UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XXXVII - 1980

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЕ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. Пусть ([1] , 94)

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \tag{1}$$

где ([1] , 383)

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi + O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{2}$$

и ([1] , 261), $\{t_\nu\}$ обозначает последовательность корней уравнения

$$\vartheta(t) = \pi\nu, \tag{3}$$

(ν — целое положительное). Пусть дальше,

$$S(a,b) = \sum_{0<a\leq m<b<2a} e^{it\ln m}, \quad b\leq\sqrt{\frac{t}{2\pi}} \tag{4}$$

обозначает элементарную тригонометрическую сумму. В этой работе покажем, что имеет место

<u>Теорема.</u> Если

$$|S(a,b)| < A(\Delta)\sqrt{a}\, t^{\Delta}, \quad 0<\Delta<\frac{1}{4}, \tag{5}$$

то

$$\left|\int_T^{T+H} Z(t)dt\right| < A(\Delta)T^{1/8+\Delta/2}, \quad 0<H\leq\sqrt[4]{T}. \tag{6}$$

<u>Примечание 1.</u> Оценка (6) представляет "континуальный" аналог оценки

$$\Bigl|\sum_{T\le t_\nu\le T+H} Z(t_\nu)\Bigr| < A(\Delta)\,T^{1/8+\Delta/2}\ln T, \tag{7}$$

полученной в работе [2].

Пусть $\frac{1}{2}+i\bar{\gamma}'$, $\frac{1}{2}+i\bar{\gamma}''$ — соседние нечетные нули функции $\zeta(s)$. Из упоминавшейся теоремы получается (проверим это во 2 части этой работы)

<u>Следствие.</u>

$$\bar{\gamma}''-\bar{\gamma}' < A(\Delta)\,(\bar{\gamma}')^{1/8+\Delta/2}\,\psi(\bar{\gamma}'), \tag{8}$$

где $\psi(T)$ - сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция.

<u>Примечание 2.</u> Оценка (8) была нами получена в работе [2], используя суммы

$$\sum_{T\le t_\nu\le T+H} Z(t_\nu), \qquad \sum_{T\le t_\nu\le T+H} (-1)^\nu Z(t_\nu). \tag{9}$$

В этой работе оценка (8) получена способом, заключающимся в рассмотрении различия в асимптотическом поведении интегралов

$$\int_T^{T+H} Z(t)\,dt, \qquad \int_T^{T+H} |Z(t)|\,dt. \tag{10}$$

Доказательство теоремы опирается на следующее соотношение (Риман, Зигель, Харди - Литтлвуд)

$$Z(t) = 2\sum_{m\le\sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{m}}\cos(\vartheta - t\ln m) + O(T^{-1/4}), \tag{11}$$

см. [1], 94.

2. В этой части покажем, что из теоремы следует (8). Прежде всего положим (ср. (6))

$$\overline{H} = A(\Delta)\, T^{1/8 + \Delta/2}\, \psi(T). \qquad (12)$$

Очевидно

$$\overline{H} < \sqrt[4]{T}\ , \quad T \geq T_0(\psi, \Delta). \qquad (13)$$

Пусть, например,

$$Z(t) \geqq 0, \quad t \in \langle T, T+\overline{H} \rangle. \qquad (14)$$

Тогда, с одной стороны, в силу (1), (6), (14),

$$A(\Delta)\, T^{1/8 + \Delta/2} > \int_T^{T+\overline{H}} Z(t)\,dt = \int_T^{T+\overline{H}} \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| dt \geqq$$

$$\geqq \left| \int_{1/2+iT}^{1/2+i(T+\overline{H})} \zeta(s)\,ds \right|. \qquad (15)$$

С другой стороны, применяя теорему Коши к прямоугольнику с вершинами в точках

$$\tfrac{1}{2}+iT, \quad 2+iT, \quad 2+i(T+\overline{H}), \quad \tfrac{1}{2}+i(T+\overline{H}),$$

получается

$$\int_{1/2+iT}^{1/2+i(T+\overline{H})} \zeta(s)\,ds = i\overline{H} + O(T^{\Delta+\varepsilon}), \quad 0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{8} - \frac{\Delta}{2}, \qquad (16)$$

где принято во внимание, что

(a) в силу (5) (ср. [2] , (14) - (22))

$$\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| < A(\Delta)\, t^{\Delta} \ln t < A(\Delta)\, t^{\Delta+\varepsilon}, \qquad (17)$$

