UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XXXIX — 1980

EINIGE BEMERKUNGEN ZUR DARSTELLENDEN GEOMETRIE EINES RAUMES ÜBER EINEN ANGEORDNETEN KÖRPER

VÁCLAV MEDEK, Bratislava

Gewidmet dem Professor O. Borůvka zu seinem achtzigsten Geburtstag

Wir werden uns beschäftigen mit darstellender Geometrie eines dreidimensionalen Raumes R_3 über einen angeordneten kommutativen Körper T. Für die zentrale Projektion werden wir den Raum R_3 in gewöhnlicher Weise an den Raum $\tilde{R}_3$ so erweitern, dass wir zum Raum R_3 die uneigentlichen Punkte und Geraden und die uneigentliche Ebene hinzufügen.

Bei einer Parallelprojektion werden wir den Raum R_3 auf eine Ebene $\pi \subset R_3$ projizieren und bei einer Zentralprojektion werden wir den Raum $\tilde{R}_3$ auf eine Ebene $\tilde{\pi}$ projizieren. Wenn es nicht nötig wird zwischen einer Zentral- oder Parallelprojektion zu entscheiden, werden wir einfach über eine Projektion sprechen. Die projizierende Gerade ist bei einer Parallelprojektion jede Gerade aus der Projektionsrichtung und bei einer Zentralprojektion ist es jede Gerade, die durch das Projektionszentrum geht. Die projizierende Figur ${}^pU$ der Figur U ist die Menge aller solchen Punkten aller der projizierenden Geraden, die einen nichtleeren Durchschnitt mit der Figur U haben.

A. Seien U und V zwei Figuren; dann gelten diese zwei Sätze:

Satz 1. Seien U_1, V_1 die Projektionen der Figuren U, V; dann die Projektion der Vereinigung $U \cup V$ ist die Vereinigung $U_1 \cup V_1$.

Satz 2. Seien U_1, V_1 die Projektionen der Figuren U, V; dann der Durchschnitt $U_1 \cap V_1$ ist gerade dann die Projektion des Durchschnittes $U \cap V$, wenn über die projizierenden Geraden gilt: Wenn eine projizierende Gerade mit beiden Figuren U, V einen nichtleeren Durchschnitt hat, dann hat sie einen nichtleeren Durchschnitt auch mit dem Durchschnitt $U \cap V$.

Der Beweis des ersten Satzes ist trivial.

Beweis des zweiten Satzes. a) Sei die Projektion des Durchschnittes $U \cap V$ der Durchschnitt $U_1 \cap V_1$; dann jede projizierende Gerade, die durch einen Punkt aus dem Durchschnitt $U_1 \cap V_1$ geht, geht auch durch einen Punkt aus dem Durchschnitt $U \cap V$. Wenn eine projizierende Gerade durch keinen Punkt aus dem Durchschnitt

$U_1 \cap V_1$ geht, dann hat sie entweder einen nichtleeren Durchschnitt gerade mit einer Figur U oder V, oder hat sie einen leeren Durchschnitt mit beiden Figuren U, V.

b) Wenn die projizierenden Geraden die Eigenschaft aus dem Satz 2 haben, dann jeder Punkt aus dem Durchschnitt $U \cap V$ muss seine Projektion in dem Durchschnitt $U_1 \cap V_1$ haben, jeder Punkt aus dem Durchschnitt $U_1 \cap V_1$ muss die Projektion eines Punktes aus dem Durchschnitt $U \cap V$ sein und kein anderer Punkt kann schon die Projektion irgendwelches Punktes aus dem Durchschnitt $U \cap V$ sein.

B. Im Weiteren werden wir uns mit der Projektion einer konvexen Figur beschäftigen. Aus der Definition einer konvexen Figur folgt unmittelbar, dass die parallele Projektion einer konvexen Figur wieder eine konvexe Figur ist.

Wir erweitern jetzt den Begriff der konvexen Figur auf den Raum $\tilde{R}_3$.

