UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XXXVIII - 1981

RELIABILITA TESTOV

MILAN DUFEK, Praha – VIERA UHERČÍKOVÁ, Bratislava

Kvantitatívne poňatie pedagogiky usiluje, aby sa pedagogika priblížila exaktnosťou prírodným vedám. S tým súvisí rastúce uplatnenie matematických metód v pedagogickom výskume.

Matematizácia neznamená len kvantifikáciu, ale aj napr. presnú klasifikáciu skúmaných javov a formalizáciu ich analýzy.

S matematizáciou úzko súvisí teória merania vo vedách ako sociológia, pedagogika, psychológia. Je vypracovaná rozsiahla všeobecná teória merania v sociológii (pozri [5]).

Meranie objektívnych veličín v prírodných vedách sa dá kvantitatívne vyjadriť bez ťažkostí. Omnoho obťažnejšie je meranie pedagogické a psychologické, t.j. meranie charakteristík ako je únava, tréma, schopnosti, atď.

Z matematického hľadiska sú všetky merania funkciami, ak považujeme množinu meraných objektov za ich definičný obor a čísla, ktoré sa objektom priraďujú podľa istých pravidiel, za ich obor hodnôt. Teda akýmkoľvek postupom merania získame množinu usporiadaných dvojíc, pričom prvý člen dvojice je meraným objektom a druhý člen je číslom priradeným objektu podľa pravidiel merania.

Pre potreby tohoto článku budeme užívať Stevensovu definíciu merania:

M e r a n i e znamená vo svojom najširšom význame priraďovanie čísel predmetom alebo javom podľa pravidiel.

Ak teda chceme uskutočniť meranie v záujme zvýšenia exaktnosti v oblasti pedagogického a psychologického výskumu, je potrebné zostaviť pravidlá merania a použiť pri meraní u skupiny jedincov nejaký prostriedok merania.

Potom je nutné riešiť dve základné otázky:

1. Aká je reliabilita prostriedku merania, t.j. aká je jeho spoľahlivosť.
2. Aká je validita prostriedku merania, t.j. či meriame naozaj to, čo mienime merať. (1)

Totiž meranie v oblasti pedagogického a psychologického výskumu obsahuje chyby. Pokiaľ nepoznáme reliabilitu a validitu získaných údajov, nemajú veľkú spoľahlivosť ani výsledky výskumu. Ak sú údaje nespoľahlivé, potom aj závery z nich plynúce sú nespoľahlivé.

Cieľ nášho článku je nasledovný:

Za jeden z nástrojov (prostriedkov) merania môžeme považovať didaktický test. V súčasnosti nie je dostatok štandardizovaných testov pre vysoké školy. Preto je potrebné, aby sa neštandardizované testy používali kvalifikovane, teda aby bola zistená ich reliabilita a až potom sa považovali za spoľahlivé ukazovatele výsledky merania týmito testami.

---

(1) Vysvetľovať pojem validity by prekročilo rozsah tohoto článku. Uvedieme len stručne definíciu.
Validita je stupeň presnosti, ktorým napr. test meria to, čo má merať. Napr. ak chceme zostrojiť test na meranie porozumenia vedeckým postupom alebo schopnosti aplikácie týchto postupov, nesmieme zostaviť test s položkami, obsahujúcimi len fakty o vedeckých postupoch. Nemerali by sme to, čo sme chceli merať. Test by nebol validný. Meral by faktické znalosti, a nie porozumenie alebo schopnosť aplikácie.

Preto chceme upozorniť na dôležitosť skúmania reliability a uviesť jednu metódu výpočtu koeficientu reliability.

DEFINÍCIA RELIABILITY

Najprv uvedieme názornejšiu definíciu, ktorú neskôr upresníme a numericky vyjadríme na základe analýzy rozptylu.

Reliabilita je presnosť a precíznosť prostriedku merania. Mieru reliability vyjadrujeme na základe výpočtu koeficientu reliability.

Reliabilitu môžeme skúmať z rôznych hľadísk:

1. Dobrá reliabilita nám má zaručiť, že pri opätovnom meraní tej istej skupiny objektov pomocou toho istého alebo zrovnateľného prostriedku merania máme dostať tie isté alebo podobné výsledky. Teda zaručuje nám stabilitu, spoľahlivosť výsledkov merania.

2. Dobrá reliabilita má zabezpečiť, aby výsledky získané prostriedkom merania boli skutočnými mierami skúmanej vlastnosti. Teda zabezpečuje presnosť prostriedku merania.

Reliabilita teda súvisí aj s otázkou spoľahlivosti testových výsledkov. Mieru spoľahlivosti testov ých výsledkov môžeme vyjadriť pomocou korelačného koeficientu nasledovnými metódami:

- metóda retestová spočíva v zisťovaní korelácie medzi výsledkami, ktoré obdržíme pri opakovanom testovaní rovnakej skupiny rovnakým testom po určitom časovom odstupe (koeficient stability).
- metóda paralelných testov znamená zisťovanie korelácií medzi výsledkami testovania rovnakej skupiny skúšaných dvoma paralelnými testami, t.j. takými, ktoré obsahujú odlišné, ale vzájomne zameniteľné ekvivalentné testové položky (koeficient ekvivalencie).
- metóda zisťovania korelácie medzi výsledkami dosiahnutými v jednotlivých častiach testu (koeficient konzistencie testu).

Ďalej upresníme pojem reliability na základe analýzy rozptylu.

TEÓRIA RELIABILITY

Z teórie analýzy rozptylu vyplýva nasledovné:

Ak máme získať nejakú predstavu o nejakej množine nameraných číselných údajov, musíme sa zaoberať ich variabilitou. Každá množina nameraných údajov náhodného výberu zo základného štatistického súboru má celkový rozptyl spôsobený jednotlivými zdrojmi rozptylov.

Keď sa jedná o meranie pedagogické alebo psychologické, t.j. odvodené z ľudských reakcií, budú sa vždy vyskytovať najmenej dva zdroje rozptylu. Jeden z nich bude zodpovedať systematickým zdrojom variability, druhý náhode, či náhodným chybám.

Zdroje systematického rozptylu spôsobujú vychyľovanie výsledkov jedným alebo druhým smerom. Napr. efektívna metóda učenia môže systematicky ovplyvniť dosiahnutie lepších výsledkov subjektov.

Zdroje náhodného rozptylu spôsobujú, že údaje kolíšu raz tak, raz ináč. Náhodný rozptyl vzniká variabilitou meracieho procesu.

Teda celkový rozptyl V_t vzniká z jednotlivých zdrojov rozptylu.

Pri každom výskume je nezávisle premenná zdrojom systematického rozptylu. Zámerom výskumníka je, aby sa napr. dve experimentálne skupiny systematicky líšili. Najdôležitejší typ systematického rozptylu je rozptyl medzi skupinami V_m, čiže experimentálny rozptyl.

Ak vypočítame rozptyl pre každú skupinu zvlášť, a potom ich priemer, ide o rozptyl vo vnútri skupín V_{ch}: Zodpovedá náhodným vplyvom, preto ho nazývame náhodným rozptylom.

Za istých teoretických predpokladov sú tieto rozptyly aditívne a platí

$$V_t = V_m + V_{ch}$$

Akýkoľvek rad meraní má celkovú variabilitu. Z hľadiska uvedenej teórie môžeme posudzovať množstvo chýb merania obsiahnutých v nejakom prostriedku merania. Chyby merania sú náhodnými chybami.

Sú výsledkom celého radu príčin - napr. únavy - ktoré v určitej dobe <u>dočasne</u> ovplyvňujú predmet alebo nástroj merania. Nakoľko sú chyby obsiahnuté v nástroji merania, natoľko je tento prostriedok <u>nespoľahlivý</u>.

Z tohoto hľadiska môže byť <u>reliabilita</u> definovaná ako <u>relatívna neprítomnosť chýb merania u určitého prostriedku merania</u>. <u>Reliabilita teda súvisí s náhodnou chybou</u>.

Prejdime teraz k aplikácii uvedenej teórie na didaktické testy. Každý subjekt podrobený výkonovému testu získa určité skóre B_t. Toto skóre má dve zložky:

- správnu zložku B_∞ /ideálnu/
- zložku chýb B_{ch}

Zložku chýb dostaneme z chýb merania. Platí:

$$B_t = B_\infty + B_{ch}$$

a tomu zodpovedajúci rozptyl

$$V_t = V_\infty + V_{ch}$$

Reliabilita sa definuje chybou: čím viac chýb, tým väčšia nespoľahlivosť, a naopak. Teda v prípade, že vieme určiť variabilitu chýb v akomkoľvek meraní, môžeme tiež určiť <u>spoľahlivosť merania</u>.

