In the first part of the paper we give such characterization for several kinds of infinite measures.

The second part is a note to some characterizations of absolute continuity by means of sequences of functions. Such characterizations were discussed in ([3], [6], [8], [9]).

If nothing else is said the notions are used according to [1]. The notion of the σ-additive set function coincides with that of the signed measure. The theorems will be proved for measures. The absolute continuity of ν with respect to μ means $\nu(E)=0$ whenever $\mu(E)=0$. An important property (CCC) (countable chain condition) for a collection $\mathscr{E}$, which will be used in some of the assumptions is defined as follows (ν is supposed to be defined on $\mathscr{S}$):

(CCC) There is not an uncountable collection $\mathscr{E} \subset \mathscr{S}$ of pairwise disjoint sets such that $\nu(E)>0$ for $E \in \mathscr{E}$. The main results of the first part are the following two.

Theorem 1. Let $(X, \mathscr{S}, \mu)$ be a σ-finite measure space and let μ have the property (CCC). Then a measure ν defined on $\mathscr{S}$ is absolutely continuous with respect to μ if and only if there exists a measurable function f such that

$$\nu(E)=\int_E f \, d\mu \tag{1}$$

Theorem 2. Let $(X, \mathscr{S}, \mu)$ be a σ-finite measure space. Let ν defined on $\mathscr{S}$ have the property (CCC). Then the measure ν is absolutely continuous with respect to μ if and only if a measurable function f defined on X exists such that (1) is true.

If ν is a σ-additive and σ-finite measure, we shall say that ν has the property (σ_ν). If $(X, \mathscr{S})$ is such a measurable space that $X \in \mathscr{S}$ we shall say that the property (T) is satisfied.

Lemma 1. Let ν be a measure on $\mathscr{S}$.

(a) If (T) does not hold then in general (σ_ν) does not imply (CCC).

(b) In general (CCC) does not imply (σ_ν) even if (T) is satisfied.

(c) If (T) is satisfied then (σ_ν) implies (CCC).

(d) If ν is finite then it has the property (CCC).

Proof. (a) Let X be uncountable and $\mathscr{S}$ the collection of all countable subset of X. Put $\nu(E) = \operatorname{card} E$ ($\operatorname{card} A$ denotes the cardinal number of A if A is finite and $+\infty$ if A is infinite). Then (T) is not satisfied. (CCC) does not hold but (σ_ν) is satisfied.

(b) It is sufficient to take a nonempty set X and to put $\mathscr{S} = \{X, \emptyset\}$, $\nu(X) = \infty$, $\nu(\emptyset) = 0$.

(c) This statement may be proved by means of a method described in [2] p. 31 (4). We omit the proof.

(d) The same method may be used as in (c).

Lemma 2. There exists a measurable space $(X, \mathscr{S})$ and a measure ν defined on $\mathscr{S}$ such that ν is infinite ν has both the properties (σ_ν) and (CCC) and the property (T) for $(X, \mathscr{S})$ is not satisfied.

Proof. Let $(X_1, \mathscr{S}_1, \nu_1)$ be any totally σ-finite measure space such that $\nu(X_1) = \infty$. Let X_2 be any uncountable set for which $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ and let $\mathscr{S}_2$ be the σ-ring of all countable subsets of X_2. Define $\mathscr{S}$ as follows. The set E belong to $\mathscr{S}$ if and only if $E \subset X_1 \cup X_2$, $E \cap X_1 \in \mathscr{S}_1$, $E \cap X_2 \in \mathscr{S}_2$. Put $\nu(E) = \nu_1(E \cap X_1)$ for any $E \in \mathscr{S}$. The property (σ_ν) is fulfilled because (σ_{ν_1}) for ν_1 on $\mathscr{S}_1$ holds. The property (CCC) is satisfied too. Evidently $(X, \mathscr{S})$ does not satisfy the property (T).

The following lemma coincides with the theorem 1.3 of [4] and is also a corollary of the Theorem proved in [5]. The proof will be omitted.