Die Strecke AB im Raume $\tilde{R}_3$ ist:

1. der Punkt A, wenn $A = B$;

2. die Strecke $AB \subset R_3$, wenn A, B zwei verschiedene eigentliche Punkte sind;

3. die Halbgerade mit dem Anfangspunkt A, die einer Geraden aus der Richtung B gehört, wenn A ein eigentlicher und B ein uneigentlicher Punkt ist;

4. die Menge der Punkten auf der uneigentlichen Geraden AB (wenn A, B uneigentliche Punkte sind), die wir in dieser Weise bekommen: Sei V ein willkürlicher eigentlicher Punkt und a, b seien die Geraden VA und VB. Dann existieren 4 konvexe Winkel (die nicht gerade sind) mit den Schenkeln auf den Geraden a, b und der Durchschnitt zweier von diesen Winkeln enthält die Geraden, die durch den Punkt V gehen. Wir bekommen so zwei Mengen; die uneigentlichen Punkte aller Geraden einer aus diesen Mengen bilden die Strecke AB.

Die konvexe Figur im Raume $\tilde{R}_3$ ist die Menge U aller solchen Punkte, dass mit allen Punkten A, B der Menge U die ganze Strecke AB in der Menge U enthalten ist.

Sei S das Projektionszentrum und sei $\tilde{\pi}^S$ die Ebene, die durch den Punkt S geht und die mit der Ebene $\tilde{\pi}$ eine gemeinsame uneigentliche Gerade hat. Dann über die Zentralprojektion einer konvexen Figur U aus einem Punkte S auf die Ebene $\tilde{\pi}$ gilt.

Satz 3. Die konvexe Figur $U \subset \tilde{R}_3$ projiziert sich aus dem Punkte S auf die Ebene $\tilde{\pi}$ in eine konvexe Figur U_s gerade dann, wenn entweder jede Strecke $AB \subset U$ mit der Ebene $\tilde{\pi}^S$ gerade einen seinen Endpunkt gemeinsam hat, oder $AB \subset \tilde{\pi}^S$.

Beweis. a) Setzen wir voraus, dass die Figur U die im Satz 3 angeführte Eigenschaft hat und dass U_s ihre Projektion aus dem Punkte S auf die Ebene $\tilde{\pi}$ ist; wir sollen beweisen, dass dann die Figur U_s eine konvexe Figur ist. Seien A_s, B_s

zwei willkürliche Punkte der Figur U_s; dann existieren solche Punkte A, B der Figur U, dass ihre Projektionen die Punkte A_s, B_s sind. Es genügt nur den Fall in Betracht nehmen, wenn $A_s \neq B_s$. Diese drei Fälle sind möglich:

1. Beide Punkte A_s, B_s sind eigentliche Punkte; α) wenn A, B eigentliche Punkte sind, dann hat die Strecke AB mit der Ebene $\bar{\pi}^S$ keinen gemeinsamen Punkt und ihre Projektion ist die Strecke A_sB_s; die ganze Strecke A_sB_s gehört also zur Figur U_s. β) Sei A ein eigentlicher Punkt und sei B ein uneigentlicher Punkt; dann AB ist diejenige von zwei möglichen Halbgeraden mit dem Anfangspunkt A, die mit der Ebene $\bar{\pi}^S$ keinen gemeinsamen Punkt hat. Diese Halbgerade projiziert sich in die Strecke A_sB_s und also gilt wieder $A_sB_s \subset U_s$. γ Seien A, B zwei uneigentliche Punkte; dann gehört der Figur U die von zwei möglichen Strecken AB, die die Menge der uneigentlichen Punkte aller Geraden des konvexen Winkels mit den Schenkeln SA_s, SB_s ist (da die zweite mögliche Strecke AB mit der Ebene $\bar{\pi}^S$ einen gemeinsamen Punkt hat). Dann aber ist die Projektion der Strecke AB wieder die Strecke A_sB_s.

2. Sei A_s ein eigentlicher Punkt und B_s ein uneigentlicher Punkt; dann muss der Punkt B zur Ebene $\bar{\pi}^S$ gehören und da A_s ein eigentlicher Punkt ist, kann der Punkt A zur Ebene $\bar{\pi}^S$ nicht gehören. Die Strecke AB kann mit der Ebene $\bar{\pi}^S$ nur den Punkt B gemeinsam haben. α) Seien A, B eigentliche Punkte; dann projiziert sich die Strecke AB in die Halbgerade mit dem Anfangspunkt A_s, die auf der Geraden liegt und mit dem Punkt B_s ergänzt ist; das ist aber eine Strecke in der Ebene $\bar{\pi}$. β) Sei A ein eigentlicher Punkt und B ein uneigentlicher Punkt; dann projiziert sich die Strecke AB in die Strecke A_sB_s. γ) Sei A ein uneigentlicher Punkt und B ein eigentlicher Punkt; dann ist die Projektion der Strecke AB die Halbgerade mit dem Anfangspunkt A_s, die der Geraden A_sB_s gehört und mit dem uneigentlichen Punkt B_s ergänzt ist. Das ist wieder eine Strecke in der Ebene $\bar{\pi}$. δ) Seien A, B uneigentliche Punkte; dann die Punkte A, B sind die Endpunkte der Strecken, die sich in die Halbgerade mit dem Anfangspunkt A_s projizieren, die der Geraden A_sB_s gehört und mit dem Punkt B_s ergänzt ist.