Ako sme už uviedli, mieru reliability vyjadrujeme <u>koeficientom reliability</u> r_t. Potom dve ekvivalentné definície reliability majú tvar

1. $$r_t = \frac{V_\infty}{V_t}$$

2. $$r_t = 1 - \frac{V_{ch}}{V_t}$$

VÝPOČET KOEFICIENTU RELIABILITY

Existujú rôzne vzťahy pre výpočet koeficientu reliability. Kerlinger uvádza výpočet na základe dvojrozmernej analýzy rozptylu, ktorý je zo známych a dostupných prameňov najprecíznejší a teoreticky podložený.

Z rovnice

$$V_t = V_m + V_{ch}$$

je rozptyl vo vnútri skupín (chybový) ako každý iný typ náhodného rozptylu len odhadom náhodného (chybového) rozptylu. Rozptyl vo vnútri skupín môže obsahovať aj nejaké zdroje systematického rozptylu, napr. rozptyl spôsobený individuálnymi rozdielmi. Keď je to možné, máme oddeliť (extrahovať) ktorýkoľvek z týchto iných rozptylov.

Analýza rozptylu poskytuje pri experimentálnej aplikácii na didaktické testy tieto rozptyly:

- medzi položkami
- medzi osobami
- reziduálny rozptyl alebo rozptyl chýb.

Z hľadiska teórie reliability je dôležitý najmä rozptyl osôb a chýb. Celkový rozptyl je mierou individuálnych rozdielov. Teda namiesto V_t môžeme písať V_{ind}, potom

$$V_{ind} = V_m + V_{ch}$$

a pre koeficient reliability platí

$$r_t = 1 - \frac{V_{ch}}{V_{ind}}$$

Na základe tohoto vzťahu pomocou dvojrozmernej analýzy rozptylu môžeme vypočítať koeficient reliability nasledovne [2]:

---

(2) Podľa [1] uvedenej v literatúre

Nech napr. m jedincov vyrieši test, obsahujúci n položiek. Údaje týchto osôb sú uvedené v tabuľke 1.

osoby	položky				
i \ j	1	2	3	....	n
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	....	x_{1n}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	....	x_{2n}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	....	x_{3n}
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	....	x_{mn}

Tabuľka 1.

Vypočítame

$$C = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)^2}{m \cdot n}$$

medzi položkami

$$Q_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)^2}{m} - C$$

medzi osobami

$$Q_2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^2}{n} - C$$

celková

$$Q_3 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 - C$$

zdroj rozptylu	stupne voľnosti	súčet štvorcov	podiel	F-test
položky	ν_1	Q_1	$P_1 = \frac{Q_1}{\nu_1}$	$\frac{P_1}{P_3}$
osoby	ν_2	Q_2	$P_2 = \frac{Q_2}{\nu_2}$	$\frac{P_2}{P_3}$
reziduálny pol. x os.	ν_3	$Q_4 = Q_3 - (Q_1 + Q_2)$	$P_3 = \frac{Q_4}{\nu_3}$	
celkový súčet	ν_4	Q_3		

Tabuľka 2.

kde

$$\nu_1 = n - 1$$

$$\nu_2 = m - 1$$

$$\nu_3 = \nu_1 \cdot \nu_2$$

$$\nu_4 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$$

$$r_t = 1 - \frac{V_{ch}}{V_{ind}} = 1 - \frac{P_3}{P_2}$$

Na základe štatistickej významnosti F-testu môžeme povedať, či je koeficient reliability významný, t.j. či môžeme považovať náš nástroj merania za spoľahlivý alebo nie.

Výpočet koeficienta reliability je naprogramovaný v jazyku FORTAN pre počítač CDC 3300. Výstup z počítača, ktorý obsahuje program na výpočet koeficienta reliability je uvedený ako príloha 1.

EXPERIMENTÁLNA APLIKÁCIA TEÓRIE RELIABILITY

Uvedený výpočet koeficienta reliability bol použitý napr. pri hodnotení testových výsledkov poslucháčov I. ročníka Strojnej fakulty ČVUT v Prahe v predmete "Chémia". Konkrétne budú uvedené testové výsledky experimentálnej skupiny pre posttesty A a B.

Tieto testy boli použité vo výskume zameranom na možnosť a formu uplatnenia programovaného učenia vo výuke na vysokej škole.

PODKLADY K VÝPOČTU RELIABILITY

Student	POLOŽKY						
i \ j	1	2	3	4	5	6	Test
1	5	2	15	5	15	10	B
2	0	0	3	0	0	0	B
3	5	0	4	5	15	0	B
4	0	5	0	10	0	15	A
5	5	2	10	5	15	0	B
6	0	0	0	5	15	0	B
7	5	5	1	6	15	0	A
8	0	3	4	0	15	0	B
9	5	5	0	0	0	0	A
10	0	2	4	5	0	0	B
11	0	1	0	0	0	0	A
12	0	5	0	2	15	0	A
13	0	2	0	5	15	0	B
14	0	5	0	10	0	0	A
15	5	0	15	5	0	0	B
16	5	5	4	10	15	15	A
17	0	5	1	5	0	0	A
18	5	2	4	5	15	0	B
19	0	5	6	10	15	10	A
20	0	5	2	10	15	0	A
21	5	5	0	10	15	0	A
22	0	2	10	0	15	0	B
23	5	5	15	5	15	10	B
24	0	5	0	2	15	0	A
25	0	5	1	9	0	0	A
26	5	5	2	10	15	5	A
27	0	2	4	5	15	0	B
28	0	5	0	10	0	0	A
29	5	5	1	0	15	0	A
30	5	4	4	0	15	0	B
31	0	5	1	0	0	0	A
32	5	5	5	0	0	0	B
33	5	5	1	4	0	0	A
34	0	0	0	0	0	0	B
35	5	5	4	10	15	0	A
36	5	2	15	5	15	5	B
37	0	4	2	0	0	0	A
38	0	5	0	10	15	0	A
39	5	5	0	10	10	0	A
40	1	5	15	5	15	0	B
41	5	5	0	6	15	0	A
42	4	5	4	5	15	10	B
43	5	3	15	5	15	10	B
44	0	2	5	0	0	0	B
45	3	0	0	0	0	0	B
46	5	1	0	0	0	0	A
47	5	3	0	2	0	10	B
48	0	0	2	5	15	0	B

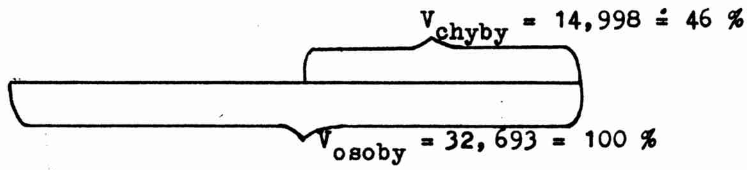
ANALÝZA VÝSLEDKOV

Pre posttest A koeficient reliability r = 0,5412

$$r = \frac{V_{osoby} - V_{chyby}}{V_{osoby}} = \frac{32,693 - 14,998}{32,693} = 0,5412$$

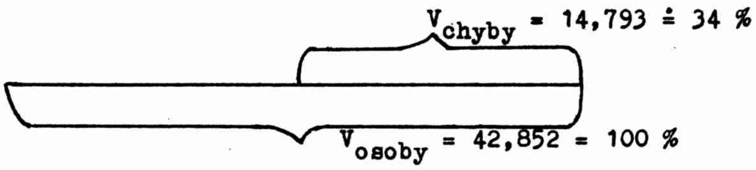
$$V_{chyby} = V_{osoby}(1-r)$$

Čím viac chýb, tým väčšia nespoľahlivosť.



Pre posttest B je koeficient reliability r = 0,6548 (pozri prílohu 2).

$$r = \frac{42,852 - 14,793}{42,852} = 0,6548$$



Z hodnôt F-testu vidíme, že vypočítané hodnoty koeficientu reliability sú významné.

ZLEPŠENIE RELIABILITY

Zlepšenie reliability môžeme dosiahnuť nasledovne:

1. maximálnym zintenzívnením rozptylu individuálnych rozdielov a znížením rozptylu chýb na minimum,
2. dbaním o to, aby boli položky psychologického a pedagogického

merania vyjadrené jednoznačne, aby nedošlo k zväčšeniu rozptylu chýb,

3. zvýšením počtu položiek rovnakého typu.