Lemma 3. Let $(X, \mathscr{S})$ be a measurable space and $\mathscr{M} \subset \mathscr{S}$ a σ-ideal in $\mathscr{S}$. Let $\mathscr{S} - \mathscr{M}$ does not contain an infinite collection of pairwise disjoint sets. Let P be a property concerning the sets $E \in \mathscr{S}$ and such that at least one $E \in \mathscr{S} - \mathscr{M}$ posseses the property P and any countable union of sets with the property P is itself of the property P. Then a set $M \in \mathscr{S} - \mathscr{M}$ with the property P exists such that if $E \in \mathscr{S}$, $E \subset X - M$ and E posseses the property P, then $E \in \mathscr{M}$.

Lemma 4. Let $(X, \mathscr{S})$ be a measurable space, ν and μ measures defined on $\mathscr{S}$. Let μ have the property (CCC) and let ν be absolutely continuous with respect to μ. Then there exist two disjoint measurable sets A, B such that A is either an infinite atom of the measure ν or an empty set, B is of σ-finite measure ν and for any $E \in \mathscr{S}$, $E \subset X - A \cup B$, $\nu(E) = 0$ holds.

Proof. If ν has no infinite atom, put $A = \emptyset$. If there is an infinite atom of the measure ν then $\mu(E) > 0$, in view of the absolute continuity of ν with respect to μ.

Hence there is not an uncountable collection of atoms of the measure ν. Using the lemma 3, where the property V is: "E is an infinite atom of the measure ν", the existence of a set M follows such that if $E \subset X - M$, $E \in \mathscr{S}$, then E is not an infinite atom. Put $M = A$ in this case. In any case we have $A = \emptyset$ or A is an infinite atom of ν and for $E \subset X - A$, E is not an infinite atom.

Let us consider now $X - A$ and the measure μ on the measurable subsets of $X - A$. Evidently μ considered on measurable subsets of $X - A$ has the property (CCC). If there is not a set $E \subset X - A$, $E \in \mathscr{S}$ such that $\nu(E) > 0$, we put $B = \emptyset$ and the proof is finished. If there is a set $E \in \mathscr{S}$, $E \subset X - A$ with $\nu(E) > 0$ (and then evidently $\mu(E) > 0$) then $\nu(E)$ may be supposed to be finite because E is not an infinite atom of ν. Now the lemma 3 may be used for the property: "$E \subset X - A$, E is of σ-finite positive ν-measure". Owing to the fact that $\nu(E) > 0$ implies $\mu(E) > 0$ and to the property (C_μ), the existence of a set $B \subset X - A$ of a σ-finite measure ν follows such that if $E \subset X - A \cup B$, E is of σ-finite measure ν, then $\nu(E) = 0$. But the last is true even without the assumption of the σ-finteness. In fact, if $E \subset X - A \cup B$, $\nu(E) > 0$, then the existence of $E_1 \subset E$, $E_1 \in \mathscr{S}$, $\infty > \nu(E_1) > > 0$ follows, because E is not an infinite ν-atom. But then E_1 is of σ-finite positive measure and it is a contradiction. Hence $\nu(E) = 0$.

The proof of Theorem 1. The necessity is trivial. So let ν be absolutely continuous with respect to μ. Let A, B have the same meaning as in Lemma 4. Let us consider μ and ν on the measurable subsets of B. Since μ and ν, when considered on subsets of B, are σ-finite and B is measurable, the Radon-Nikodym theorem in it's original form (see [1] p. 128) may be used. Acording the last a function f^*, defined on B and measurable with respect to the σ-algebra of measurable subsets of B, exists such that

$$\nu(E) = \int_E f^* \, d\mu \tag{2}$$

Let us consider now the measure ν on the system of all measurable subsets of A. If there exists $E \in \mathscr{S}$, $E \subset A$, $\nu(E) = 0$, and $\mu(E) > 0$ then using lemma 3 we get the existence of $A_1 \subset A$, $A_1 \in \mathscr{S}$ such that $\mu(E) = 0$ for any $E \subset A$, $E \subset A - A_1$, $E \in \mathscr{S}$, for which $\nu(E) = 0$.