3. Seien A_s, B_s uneigentliche Punkte; dann muss die ganze Strecke AB zur Ebene $\bar{\pi}^S$ gehören. Wir können voraussetzen, dass die Strecke AB nicht auf einer Geraden, die durch den Punkt S geht, liegt, da dann die Projektion der Strecke AB ein Punkt sein müsste und gerade so können wir voraussetzen, dass $A_s \neq B_s$ ist. α) Seien A, B eigentliche Punkte; dann die Halbgeraden SA, SB sind die Schenkel eines konvexen Winkels, der die Strecke AB enthält und die uneigentliche Punkte aller Geraden, die die Halbgeraden aus diesem Winkel enthalten, bilden die Strecke A_sB_s. β) Sei A ein eigentlicher Punkt und B ein uneigentlicher Punkt; die Strecke AB enthält dann den konvexen Winkel mit einem Schenkel SA und der zweite Schenkel liegt auf der Geraden SB. Die Projektion der Strecke AB ist wieder die Strecke A_sB_s. Wenn A, B uneigentliche Punkte sind, dann ist $A_sB_s = AB$.

Alle diese Behauptungen kann man leicht analytisch beweisen.

b) Sei umgekehrt die Projektion der konvexen Figur U eine konvexe Figur U_s. Wenn alle Punkte der Figur U_s eigentlich sind, dann hat die Figur U keinen gemeinsamen Punkt mit der Ebene $\bar{\pi}^S$. Setzen wir jetzt voraus, dass die Figur U_s den uneigentlichen Punkt A_s und den eigentlichen Punkt B_s enthält; dann die Strecke A_sB_s ist die Halbgerade auf der Geraden A_sB_s mit dem Anfangspunkt B_s und die mit dem uneigentlichen Punkt A_s ergänzt ist. Das Original AB der Strecke A_sB_s bei der Zentralprojektion ist die Strecke AB, die mit der Ebene $\bar{\pi}^S$ gerade den Punkt A gemeinsam haben kann. Wenn die Figur U_s zwei verschiedene uneigentliche Punkte A_s, B_s enthält, dann enthält sie die ganze Strecke A_sB_s. Das Original der Strecke A_sB_s ist auch eine Strecke AB, deren Endpunkte auf den Schenkeln SA_s, SB_s eines konvexen Winkels liegen. Die ganze Strecke AB liegt in der Ebene $\bar{\pi}^S$.

C. Wir werden die Definition des sichtbaren Teiles einer Figur einführen.

Definition 1. Bei der Zentralprojektion mit dem Zentrum S alle eigentlichen Punkte der Figur U bilden den sichtbaren Teil der Figur U so, dass kein innerer Punkt der Strecke AB der Figur U gehört. Für eine Parallelprojektion bilden den sichtbaren Teil der Figur U alle solche eigentliche Punkte A der Figur U, dass die Halbgerade der projizierenden Geraden des Punktes A, die den Anfangspunkt A hat und die die umgekehrte Orientation zur orientierten projizierenden Geraden des Punktes A bestimmt, enthält ausser dem Punkt A keinen weiteren Punkt der Figur U.

Definition 2. Die Sichtbarkeitsfigur ${}^pU^v$ einer Figur U bei der Zentralprojektion mit dem Zentrum S ist der Teil der projizierenden Figur ${}^pU$, der aus allen Punkten aller solchen Strecken SA gebildet ist, dass der Punkt A dem sichtbaren Teil der Figur U gehört. Die Sichtbarkeitsfigur ${}^pU^v$ einer Figur U bei einer Parallelprojektion ist der Teil der projizierenden Figur ${}^pU$, der aus allen Punkten aller solchen Halbgeraden mit dem Anfangspunkt A aus dem sichtbaren Teil der Figur U gebildet ist, die auf der projizierenden Geraden des Punktes A liegen und die die umgekehrte Orientation zur Orientation der projizierenden Geraden haben.