Predpokladajme, že máme vypočítanú reliabilitu r pre určitý test a považujeme za potrebné zvýšiť ju. Údaj o počte položiek rovnakého typu, ktorý na to potrebujeme, nám poskytne Spearman-Brownova profetická formula:

$$n = \frac{R\ (1-r)}{r\ (1-R)}$$

kde R je požadovaná reliabilita,

r je vypočítaná reliabilita,

n udáva, o koľko položiek musíme predĺžiť test, aby dosiahol žiadanú reliabilitu.

ZÁVER

Aby sme mohli správne interpretovať výsledky testu, musí byť reliabilný.

Je pravda, že vysoká reliabilita je podmienkou nutnou, nie postačujúcou pre dosahovanie dobrých výsledkov v pedagogickom a psych logickom výskume. Ale je dôležité uvedomiť si, že správne hodnotenie výsledkov testu, výskumu výsledkov, ich interpretácia nemôže byť dosiahnutá bez splnenia tejto podmienky.

References

[1] K e r l i n g e r, F. N.: Základy výzkumu chování, Academia 1972.

[2] M i c h a l i č k a, M.: Pedagogické testy a problémy jejich použití v pedagogické praxi. Pedagogika 19, 1969, č.1.

[3] L i n d q u i s t, E. F.: Statistická analýza v pedagogickém výzkumu. SPN Praha, 1967.

[4] D v o ř á k, K.: Pedagogická metodologie. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1974.

[5] P f a n z a g l, J.: Meranie. Mir, Moskva, 1976.

Adresy autorov: Viera Uherčíková, Katedra teoretickej kybernetiky
PFUK, Mlynská dolina
816 31 Bratislava
Milan Dufek, ČVUT, Fakulta strojní
121 00 Praha

Received: 6. 9. 1977

S u m m a r y

RELIABILITY OF MEASURING METHODS

Milan Dufek, Praha, Viera Uherčíková, Bratislava

In order to increasé exctness in the educational and psychological research we have to measure correctly such characteristics as fatigue, stage fright, abilities, etc. This requires to decide on the measuring rules and the measuring methods. Then it is necessary to solve two questions:

- What is the reliability of the measuring method.
- What is the validity of the measuring method, i.e. whether we really measure what we intend to.

In the paper we are concerned with the theory of reliability and it´s application in the educational process, namely in measuring the level of knowledge of students by didactical tests. We describe one method of calculation of the coeficient of reliability based on the two dimensional dispersion analysis.

Р е з ю м е

НАДЁЖНОСТЬ МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

М. Дуфек, Прага, В. Угерчикова, Братислава

В интересах повышениятельности педагогического и психологического исследования надо правильно измерять разные характеристики - усталость, способности, итд. В таких случаях необходимо определить точные правила измерений и использовать некоторый подходящий метод измерений.

После того необходимо решать вопрос: Какая надёжность метода измерений ?

В статьи рассматривается теория надёжности и показано её применение для проверки уровня знаний дидактическими тестами в педагогическом процессе. Изложен метод вычисления коефициента надёжности при помощи двумерного дисперсионнго анализа.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XXXVIII - 1981

REMARKS ON THE EXPONENTIAL FUNCTION

MILAN MAXIÁN – TIBOR ŠALÁT, Bratislava

The purpose of this paper is to study the sequences

$$\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{1}$$

$$\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{2}$$

where $a_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$, $b_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ and to give a certain generalization of the Problem E 2406 from Amer. Math. Monthly together with its solution.

It is well-known fact that the sequence $\{a_n(1)\}_{n=1}^{\infty}$ is increasing, $\{b_n(1)\}_{n=1}^{\infty}$ is decreasing and

$$\lim_{n\to\infty} a_n(1) = \lim_{n\to\infty} b_n(1) = e$$

(see e.g. [2], p. 136).

Further, it is well-known that for each real number x we have

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = e^x \tag{3}$$

(cf. [2], p. 137-138).

In the paper [1] it is proved that for each $x \in \langle 0, 1 \rangle$ the sequence (1) is non-decreasing.

In connection with the mentioned results we shall study the monotonicity of the sequences (1), (2).

At first we introduce two auxiliary results.

L e m m a 1. For fixed x, $x > 0$, we put

$$g_x(t) = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t \quad (t > 0)$$

Then for each $x > 0$ the function g_x is increasing on the interval $(0, +\infty)$.

P r o o f . Since

$$g_x(t) = \exp\left\{ t \log\left(1 + \frac{x}{t}\right)\right\}$$

using a simple calculation we get

$$g_x'(t) = g_x(t) \left[\log\left(1 + \frac{x}{t}\right) - \frac{x}{t+x} \right]$$

By the mean value theorem there is a $\xi \in (t, t + x)$ such that

$$\log\left(1 + \frac{x}{t}\right) = \log(t + x) - \log t = \frac{x}{\xi}$$

Then

$$g_x'(t) = g_x(t) \left(\frac{x}{\xi} - \frac{x}{t+x}\right) > 0$$

i.e. the function g_x is increasing on $(0, +\infty)$.

Hence g_x is an increasing function (in t) for each fixed $x > 0$. More complicated situation occurs at the study of the monotonicity of the function h_x,

$$h_x(t) = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^{t+1} \quad (t > 0),$$

$x > 0$, x fixed.

Lemma 2. If $0 < x \leqq 2$, then h_x is a decreasing function on $(0, +\infty)$. If $x > 2$, then h_x is an increasing function on the interval $(\frac{x}{x-2}, +\infty)$.

Proof. A simple calculation yields

$$h_x'(t) = h_x(t)\left[\log\left(1 + \frac{x}{t}\right) - \frac{x(t+1)}{t(t+x)}\right] \tag{5}$$

Put

$$f_x(t) = \log\left(1 + \frac{x}{t}\right) - \frac{x(t+1)}{t(t+x)} \quad (t > 0)$$

Let us remark that for each $x > 0$

$$\lim_{t \to \infty} f_x(t) = 0 \tag{6}$$

holds.

Further after a simple arrangement we get

$$f_x'(t) = -\frac{x}{t(t+x)} + \frac{x^2+2tx+t^2x}{t^2(t+x)^2}$$

From this it follows easily that

$f_x'(t) < 0$, if $x < (x-2)t$;

$f_x'(t) = 0$, if $x = (x-2)t$;

$f_x'(t) > 0$, if $x > (x-2)t$

If $0 < x \leqq 2$, then $x - 2 \leqq 0$ and the inequality $x > (x-2)t$ holds for each $t > 0$. Hence in this case $f_x'(t) > 0$ for each $t > 0$.

If $x > 2$, then for $t > \frac{x}{x-2}$ the inequality $x < (x-2)t$ holds and therefore according to previous considerations we have $f_x'(t) < 0$ (for $t > \frac{x}{x-2}$).

Let $0 < x \leq 2$. As we already have proved, for each $t > 0$ we have $f_x'(t) > 0$. Hence f_x is an increasing function on the interval $(0, +\infty)$. If for some $t_0 \in (0, +\infty)$ the inequality $f_x(t_0) \geq 0$ holds, then with respect to the fact that f_x is increasing, (6) cannot be true. Hence, in this case we have $f_x(t) < 0$ for each $t \in (0, +\infty)$. But then from (5) it follows that for each $t \in (0, +\infty)$ we have $h_x'(t) < 0$. Thus h_x is a decreasing function on $(0, +\infty)$.

Let $x > 2$. As we already have proved, for each $t > \frac{x}{x-2}$ we have $f_x'(t) < 0$. Thus f_x is a decreasing function on the interval $(\frac{x}{x-2}, +\infty)$. If for some $t_0 \in (\frac{x}{x-2}, +\infty)$ the inequality $f_x(t_0) \leq 0$ holds, then with respect to the fact that f_x is decreasing, (6) cannot hold. Hence $f_x(t) > 0$ for each $t > \frac{x}{x-2}$. But then it follows from (5). that $h_x'(t) > 0$ for each $t > \frac{x}{x-2}$. Thus h_x is an increasing function on the interval $(\frac{x}{x-2}, +\infty)$. The proof is finished.

The following fundamental result about the sequences (1), (2) is a simple consequence of Lemma 1 and Lemma 2.

<u>T h e o r e m 1</u>. The sequence (1) is increasing for each $x > 0$. If $0 < x \leq 2$, then the sequence (2) is decreasing. If $x > 2$, then the sequence

$$\{ b_n(x) \}_{n = [\frac{x}{x-2}] + 1}^{\infty}$$

is increasing ($[t]$ denotes "the integral part" of t).