Define $f(x)$ as follows:

$$f(x) = \begin{cases} f^*(x) & \text{if } x \in B, \\ +\infty & \text{if } x \in A - A_1, \\ 0 & \text{if } x \in A_1 \cup (X - A \cup B) \end{cases}$$

Then f is $\mathscr{S}$-measurable. Put $V = A - A_1$, $Z = A_1 \cup (X - A \cup B)$. If $E \in \mathscr{S}$, then

$$\nu(E) = \nu(E \cap Z) + \nu(E \cap V) + \nu(E \cap B) \tag{3}$$

Evidently

$$0 = \nu(E \cap Z) = \int_{E \cap Z} f \, \mathrm{d}\mu \tag{4}$$

Further, according to (2)

$$\nu(E \cap B) = \int_{E \cap B} f^* \, \mathrm{d}\mu = \int_{E \cap B} f \, \mathrm{d}\mu \tag{5}$$

The relation

$$\nu(E \cap V) = \int_{E \cap V} f \, \mathrm{d}\mu \tag{6}$$

follows from the facts that $\nu(E \cap V) = \infty$ implies $\mu(E \cap V) > 0$ and $\nu(E \cap V) = 0$ implies $\mu(E \cap V) = 0$ and from the definition of f.

Hence (1)—(6) imply $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

The proof of Theorem 2. From the property (CCC) and from Lemma 3 the existence of $M \in \mathscr{S}$ follows such that if $E \in \mathscr{S}$, $E \subset X - M$ then $\nu(E) = 0$. Let us consider ν on the measurable subsets of the set M. According to (c) of Lemma 1 μ has on M the property (CCC).

Using Theorem 1 we have $\nu(E) = \int_E f^* \, \mathrm{d}\mu$ for any $E \in \mathscr{S}$, $E \subset M$, where f^* is defined on M and measurable with respect to the σ-algebra of measurable subsets of M. It is sufficient to put

$$f(x) = \begin{cases} f^*(x) & \text{if} \quad x \in M \\ 0 & \phantom{\text{if}} \quad x \in X - M \end{cases}$$

and we have for any measurable set $E \in \mathscr{S}$

$$\nu(E) = \nu(E - M) + \nu(E \cap M) = \int_{E-M} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{E \cap M} f^* \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

Theorem 2 is proved.

If $X \in \mathscr{S}$ and μ is σ-finite, then from Theorem 1 the usual form of the Radon-Nikodym theorem (see e.g. [2] p. 128) follows. Even without the assumption of the σ-finiteness we get a theorem as it is formulated in [2] p. 131 (7). The Radon-Nikodym theorem in the form as it is stated in [7] or [1] follows from Theorem 1 too. In fact if ν is finite then (CCC) is satisfied in view of Lemma 1 (d), thus Theorem 1 may be used. The theorems 1 and 2 cover also more general cases as it follows from Lemma 2.

Remark. Denote, as usually, $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ any of the nonnegative functions for which $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ whenever $E \in \mathscr{S}$. Such a function need not be uniquelly determined

μ-almost everywhere, as it is in the case of totally σ-finite measures. The space $X=\{a\}$, $\mathscr{S}=\{\{a\},\emptyset\}$ and the measures μ, ν, where $\mu(\{a\})=\nu(\{a\})=\infty$ are such examples.

Neverthelles if $\frac{d\nu}{d\mu}$, $\frac{d\mu}{d\lambda}$ are any Radon-Nikodym derivatives then $\frac{d\nu}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{d\lambda}$ is a Radon-Nikodym derivative of ν with respect to λ. The proof is quite similar to that one for totally finite measures ([2] p. 133). In particular if f is nonnegative measurable, we have $\int f\, d\lambda = \int f \frac{d\mu}{d\lambda}\, d\lambda$ whenever $\frac{d\mu}{d\lambda}$ exists.

The following part of this paper is a note related to papers [3], [8], [9]. Here we give an abstract attitude to the problem. An abstract approach was recommended also in [3]. Our seems to be different.