Bezeichnen wir ${}^pU^n = {}^pU \setminus {}^pU^v$. Dann gilt

Satz 4. Seien U, V zwei Figuren; dann der sichtbare Teil der Figur $U \cup V$ ist die Figur

$$(U\cup V)\cap\{({}^pU^v\cup{}^pV^v)\setminus[({}^pU^v\cup{}^pV^v)\cap({}^pU^n\cup{}^pV^n)]\}.$$

Beweis. Es genügt den Satz nur für die Zentralprojektion zu beweisen, da für die Parallelprojektion der Beweis ganz ähnlich ist. Wenn eine projizierende Gerade einen nichtleeren Durchschnitt mit gerade einer Figur U oder V (z.B. mit der Figur U) hat, dann hat sie mit den Figuren ${}^pV$, ${}^pV^v$ gerade den Punkt S gemeinsam und mit der Figur ${}^pV^n$ hat sie einen leeren Durchschnitt. Auf dieser projizierenden Geraden bekommen wir dann einen einzigen Punkt, der dem sichtbaren Teil der Figur U gehört. Setzen wir jetzt voraus, dass die projizierende Gerade s einen nichtleeren Durchschnitt mit beiden Figuren U und V hat und dass die Gerade s einen Punkt ${}^sU$ aus dem sichtbaren Teil der Figur U und einen Punkt ${}^sV$ aus dem sichtbaren Teil der Figur V enthält. Dann zur Figur ${}^pU^v \cup {}^pV^v$ gehört die Vereinigung der Strecken S^sU, S^sV. Es sind zwei Fälle möglich: 1. Eine Strecke (von den Strecken S^sU, S^sV) enthält die andere (sei z.B. S^sU die längere Strecke); dann die Figur ${}^pU^n \cup {}^pV^n$ enthält die ganze Halberade (ausser dem Anfangspunkt) mit dem Anfangspunkt ${}^sV$ und der Durchschnitt $({}^pU^v \cup {}^pV^v) \cap ({}^pU^n \cup {}^pV^n)$ enthält die Strecke mit den Endpunkten ${}^sU$, ${}^sV$ (ausser dem Punkt ${}^sV$). Dann entnehmen wir diesen Durchschnitt der Strecke S^sV und wir bilden den Durchschnitt mit der Figur $U \cup V$. Wir bekommen gerade den Punkt ${}^sV$. 2. Die zwei Strecken S^sU, S^sV haben gerade den Punkt S gemeinsam. Dann gehört zur Figur ${}^pU^v \cup {}^pV^v$ die ganze Strecke ${}^sU^sV$ und zur Figur ${}^pU^n \cup {}^pV^n$ gehören zwei Halbgeraden (ausser Anfangspunkten) mit den Anfangspunkten ${}^sU$, ${}^sV$ und diese Halbgeraden haben einen leeren Durchschnitt. Dann die Figur $({}^pU^v \cup {}^pV^v) \cap ({}^pU^n \cup {}^pV^n)$ ist die leere Menge und die Figur $(U \cup V) \cap ({}^pU^v \cup {}^pV^v)$ enthält gerade die Punkte ${}^sU$ und ${}^sV$, die zum sichtbaren Teil der Figur $U \cup V$ gehören.

Received November 3, 1978

Author's address:
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty SVŠT,
Radlinského ul. 11, 884 20 Bratislava

SÚHRN

POZNÁMKY K DESKRIPTÍVNEJ GEOMETRII V PRIESTORE NAD USPORIADANÝM POĽOM

V. Medek, Bratislava

Článok sa zaoberá problematikou priemetu zjednotenia a prieniku dvoch útvarov, (stredovým) priemetom konvexného útvaru a viditeľnosti v priestore nad usporiadaným poľom.

РЕЗЮМЕ

ЗАМЕТКИ К НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ НАД УПОРЯДОЧЕННЫМ ПОЛЕМ

В. Медек, Братислава

Эта статья занимается проекцией соединения и пересечения двух объектов, далее (центральной) проекцией выпуклого объекта и видимостью соединения двух объектов.