Theorem 1 suggests a certain generalization of the following problem (cf. [3]):

What is the maximum value of α and the minimum value of β for which

$$(1 + \tfrac{1}{n})^{n+\alpha} \leq e \leq (1 + \tfrac{1}{n})^{n+\beta} \qquad (7)$$

for all positive integers?

Taking Theorem 1 into consideration, it is possible to generalize the foregoing in this way:

Let $0 < x \leq 2$. It follows from (3) that

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty} b_n(x) = e^x,$$

(1) being increasing and (2) decreasing. What is (by $x \in (0, 2\rangle$) the maximum value $\alpha_0(x)$ of $\alpha(x)$ and the maximum value $\beta_0(x)$ of $\beta(x)$ for which

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+\alpha(x)} \leq e^x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+\beta(x)}$$

for all positive integers n ?

The solution of the formulated problem is contained in the following theorem. Let us remark that the proof of the following theorem is based on the procedure applicated in the solution of Problem E 2406 ([3]).

Theorem 2. For each $x \in (0, 2\rangle$ we have:

$$\alpha_0(x) = \frac{x}{\log(1+x)} - 1, \quad \beta_0(x) = \frac{x}{2}$$

Remark. For $x = 1$ we get $\alpha_0(1) = \frac{1}{\log 2} - 1$, $\beta_0(1) = \frac{1}{2}$ - the solution of Problem E 2406.

Proof of Theorem 2. Let $0 < x \leq 2$. Let $\alpha(x) \geq 0$, $\beta(x) \geq 0$ be such real numbers that

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+\alpha(x)} \leq e^x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+\beta(x)} \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (8)$$

From this we get

$$(n + \alpha(x)) \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x \leq (n + \beta(x)) \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\alpha(x) \leqq \frac{x}{\log\ (1+\frac{x}{n})} - n \qquad (n = 1,\ 2,\ \dots),$$

$$\beta(x) \geqq \frac{x}{\log\ (1+\frac{x}{n})} - n \qquad (n = 1,\ 2,\ \dots)$$

From this it is clear that

$$\alpha_0(x) = \inf_n \left\{ \frac{x}{\log\ (1+\frac{x}{n})} - n \right\} \tag{9}$$

$$\beta_0(x) = \sup_n \left\{ \frac{x}{\log\ (1+\frac{x}{n})} - n \right\} \tag{10}$$

For fixed $x \in (0,\ 2\rangle$ we put

$$\varphi_x(t) = \frac{x}{\log\ (1+\frac{x}{n})} - t \qquad (t > 0)$$

A simple calculation shows that

$$\varphi'_x(t) = \frac{x^2}{t(t+x)\ \log^2\ (1+\frac{x}{t})} - 1$$

We prove that for each $t > 0$

$$\varphi'_x(t) > 0 \tag{11}$$

holds.

Choose a number $u \in R$ such that $e^{2u} = 1 + \frac{x}{t}$.

Hence $u > 0$. By a simple calculation we get

$$\frac{\sin h^2\ u}{u^2} = \frac{e^{2u} + e^{-2u} - 2}{4u^2} =$$

$$= \frac{x^2}{t\ (t+x)\ \log^2\ (1+\frac{x}{t})}$$

Hence the inequality (11) is equivalent to the inequality

$$\frac{\sin h^2 u}{u^2} - 1 > 0$$

and this to the inequality

$$(\sin h\ u + u)(\sin h\ u - u) > 0 \tag{12}$$

Since

$$(\sin h\ u = n + \frac{u^3}{3!} + \dots \quad > u,$$

the inequality (12) is true and so the inequality (11) is true, too.

According to (11) the function φ_x is increasing on the interval $(0, +\infty)$. Therefore the sequence

$$\left\{ \frac{x}{\log\ (1+\frac{x}{n})} - n \right\}_{n=1}^{\infty}$$

is increasing. This fact together with (9) yields

$$\alpha_o(x) = \frac{x}{\log\ (1+x)} - 1$$

and together with (10) yields

$$\beta_o(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{\log\ (1+\frac{x}{n})} - n \right) \tag{13}$$

For $n > x$ we have

$$\log\ (1 + \frac{x}{n}) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3})$$

Hence for $n > x$ we get

$$\frac{x}{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)} - n = \frac{x}{\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)} - n =$$

$$= \frac{\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{x - \frac{x^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \longrightarrow \frac{x}{2} \quad (n \to \infty)$$

Therefore because of (13) we have $\beta_0(x) = \frac{x}{2}$.
The proof is finished

R e f e r e n c e s

[1] M e l z a k, Z. A.: On the exponential function. Amer.Math. Monthly 82 (1975), 842-844.

[2] S i e r p i ń s k i, W.: Dzialania nieskończone. Czytelnik 1948.

[3] Problem E 2406 (1973, 316). Proposed by E. Just and N. Schaumberger. Solution by M. S. Klamkin. Amer. Math. Monthly 81 (1974), 291-292.

Authors' address: Milan Maxián, Tibor Šalát, Katedra algebry a teórie čísel PFUK
Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 20. 12. 1977

S ú h r n

POZNÁMKY O EXPONENCIÁLNEJ FUNKCII

Milan Maxián, Tibor Šalát, Bratislava

Položme

$$a_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n, \quad b_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Je známe (pozri Z. A. Melzak: On the exponential function. Amer. Math. Monthly 82 (1975), 842-844, že postupnosť $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca, ak $x \in \langle 0, 1 \rangle$. V článku sa tento výsledok zovšeobecňuje, dokazujesa, že postupnosť $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca pre každé $x > 0$, postupnosť $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca, ak $x \in (0, 2 \rangle$. Ak $x > 2$, tak postupnosť $\{b_n(x)\}_{n=[\frac{x}{x-2}]+1}^{\infty}$ je rastúca.

Pomocou predošlých výsledkov je v práci sformulované zovšeobecnenie Problému E 2406 z Amer. Math. Monthly (1973, 316) a je dané riešenie tohoto zovšeobecnenia.

Р е з ю м е

ЗАМЕТКИ О ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

М. Максиан, Т. Шалат, Братислава

Положим $a_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$, $b_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Известно что последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является неубывающей эсли $x \in \langle 0, 1 \rangle$ /см. Z.A. Melzak: On the exponential function, Amer. Math.Monthly 82(1975), 842-844/. В работе этот результат обобщается; показывается, что последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является возрастающей для каждого $x > 0$; последовательность $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является убывающей для $x \in (0, 2\rangle$. Эсли $x > 2$, так

последовательность $\{b_n(x)\}_{n=\frac{x}{x-2}+1}^{\infty}$ является возрастающей.

С помощью предыдущих результатов в работе сформулировано обобщение проблемы E 2406 из **Amer. Math. Monthly** (1973), 316 и дано решение этого обобщения.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XXXVIII - 1981

POZNÁMKY O ISTOM SPÔSOBE ZAVEDENIA REÁLNYCH ČÍSEL

ŠTEFAN MALINA, Bratislava

Richard Dedekind (1831 - 1916) v úvode svojej práce "Stetigkeit und irrationale Zahlen" píše, že pohnútkou jeho tu publikovaných úvah bola požiadavka na skutočne vedecky budovanú aritmetiku, ktorú nutne potreboval, keď mal na jeseň roku 1858 prednášať základy diferenciálneho počtu. Je zaujímavé, že v čase publikovania jeho práce (26.apríla 1872) mal problematiku rigorózneho vybudovania pojmu reálneho čísla rozriešenú, avšak iným spôsobom, i Georg Cantor (1845 - 1919).

Rozvoj matematiky našich čias umožnil vybudovať teóriu reálnych čísel pomocou topologického pojmu filtra na danom priestore (pozri [1]). Ukázalo sa, že pojem filtra nie je iba "čistým" pojmom všeobecnej topológie, ale aj veľmi účinným pojmom, pretože sa jeho pomocou dajú vhodne formulovať mnohé dôkazy klasickej teórie budovania číselných oborov. Navyše tento prístup môže mať cenu skôr v tom, že podáva názornou formou metódu budovania matematického pojmu, než v tom, že vybudujeme konkrétny matematický pojem.

To bol jeden z dôvodov, prečo sme siahli ku knihe [1]. Bolo však treba zúplniť tam podávaný spôsob zavedenia reálnych čísel pomocou pojmu filtra. To sme urobili jednak tým, že sme uviedli na správnu mieru určité partie a jednak doplnením práce o nové postrehy, ktoré súvisia s úplným vybudovaním teórie reálnych čísel v tomto poňatí. Toto zúplnenie spomínanej knihy je aj predmetom nášho článku. Poznamenajme nakoniec, že všetky definície tu uvedených pojmov sú prevzaté z práce [1], pokiaľ nie je uvedené inak.