Let $(X,\mathscr{S})$ be a measurable space, μ a measure on $\mathscr{S}$. The symbols $L^1(\mu)$, $L^\infty(\mu)$ denote the sets of all μ-integrable and μ-essentially bounded functions respectively. For the sake of simple formulations, let us adopt some notations.

If μ, ν are measures $\mathscr{F}\subset L^\infty(\mu)$ a collection of nonnegative functions, then $\mathscr{F}$ is said to satisfy the property (p) provided that for any sequence $(f_n)_{n=1}^\infty$ of functions from $\mathscr{F}$ the following is true:

(p) $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n g\, d\mu=0$, for every $g\in L^1(\mu) \Rightarrow \lim \int f_n h\, d\nu=0$, for every $h\in L^1(\nu)$, $h\geqq 0$.

The collection $\mathscr{F}$ is said to be ν-determining if for any $E\in\mathscr{S}$ with $\infty>\nu(E)>0$ a positive number c exists, such that to any $\varepsilon>0$ two sets G_ε, F_ε and a function $f_\varepsilon\in\mathscr{F}$ exists with the following properties:

$$G_\varepsilon, F_\varepsilon\in\mathscr{S};\quad F_\varepsilon\subset E\subset G_\varepsilon,\ \mu(G_\varepsilon-F_\varepsilon)<\varepsilon,\ \nu(F_\varepsilon)\geqq c;$$
$$0\leqq f_\varepsilon\leqq 1,\ f_\varepsilon(x)=1 \quad\text{if}\quad x\in F_\varepsilon,\ f_\varepsilon(x)=0 \quad\text{if}\quad x\notin G_\varepsilon.$$

Proposition 1. If μ, ν are regular Borel measures (see [2] p. 224) on a locally compact topological space then the set $\mathscr{F}$ of all bounded continuous measurable functions is ν-determining.

Proof. Let $E\in\mathscr{S}$, $\infty>\nu(E)>0$. From the ν-inner regularity of the set E there exists a compact set K such that $\nu(K)>0$, $K\subset E$. Let $\varepsilon>0$. The μ-regularity implies the existence of an open Borel G and compact $L\subset E$ such that $\mu(G-L)<$ $<\varepsilon$.

Put $G_\varepsilon=G$ and $F_\varepsilon=K\cup L$. Then $\mu(G_\varepsilon-F_\varepsilon)<\varepsilon$, $F_\varepsilon\subset E\subset G_\varepsilon$. Since F_ε is compact and $X-G_\varepsilon$ is closed a function f_ε exists (see [2] p. 216) such that

$$f_\varepsilon(x)=1 \text{ if } x\in F_\varepsilon,\ f_\varepsilon(x)=0 \text{ if } x\notin G_\varepsilon,\ 0\leqq f_\varepsilon(x)\leqq 1$$

for $x\in X$. Owing to continuity of f and measurability of G, the function f_ε is measurable and hence $f_\varepsilon\in\mathscr{F}$.

Proposition 2. Let X be a normal topological space and μ, ν measures defined on the σ-ring generated by closed sets. Let μ, ν be inner regular with respect to the collection of all closed sets and outer regular with respect to the collection of all open sets. Then the set $\mathscr{F}$ of all nonnegative bounded continuous functions is ν-determining.

The proof is similar to that of Proposition 1 and therefore is omitted.

Theorem 3. Let $\mathscr{F} \subset L^1(\mu)$ be a set of nonnegative measurable functions which is ν-determining. Let ν be semifinite (see [1] p. 81). Then (p) implies $\nu \ll \mu$.