Označenie. Množinu všetkých racionálnych čísel budeme označovať Q a množinu všetkých kladných racionálnych čísel budeme označovať Q^+. Množinu všetkých prirodzených čísel budeme označovať N.

1. Definícia pojmu reálneho čísla

Základným pojmom s ktorým budeme v ďalšom pracovať je pojem filtra. Začiatkom hneď poznamenajme, že to čo budeme pod týmto pojmom chápať (rovnako ako je to v [1]), je vo všeobecne prijatej Bourbakiho terminológii (pozri [3]) nazývané bázou filtra.

Pre uľahčenie čítania nášho článku uveďme niekoľko nutných faktov z literatúry.

Definícia 1.1. Systém F podmnožín množiny X sa nyzýva filtrom na X, ak má vlastnosti:

(1) F je neprázdna množina,

(2) prázdna množina nie je prvkom systému F,

(3) pre každé dve množiny F_1 a F_2 z F existuje taká množina F_3 z F, že $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

Nech $r \in Q$ a $q \in Q^+$. Potom okolím bodu r (o polomere q) nazveme množinu $U_q(r)$, definovanú predpisom

$$U_q(r) = \{ x \in Q \mid r-q < x < r+q \} .$$

Systém

$$\mathcal{U}(r) = \{ U_q(r) \mid q \in Q^+ \}$$

nazveme systémom okolí racionálneho čísla r. Ľahko možno overiť, že systém $\mathcal{U}(r)$ má vlastnosti (1) - (3) z definície 1.1 a teda je filtrom na Q.

Definícia 1.2. Nech F a G sú filtre na X. Potom filter F

nazveme jemnejším než filter G, ak ku každej množine G z filtra G existuje taká množina F z filtra F, že platí

$$F \subset G.$$

Ak je filter F jemnejší než filter G píšeme

$$F \Delta G.$$

Ak platí $F \Delta G$ a súčasne $G \Delta F$, potom nazveme filter F ekvivalentným s filtrom G a píšeme $F \sim G$.

P o z n á m k a 1. Pretože budeme pracovať iba s filtrami na množine racionálnych, resp. reálnych čísel, budeme hovoriť iba filter F, namiesto "filter F na množine racionálnych, prípadne reálnych čísel". Z kontextu bude čitateľovi zrejmé o ktorú množinu čísel pôjde.

D e f i n í c i a 1.3. Nech M je množina racionálnych čísel a ν je dané číslo, $\nu \in Q^+$. Potom množinu M nazveme ν-množinou, ak pre každé dva prvky $x, y \in M$ platí

$$|x - y| \leq \nu.$$

D e f i n í c i a 1.4. Filter F nazveme C-filtrom (Cauchyho filtrom) ak pre každé $\nu \in Q^+$ existuje taká množina $F \in F$, že F je ν-množinou.

D e f i n í c i a 1.5. Nech F a G sú C-filtre. Hovoríme, že filter F je C-ekvivalentný s filtrom G, ak systém

$$F \sqcup G = \{ H | H = F \cup G,\ F \in F,\ G \in G \}$$

je C-filtrom. Ak F je C-ekvivalentný s G, píšeme

$$F \approx G.$$

P o z n á m k a 2. Ak F a G sú filtre, potom aj systém $F \sqcup G$ je filtrom.

D ô k a z : Pretože F a G sú filtre, má systém $F \sqcup G$ vlastnosti (1) a (2) z definície 1.1. Nech $F_1 \cup G_1$, $F_2 \cup G_2$, kde $F_1, F_2 \in F$ a $G_1, G_2 \in G$ sú ľubovolné množiny zo systému $F \sqcup G$. Potom

$$(F_1 \cup G_1) \cap (F_2 \cup G_2) = (F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap G_2) \cup (F_2 \cap G_1) \cup (G_1 \cap G_2) \quad (4)$$

Podľa vlastnosti (3) z definície 1.1 pre filtre F a G platí: existuje $F_3 \in F$ a $G_3 \in G$ tak, že

$$F_3 \subset F_1 \cap F_2$$

a

$$G_3 \subset G_1 \cap G_2 \ .$$

Z rovnosti (4) vyplýva

$$F_3 \cup G_3 \subset (F_1 \cup G_1) \cap (F_2 \cup G_2),$$

teda systém $\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G}$ je filtrom.

V nasledujúcej vete ukážeme, že C-ekvivalencia ja na systéme C-filtrov na Q ekvivalenciou.

V e t a 1.1. Nech $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ a $\mathcal{G}_3$ sú C-filtre. Potom platí

(5) $\mathcal{G}_1 \approx \mathcal{G}_1$,

(6) ak $\mathcal{G}_1 \approx \mathcal{G}_2$, potom aj $\mathcal{G}_2 \approx \mathcal{G}_1$,

(7) ak $\mathcal{G}_1 \approx \mathcal{G}_2$ a súčasne $\mathcal{G}_2 \approx \mathcal{G}_3$, potom aj $\mathcal{G}_1 \approx \mathcal{G}_3$.

D ô k a z. Dôkaz vlastností (5) a (6) vyplýva ihneď z toho, že $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ sú C-filre a z definície relácie C-ekvivalencie, preto ho vynecháme.

Z tvrdenia v poznámke 2 vyplýva, že $\mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_3$ je filter, ukážeme, že je aj C-filtrom.

Nech $\mu \varepsilon Q^+$ je ľubovolné. Podľa predpokladu sú $\mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2$ a $\mathcal{G}_2 \sqcup \mathcal{G}_3$ C-filtrami. Potom existuje taká množina G z filtra $\mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2$, že je $\mu/2$ - množinou a taká množina H z filtra $\mathcal{G}_2 \sqcup \mathcal{G}_3$, že je tiež $\mu/2$-množinou. Z definície 1.5 vyplýva, že množiny G a H majú tvar

$$G = G_1 \cup G_2, \text{ kde } G_1 \varepsilon \mathcal{G}_1,\ G_2 \varepsilon \mathcal{G}_2$$

a

$$H = H_2 \cup G_3, \text{ kde } H_2 \varepsilon \mathcal{G}_2,\ G_3 \varepsilon \mathcal{G}_3 \ .$$

Pretože $\mathcal{G}_2$ je filter, existuje taká množina $F_2 \varepsilon \mathcal{G}_2$, že platí

$$F_2 \subset G_2 \cap H_2 \ .$$

Potom však aj $G_1 \cup F_2$ je $\mu/2$-množinou a súčasne $F_2 \cup G_3$ je $\mu/2$-množinou. Pretože množiny $G_1 \cup F_2$ a $F_2 \cup G_3$ majú neprázdny prienik, je $G_1 \cup F_2 \cup G_3$ μ-množina. Teda aj $G_1 \cup G_3 \subset G_1 \cup F_2 \cup G_3$ je μ-množinou.

Teraz už môžeme poukázať na to, kde sa autor v knihe [1] dopustil nepresnosti a to je naša prvá poznámka. Urobil to v úvahe, že už množina $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ je μ-množinou. Podľa predpokladu sú $\mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2$ a $\mathcal{G}_2 \sqcup \mathcal{G}_3$ C-filtre. Z toho vyplýva existencia μ-množiny, pre ľubovolné $\mu \in Q^+$, v každom z nich. Ak je však $G_1 \cup G_2$ μ-množinou vo filtri $\mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2$, nemožno bez ďalšieho komentára zaručiť (ako to autor práce [1] urobil), že ak $G_2 \cup G_3$ je μ-množinou v $\mathcal{G}_2 \sqcup \mathcal{G}_3$ je aj μ-množinou vo filtri $\mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_3$. Pre ilustráciu uveďme tento príklad.

P r í k l a d 1.1. Nech $\mathcal{G}_1 = \{\{0\}\}$, $\mathcal{G}_2 = \{\{-1/n, -1/(n+1), \dots\}\}$ a $\mathcal{G}_3 = \{\{1/n, 1/(n+1), \dots\}\}$. Toto sú všetko zrejme C-filtre a $\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_2 \approx \mathcal{G}_3$. Nech $\mu/2 = 1/m$, $m \in N$. Potom ak kladieme $G_1 = \{0\}$ $G_2 = \{-1/n, -1/(n+1), \dots\}$, je množina $G_1 \cup G_2$ $\mu/2$-množinou, pretože absolútna hodnota rozdielu jej ľubovoľných dvoch prvkov sa nanajvýš rovná $1/m$.