Proof. Suppose that $\nu \ll \mu$ does not hold. Then a set $E \in \mathscr{S}$ exists such that $\mu(E)=0$, $\nu(E)>0$. We may suppose that $\infty > \nu(E) > 0$, since ν is semifinite. According to the assumptions a number $c>0$ exists such that for $\varepsilon > 0$ there are F_ε, $G_\varepsilon \in \varphi$ and a function $f_\varepsilon \in \mathscr{F}$ with the known properties. Putting successively $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ we obtain sequences $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, $(G_n)_{n=1}^{\infty}$, of measurable sets and a sequence $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ of functions belonging to $\mathscr{F}$ such that:

$$\mu(G_n - F_n) < \frac{1}{n}, \quad F_n \subset E \subset G_n,\ \nu(F_n) \geqq c,\ f_n(x) = 1$$

if $x \in F_n$, $f_n(x) = 0$ if $x \in X - G_n$ and $0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ for $x \in X$.

If $g \in L^1(\mu)$, then

$$|\textstyle\int f_n g \, \mathrm{d}\mu| = \left| \displaystyle\int_{G_n} f_n g \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_{G_n - F_n} f_n g \, \mathrm{d}\mu \right| \leqq \int_{G_n - F_n} |g| \, \mathrm{d}\mu \tag{7}$$

Since $\mu(G_n - F_n) < \frac{1}{n}$, we obtain from (7) $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n g \, \mathrm{d}\mu = 0$. Hence from (p) $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n h \, \mathrm{d}\nu = 0$, for any $h \in L_1(\nu)$, h nonnegative.

Putting $h = \chi_E$, where χ_E is the characteristic function of E, we have

$$\lim_{n\to\infty} \textstyle\int f_n \chi_E \, \mathrm{d}\nu = 0. \tag{8}$$

On the other hand

$$\textstyle\int f_n \chi_E \, \mathrm{d}\nu = \displaystyle\int_E f_n \, \mathrm{d}\nu \geqq \nu(F_n) \geqq c > 0.$$

Hence $\limsup \int f_n \chi_E \, \mathrm{d}\nu > 0$. It is a contradiction with (8)

From Theorem 3, by means of propositions 1 and 2 we obtain conditions for $\nu \ll \mu$ where ν, μ are suitable measures in topological spaces. For some kinds of measures in topological spaces (p) is also necessary for $\nu \ll \mu$. But these cases are known. They were discussed in [3], [6], [8], [9].

REFERENCES

[1] Berberian, S. K.: Measure and integration. New York 1965.
[2] Halmos, P. R.: Measure theory. New York 1950.
[3] Chaterji, S. D.: On a characterization of absolute continuity. J. Math. Anal. Appl. 27, 279—281.
[4] Neubrunn, T.: A note on the absolute continuity of measures. (Russian). Mat. Čas. 1966, 21—30.
[5] Neubrunn, T.: On the equivalence of an exhaustion principle and the axiom of choice. Fund. Math. 60 (1967), 209—211.
[6] Siddiqui, J. A.: On a characterization of absolute continuity. Arch. Math. Vol. 22 (1971), 624—626.
[7] Tolstov, G. P.: To the Radon-Nikodym theorem. (Russian). Mat. Sbornik I. 80 122:3 (11) (1969), 334—338.
[8] Zalcman, L.: A note on absolute continuity. J. Math. Anal. Appl. 24, (1968), 527—529.
[9] Welland, R. and De Vito, C.: A characterization of absolute continuity. J. Math. Anal. Appl. 20 (1967) 258—261.

Received February 27, 1979

Author's address:
Katedra teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky MFFUK,
Mlynská dolina,
816 31 Bratislava

SÚHRN

O NIEKTORÝCH PODMIENKACH PRE ABSOLÚTNU SPOJITOSŤ MIER

T. Neubrunn, Bratislava

Uvádzajú sa dve podmienky pre platnosť Radonovej-Nikodymovej vety pre miery, ktoré nemusia byť σ-konečné. Ďalej sa formulujú a dokazujú podmienky pre absolútnu spojitosť mier pomocou limitných vlastností postupností integrálov istého typu funkcií.

РЕЗЮМЕ

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ МЕР

Т. Нойбрун, Братислава

Даются две варианты теоремы Радона-Никодима в случае мер, которые неявляются σ-конечными. Далее, дано одно замечание к характеризации абсолютной непрерывности при помощи определенных систем функций.