Autor v knihe [1] tvrdí, že možno zvoliť množinu $G_3 \in \mathcal{G}_3$ tak, že $G_2 \cup G_3$ je zasa $\mu/2$-množina. Ukážeme, že to nie je možné.

Nech G_3 je akákoľvek množina z $\mathcal{G}_3$. Utvorme $G_2 \cup G_3$, kde

$$G_3 = \{1/k, 1/(k+1), \dots\}, \quad k \in N .$$

Potom však $G_2 \cup G_3$ nie je $\mu/2$-množina, pretože pre každé $g \in G_3$, $g > 0$ platí

$$g + \frac{1}{m} > \frac{\mu}{2} .$$

Pokiaľ ide o vzťah medzi ekvivalenciou a C-ekvivalenciou v triede C-ekvivalentných filtrov, platí táto veta:

V e t a 1.2. Nech $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ sú C-filtre a $\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{G}_2$. Potom aj $\mathcal{G}_1 \approx \mathcal{G}_2$. Namiesto dôkazu tejto vety dokážeme tvrdenie, z ktorého tvrdenie vety 1.2 bezprostredne vyplýva. Toto tvrdenie sa v knihe [1] nevyskytuje.

V e t a 1.3. Nech $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ sú C-filtre a $\mathcal{G}_1 \Delta \mathcal{G}_2$. Potom $\mathcal{G}_1 \approx \mathcal{G}_2$.

D ô k a z . Podľa predpokladu existuje pre každú množinu $G_2 \in \mathcal{G}_2$

množina $G_1 \in \mathcal{G}_1$ tak, že

$$G_1 \subset G_2 . \tag{8}$$

Zrejme platí

$$G_1 \cup G_2 \subset G_2 \tag{9}$$

pričom $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2$.

Z tvrdenia v poznámke 2 vyplýva, že systém $\mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2$ je filtrom. Ukážeme, že je aj C-filtrom. Nech $\mu \in \Omega^+$ je ľubovolné. Potom existuje μ-množina G_2 vo filtri $\mathcal{G}_2$. Nech G_1 je taká množina z $\mathcal{G}_1$, pre ktorú je splnený vzťah (9). Potom $G_1 \cup G_2$, ako podmnožina μ-množiny G_2, je μ-množinou a teda filter $\mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2$ je C-filtrom. Pri tejto vete si treba uvedomiť, že obrátené tvrdenie neplatí. Teda z C-ekvivalencie dvoch C-filtrov $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ neplynie ani $\mathcal{G}_1 \Delta \mathcal{G}_2$ ani $\mathcal{G}_2 \Delta \mathcal{G}_1$. Ukazuje to tento príklad.

P r í k l a d 1.2. Nech

$$\mathcal{F}_1 = \{\{ \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+2}, \ldots \} \mid n \in N \}$$

a

$$\mathcal{F}_2 = \{\{ \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+3}, \ldots \} \mid n \in N \} .$$

Dôkaz, že $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{F}_2$ sú C-filtre vyplýva ihneď z definície 1.1 a 1.4 a z vlastností postupností

$$\{\frac{1}{2n}\}_{n \in N} \quad \text{a} \quad \{\frac{1}{2n+1}\}_{n \in N}$$

Zrejme neplatí ani $\mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2$ ani $\mathcal{F}_2 \Delta \mathcal{F}_1$ pretože $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ pre ľubovolné množiny $F_1 \in \mathcal{F}_1$ a $F_2 \in \mathcal{F}_2$. Pritom je možné okamžite overiť, že $\mathcal{F}_1 \sqcup \mathcal{F}_2$ je C-filter, teda $\mathcal{F}_1 \approx \mathcal{F}_2$.

O z n a č e n i e . Nech $\mathcal{F}$ je C-filter. Označme $[\mathcal{F}]$ triedu všetkých C-filtrov, ktoré sú s C-filtrom $\mathcal{F}$ C-ekvivalentné. Pre $q \in Q$ položme $\bar{q} = [\{\{q\}\}]$.

2. Vlastnosti množiny reálnych čísel

D e f i n í c i a 2.1. Reálnymi číslami nazveme triedy ekvivalencie, pri rozklade množiny všetkých C-filtrov na Q reláciou $\approx$. Množinu všetkých reálnych čísel označíme R. Ak α je reálne číslo a A je taký C-filter na Q, že platí $A \varepsilon \alpha$, budeme písať $\alpha = [A]$.
Filter A je "reprezentantom" reálneho čísla α. Poznamenajme pritom že z tranzitívnosti relácie C-ekvivalencie (veta 1.1) ihneď vyplýva, že ak A a B sú C-filtre na Q a $A \approx B$ potom $[A] = [B]$.

D e f i n í c i a 2.2. Filter F konverguje k bodu $a \varepsilon Q$ ak $F \Delta U(a)$
Ak F konverguje k bodu a, píšeme

$$\lim F = a.$$

Vzťah prvkov množiny Q k prvkom množiny R nám charakterizuje táto veta.

V e t a 2.1. Trieda filtrov $\bar{q}$ pre $q \varepsilon Q$ pozostáva zo všetkých C-filtrov F, pre ktoré platí

$$\lim F = q.$$

D ô k a z . Ak F je taký C-filter, že $\lim F = q$, potom podľa definície

$$F \Delta U(q) .$$

Teda podľa tvrdenia vety 1.3 je

$$F \approx U(q).$$

Ďalej

$$\{\{q\}\} \Delta U(q) ,$$

teda

$$\{\{q\}\} \approx U(q) .$$

Na základe vety 1.1 vyplýva

$$F \approx \{\{q\}\}, \text{ tj. } F \varepsilon \bar{q} .$$

Nech $F \approx \{\{q\}\}$. Potom filter $F \llcorner\lrcorner \{\{q\}\}$ je C-filter. Pre ľubovolné

$\mu \varepsilon Q^+$ existuje teda $F \varepsilon \mathcal{F}$ tak, že $F \cup \{q\}$ je $\mu/2$-množina. Z toho vyplýva

$$F \subset (q - \mu, q + \mu),$$

teda

$$\mathcal{F} \Delta \, \mathcal{U}(q),$$

preto

$$\lim \mathcal{F} = q.$$

D e f i n í c i a 2.2. Nech A,B sú dve podmnožiny Ω. Potom ich súčinom nazveme množinu

$$A \, . \, B = \{ z \mid z = a \, . \, b, \; a\varepsilon A, \; b\varepsilon B \}$$

a ich súčtom množinu

$$A + B = \{ z \mid z = a + b, \; a\varepsilon A, \; b\varepsilon B \} \, .$$

D e f i n í c i a 2.3. Nech $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ sú filtre. Potom ich súčtom $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ nazveme systém

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{ H \mid H = F + G, \; F\varepsilon\mathcal{F}, \; G\varepsilon\mathcal{G} \}$$

a ich súčinom $\mathcal{F}.\mathcal{G}$ nazveme systém

$$\mathcal{F} \, . \, \mathcal{G} = \{ H \mid H = F \, . \, G, \; F\varepsilon\mathcal{F}, \; G\varepsilon\mathcal{G} \} .$$

P o z n á m k a 3. Z definície pojmu filtra ihneď vyplýva, že ako $\mathcal{F}+\mathcal{G}$, tak aj $\mathcal{F}.\mathcal{G}$ sú filtre. Navyše, ak $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ sú C-filtre, potom sú C-filtrami aj filtre $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ a $\mathcal{F}.\mathcal{G}$.

D e f i n í c i a 2.4. Nech $\alpha = [\mathcal{A}]$ je reálne číslo. Potom označíme

$$-\alpha = - [\mathcal{A}] = [\{\{-1\}\}] . [\mathcal{A}] \, .$$

D e f i n í c i a 2.5. Reálne číslo α sa nazýva kladným, ak existuje taký C-filter $\mathcal{A}\varepsilon\alpha$, ktorý je zdola ohraničený, tj. existuje $q\varepsilon Q^+$ tak, že pre všetky $A\varepsilon\mathcal{A}$ platí

$$a\varepsilon A \Rightarrow a \geq q \, .$$

Ak α je kladné reálne číslo, píšeme $\alpha\varepsilon R^+$. Reálne číslo nazveme záporným, ak $-\alpha\varepsilon R^+$.

V e t a *2.2.* $\bar{0}$ nie je kladný ani záporný prvok množiny R.

D ô k a z . Z vety 1.4 vyplýva, že pre každé $F\epsilon\bar{0}$

$$\lim F = \bar{0} ,$$

tj.

$$F \,\Delta\, U(0). \tag{10}$$

Ak $\bar{0}$ ϵ R^+, potom existuje taký C-filter F a $q\epsilon Q^+$, že všetky jeho množiny sú zdola ohraničené týmto racionálnym číslom q. Zo vzťahu (10) vyplýva, že pre každé $\mu\epsilon Q^+$ existuje μ množina $F\epsilon F$ tak, že

$$F \subset (-\mu/2,\mu/2) \tag{11}$$

Zvoľme $\mu=q/2$. Potom z (11) plynie, že každý prvok $f\epsilon F$ spĺňuje nerovnosť

$$|f| \leq q/4 . \tag{12}$$

Avšak všetky množiny filtra F pozostávajú z kladných racionálnych čísel, zdola ohraničených číslom q, čo je v spore s (12). Teda $\bar{0} \notin R^+$. Analogicky by sme dokázali, že aj $-\bar{0}$ nie je v množine R^+.

Použitím pojmu filtra na Q možno dať nový a pritom názorný dôkaz hustoty množiny $\bar{Q} = \{ \bar{q} \mid q\epsilon Q \}$ v množine R.

D e f i n í c i a *2.6.* Nech $\alpha,\beta\epsilon R$. Potom píšeme $\alpha < \beta$ práve vtedy ak $\beta+(-\alpha)$ je kladné. Ak $\alpha < \beta$, alebo $\alpha=\beta$ píšeme $\alpha \leq \beta$. Ak platí $\alpha \leq \beta$, tak potom píšeme aj $\beta \geq \alpha$.

V e t a *2.3.* Množina $\bar{Q}$ je hustá v R, tj. pre ľubovolné $\alpha,\beta\epsilon R$, $\alpha < \beta$ existuje $q\epsilon Q$ tak, že

$$\alpha < \bar{q} < \beta .$$

D ô k a z . Nech $\alpha,\beta\epsilon R$, $\alpha < \beta$. Potom

$$\alpha=[A], \quad \beta = [B], \quad \beta - \alpha = [B + \{\{-1\}\}.A]$$

a podľa definície 2.6 a 2.5 je možné zvoliť filtre A a B tak, že filter $B+\{\{-1\}\}.A$ je tvorený množinami racionálnych čísel, ktorých všetky prvky sú väčšie než pevné racionálne číslo m.

Nech $B_0+\{-1\}.A_0$ je taká množina z filtra $B+\{\{-1\}\}.A$, že A_0, B_0 sú m/4-množiny. Potom pre každý prvok $b_o \in B_o$, $a_o \in A_o$ platí

$$b_o - a_o \geq m.$$

Teda

$$b_o \geq a_o + m > a_o + \frac{2}{3} m$$

tj.

$$b_o - \frac{m}{3} < a_o + \frac{m}{3} . \qquad (13)$$

Zvolme m/4- množiny $A_o \in \mathcal{A}$ a $B_o \in \mathcal{B}$ a $a_o \in A_o$, $b_o \in B_o$ pevné a utvorme systém $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{ P \mid P = B + \{-1\}.A,\ A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B},\ A \subset A_o, B \subset B_o \}.$$

Z definície pojmu filtra ihneď vyplýva, že systém $\mathcal{P}$ je C-filtrom. Navyše z definície relácie Δ a filtra $\mathcal{P}$ vyplýva

$$\mathcal{P}\ \Delta\ \mathcal{B} + \{\{-1\}\}.\mathcal{A} .$$

Pretože podľa predpokladu $\mathcal{B} + \{\{-1\}\}.\mathcal{A}$ je C-filter, vyplýva z vety 1.3, že filter $\mathcal{P}$ je C-ekvivalentný s $\mathcal{B} + \{\{-1\}\}.\mathcal{A}$, tj.

$$\beta - \alpha = [\mathcal{P}] .$$

Definujme systémy

$$\mathcal{A}_o = \{ A \mid A \subset A_o,\ A \in \mathcal{A} \}$$

$$\mathcal{B} = \{ B \mid B \subset B_o,\ B \in \mathcal{B} \}.$$

Opäť z definícií vyplýva, že $\mathcal{A}_o$, $\mathcal{B}_o$ sú C-filtrami a

$$\mathcal{A}_o\ \Delta\ \mathcal{A} ,\quad \mathcal{B}_o\ \Delta\ \mathcal{B} .$$

Z vety 1.3 a definície pojmu reálne číslo dostaneme

$$\alpha = [\mathcal{A}] ,\quad \beta = [\mathcal{B}] .$$

Z vlastností množiny Q a vzťahu (1) vyplýva, že existuje také číslo $q \in Q$, že

$$b_o - \frac{m}{3} > q > a_o + \frac{m}{3} , \qquad (14)$$

Utvorme rozdiel

$$\bar{q} - \alpha = [\{\{q\}\}] - [\mathcal{A}_o] = [\{\{q\}\} + \{\{-1\}\}.\mathcal{A}_o] .$$

Podľa definície má ľubovolná množina C-filtra $\{\{q\}\} + \{\{-1\}\}.\mathcal{A}_o$ tvar $\{q\} + \{-1\}.A$, $A \in \mathcal{A}_o$, a jej ľubovolný prvok má tvar $q-a$, $a \in A \subset A_o$.

Z voľby A_0 a $a_0 \varepsilon A_0$ a zo vzťahu (14) vyplýva

$$q - a_0 > \frac{m}{3} .$$

Z toho, že A_0 sme zvolili ako m/4-množinu vyplýva

$$a_0 - a > - \frac{m}{4}$$

pre ľubovolný prvok $a \varepsilon A \subset A_0$. Teda

$$q - a = (q - a_0) + (a_0 - a) > \frac{m}{3} - \frac{m}{4} > \frac{m}{12} > 0.$$

Potom filter $\{\{q\}\}+\{\{-1\}\}.A_0$ je tvorený množinami racionálnych čísel, ktorých každý prvok je väčší než m/12, tj.

$$\bar{q} - \alpha > 0.$$

Analogicky možno ukázať, že aj $\beta - \bar{q} > 0$, teda

$$\beta > \bar{q} > \alpha .$$

Po definovaní pojmu reálne číslo je prirodzené rozšíriť pojem filtra na Q na pojem filtra na R. To robíme preto, lebo hoci sa s týmto pojmom v knihe [1] operuje, nie je tam explicitne definovaný.

D e f i n í c i a 2.7. Nech α a β sú ľubovolné reálne čísla, $\alpha < \beta$. Potom množinu I všetkých takých $\gamma \varepsilon R$, že platí $\alpha < \gamma < \beta$, nazveme intervalom v R (s koncovými bodmi α, β) a ak I je takýto interval, budeme ho zapisovať

$$I = (\alpha , \beta) .$$

Nech $\alpha \varepsilon R$. Potom systém všetkých intervalov tvaru $(\alpha - \mu, \alpha + \mu)$, kde $\mu \varepsilon R^+$, nazveme systémom okolí bodu α a budeme ho označovať znakom $U(\alpha)$

D e f i n í c i a 2.8. Systém $F = \{F | F \subset R\}$ nazveme C-filtrom na množine R, ak

(15) $F \neq \emptyset$,

(16) $\emptyset \notin F$,

(17) pre každé $F, G \varepsilon F$ existuje $H \varepsilon F$ tak, že $H \subset F \cap G$,

(18) pre každé $\mu \varepsilon R^+$ existuje množina $F \varepsilon F$ a $\alpha \varepsilon R$ tak, že $F \subset I$, kde $I = (\alpha - \mu, \alpha + \mu)$.

P o z n á m k a 4. Ľahko možno ukázať, že systém $\mathcal{U}(\alpha)$ je C-filtrom na R pre ľubovolné $\alpha \in R$.

Na množine R možno obvyklým spôsobom definovať topológiu pomocou systému okolí každého bodu z R. Ľahko môžeme ukázať, že takto definovaná topológia je hausdorffovská topológia. Potom rovnako ako pojem filtra je možné na takto definovaný topologický priestor rozšíriť aj pojem konvergencie.

D e f i n í c i a 2.9. Hovoríme, že filter $\mathcal{F}$ konverguje k reálnemu číslu α ak platí

$$\mathcal{F} \Delta \mathcal{U}(\alpha).$$

Ak $\mathcal{F}$ konverguje k $\alpha \in R$ píšeme

$$\lim \mathcal{F} = \alpha.$$

Nie je ťažko ukázať, že $\lim A = \alpha$ pre ľubovolné $A \in \alpha$.

Kvôli ucelenosti je nutné uviesť dôležitú vetu o uzavretosti reálnych čísel voči limitnému prechodu. Táto veta nie je v knihe [1], hoci jej význam je vzhľadom na ucelenosť práce osobitne dôležitý.

V e t a 2.4. Priestor R je úplný, tj. nech $\mathcal{F}$ je C-filter na R. Potom existuje $\alpha \in R$ tak, že

$$\lim \mathcal{F} = \alpha.$$

D ô k a z . Nech $\mathcal{F}$ je podľa predpokladu C-filter na R. Ak $\mathcal{F}$ obsahuje jednobodovú množinu $\{\alpha\}$, potom pre každé $\mu > \bar{0}$ existuje v C-filtri množina F tak, že

$$F \subset (\alpha-\mu, \alpha+\mu).$$

(Stačí $F = \{\alpha\}$.)

Potom podľa definície je $\mathcal{F} \Delta \mathcal{U}(\alpha)$, teda

$$\lim \mathcal{F} = \alpha.$$

Nech teda každá z množín F filtra $\mathcal{F}$ je aspoň dvojprvková. Pre každú z množín F filtra $\mathcal{F}$ definujeme množinu $F_\Omega \subset \Omega$ vzťahom

$$F_\Omega = \{ q \in \Omega \mid \text{existujú také } \gamma, \beta \in F, \text{ že } \beta \leq \bar{q} \leq \gamma \}.$$

Utvorme systém $\mathcal{F}_Q$

$$\mathcal{F}_Q = \{ F_Q \mid F \in \mathcal{F} \}.$$

Z vety 1.6 vyplýva, že množiny F_Q sú neprázdne. Vlastnosti (1) a (2) z definície filtra na R sú teda triviálne splnené. Nech F_Q a G_Q sú dve množiny zo systému $\mathcal{F}_Q$. Pretože $\mathcal{F}$ je C-filter na R, existuje $H \in \mathcal{F}$ tak, že

$$H \subset F \cap G \tag{19}$$

a potom zrejme $H_Q \subset F_Q \cap G_Q$, $H_Q \in \mathcal{F}_Q$.

Definujme

$$\alpha = [\mathcal{F}_Q] .$$

Potom

$$\lim \mathcal{F}_Q = \alpha \tag{20}$$

Nech $\mu \in R$ je ľubovolné. Potom podľa tvrdenia vety 1.6 existuje $q \in Q$ tak, že $\mu > \bar{q} > 0$. Na základe (20) existuje $F_Q \in \mathcal{F}_Q$ taká, že $F_Q \subset (\alpha - q/2, \alpha + q/2) \subset (\alpha - \mu/2, \alpha + \mu/2)$. No potom zrejme $F \subset (\alpha - \mu, \alpha + \mu)$ teda $\lim \mathcal{F} = \alpha$.

Vetou o spojitosti usporiadania množiny R reláciou > ukončíme tento príspevok . Táto veta nie je v knihe [1], hoci jej význam pre zúplnenie tu vybudovanej teórie reálnych čísel je osobitne dôležitý.

V e t a 2.5. Nech M je ľubovolná, neprázdna a zhora ohraničená podmnožina množiny R. Potom existuje číslo α (píšeme $\alpha = \sup M$) s vlastnosťami:

$$\text{pre všetky } \gamma \in M \text{ je } \gamma \le \alpha, \tag{21}$$

$$\text{pre ľubovolné } \nu, \text{ kde } \alpha > \nu \text{ existuje } \gamma \in M \text{ tak, že } \alpha \ge \gamma > \nu . \tag{22}$$

D ô k a z . Dôkaz uskutočníme metódou použitou napr. v práci [2]. Nech $M \subset R$, $M \neq \emptyset$, M je zhora ohraničená a β_1 je horné ohraničenie M. Také číslo existuje a nech α_1 je také reálne číslo, ktoré nie je horným ohraničením množiny M. Také číslo existuje, stačí vziať $x \in M$ a položiť $\alpha_1 = x-1$.

<u>0-tý krok</u>: Definujme $F_0 = [\alpha_1, \beta_1]$

<u>1.krok</u>: Definujme $F_1 = [a_1, b_1]$, kde

$$a_1 = \begin{cases} \alpha_1 , & \text{ak } (\alpha_1+\beta_1)/2 \text{ je horné ohraničenie M} \\ (\alpha_1+\beta_1)/2 , & \text{ak nie je horné ohraničenie M} \end{cases}$$

$$b_1 = \begin{cases} (\alpha_1+\beta_1)/2, & \text{ak} (\alpha_1+\beta_1)/2 \text{ je horné ohraničenie} \\ \beta_1, & \text{ak } (\alpha_1+\beta_1)/2 \text{ nie je horné ohraničenie} \end{cases}$$

.
.
.

<u>n-tý krok</u>: Definujeme $F_n = [a_n, b_n]$, kde

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}, & \text{ak } (a_{n-1}+b_{n-1})/2 \text{ je horné ohraničenie} \\ (a_{n-1}+b_{n-1})/2, & \text{ak } (a_{n-1}+b_{n-1})/2 \text{ nie je horné ohraničenie} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} (a_{n-1}+b_{n-1})/2, & \text{ak } (a_{n-1}+b_{n-1})/2 \text{ je horné ohraničenie} \\ b_{n-1} , & \text{ak } (a_{n-1}+b_{n-1})/2 \text{ nie je horné ohraničenie M.} \end{cases}$$

Potom $F_{n+1} \subset F_n$ pre každé $n \in N$ a $F_n \cap M \neq \emptyset$. Definujme

$$\mathcal{F} = \{ F_n | \ n \in N \}.$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že $\mathcal{F}$ je filter. Ukážeme, že je i C-filtrom na R.

Z konštrukcie množín F_n vyplýva, že F_n je $(\beta_1-\alpha_1)/2^n$ - množina.

Nech $\mu > 0$ je ľubovolné. Vyberme $k \in N$ tak, že

$$\mu > (\beta_1-\alpha_1)/2^k.$$

Potom vzdialenosť ľubovolných dvoch bodov z F_k sa nanajvýš rovná

$(\alpha_1+\beta_1)/2^k$ a je teda menšia než μ. Potom F je skutočne C-filter. Preto podľa vety 2.4 má v R limitu, ktorú označme

$$\alpha = \lim F.$$

Dokážeme, že toto α je rovné sup M. Najprv dokážeme, že α je horným ohraničením množiny M. Urobíme to nepriamo. Nech by α nebolo horným ohraničením množiny M. Potom existuje $p_1 \in M$, $p_1 > \alpha$, ktoré patrí do množiny M. Zostrojme

$$F_{n_1} \subset (\alpha-\tau, \alpha+\tau), \quad \tau = p_1-\alpha > 0.$$

Z toho vyplýva

$$b_{n_1} < \alpha + \tau = p_1$$

a to je v spore s tým, že b_{n_1} bolo horným ohraničením množiny M. Stačí dokázať, že ak $\alpha' < \alpha$ tak α' nie je horným ohraničením množiny M. Položme $\rho = \alpha - \alpha' > 0$. Potom existuje také $F_s \in F$, že $F_s \subset (\alpha-\rho, \alpha+\rho)$. Odtiaľ vyplýva $\alpha_s > \alpha-\rho$. Keďže α_s nie je horným ohraničením množiny M, tak ani $\alpha' = \alpha-\rho$ nie je horným ohraničením množiny M.

L i t e r a t ú r a

[1] M e s c h k o w s k i, H: Einführung in die moderne Mathematik. BI 75/75a Manheim 1966.

[2] Š a l á t, T.: Konvergencia neklesajúcich ohraničených postupností vR a existencia odmocniny a logaritmu. Matematické obzory (v tlači).

[3] Б у р б а к и : Общая топология. Наука, Москва 1968.

Adresa autora: Kabinet teórie vyučovania matematiky a deskriptívnej geometrie PFUK, Mlynská dolina, 816 31 Bratislava

Do redakcie prišlo 25.marca 1978

S u m m a r y

NOTES ON ONE POSSIBILITY FOR INTRODUCTION OF REAL NUMBERS

Štefan Malina, Bratislava

In the book of Meschkowski [1] the concept of a real number is developed, using a topological concept of a filter over the topological space of rational numbers. But some errors and gaps in the completeness of the approach have occured. They are corrected and filled up in the present paper.

Р е з ю м е

ЗАМЕТКИ ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ВВЕДЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Штефан Малина, Братислава

В книге Мешковского [1] разработана конструкция понятия действительного числа на основе топологического понятия фильтра на множестве рациональных чисел. Но в этой книге появились какие-нибудь ошибки и подход не развит полностью. Исправлению этих ошибок и пополнению использованого подхода к конструкции действительных чисел посвящена настоящая работа.