имеет место (используя теорему Фрагмена-Линделёфа)

$$\int\limits_{1/2+iT}^{2+iT} \zeta(s)\,ds = O(T^{\Delta+\varepsilon}),$$

$$\int\limits_{2+i(T+\bar{H})}^{1/2+i(T+\bar{H})} \zeta(s)\,ds = O(T^{\Delta+\varepsilon}), \tag{18}$$

(b) в силу тождества

$$\zeta(2+it) = 1 + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{e^{-it\ln m}}{m^2}, \tag{19}$$

имеет место асимптотическое соотношение

$$\int\limits_{2+iT}^{2+i(T+\bar{H})} \zeta(s)\,ds = i\,\bar{H} + O(1). \tag{20}$$

Однако, соотношение (16) противоречит оценке (15), в силу (12). Значит, отрезок

$$\frac{1}{2} + iT,\ \frac{1}{2} + i(T+\bar{H}),\quad T \geq T_0(\psi, \Delta), \tag{21}$$

содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$, т.е. имеет место (8).

В следующих частях работы помещено доказательство теоремы.

3. Так как (напомним что $H \leq \sqrt[4]{T}$)

$$\sqrt{\frac{T+H}{2\pi}} - \sqrt{\frac{T}{2\pi}} = O\left(\frac{H}{\sqrt{T}}\right) = O(T^{-1/4}), \tag{22}$$

то

$$\sum_{\sqrt{\frac{T}{2\pi}} \leq m \leq \sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{m}} \cos(\vartheta - t\ln m) = O(T^{-1/4}), \tag{23}$$

значит, при $t \in \langle T, T+H \rangle$, из (11) получается

$$Z(t)=2\sum_{m<N_0}\frac{1}{\sqrt{m}}\cos(\vartheta-t\ln m)+O(T^{-1/4}), \qquad (24)$$

где $N_0=\sqrt{\frac{T}{2\pi}}$. Пусть, дальше,

$$\begin{aligned} t_{\bar\nu} &= \min\{t_\nu;\ T\leq t_\nu\leq T+H\},\\ t_{\bar{\bar\nu}} &= \max\{t_\nu;\ T\leq t_\nu\leq T+H\}. \end{aligned} \qquad (25)$$

Так как (см. [2], (42))

$$t_{\nu+1}-t_\nu=\frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right), \qquad (26)$$

то, в силу (1), (17), (26),

$$\int_T^{t_{\bar\nu}} Z(t)dt=O(T^\Delta),\quad \int_{t_{\bar{\bar\nu}}}^{T+H} Z(t)dt=O(T^\Delta). \qquad (27)$$

Следовательно,

$$\int_T^{T+H} Z(t)dt=\int_{t_{\bar\nu}}^{t_{\bar{\bar\nu}}} Z(t)dt+O(T^\Delta). \qquad (28)$$

Теперь, в силу (24),

$$\int_{t_{\bar\nu}}^{t_{\bar{\bar\nu}}} Z(t)dt=2\sum_{m<N_0}\frac{\alpha(m)}{\sqrt{m}}+O(1), \qquad (29)$$

где

$$\alpha(m)=\alpha(m;T,H)=\int_{t_{\bar\nu}}^{t_{\bar{\bar\nu}}}\cos(\vartheta-t\ln m)dt=$$

$$=\sum_{\nu=\bar\nu}^{\bar{\bar\nu}-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\cos(\vartheta-t\ln m)dt=\sum_{\nu=\bar\nu}^{\bar{\bar\nu}-1}P(\nu,m). \qquad (30)$$

Напомним еще ([1] ,260), что

$$\vartheta'(t) = \ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}} + O\left(\frac{1}{t}\right), \ \vartheta''(t) \sim \frac{1}{2t}. \tag{31}$$

Применяя формулу Тейлора, при $t \in \langle t_\nu, t_{\nu+1} \rangle$ получаем

$$\vartheta(t) = \vartheta(t_\nu) + \vartheta'(t_\nu)(t-t_\nu) + \frac{1}{2}\vartheta''\{\tau_\nu(t)\}(t-t_\nu)^2, \tag{32}$$

где $\tau_\nu(t) = t_\nu + \delta_\nu(t-t_\nu), \ 0 < \delta_\nu < 1$. Однако, в силу (31), при $t, t_\nu \in \langle T, T+H \rangle$,

$$\vartheta'(t_\nu) = \vartheta'(T) + O\left(\frac{H}{T}\right), \ \vartheta''\{\tau_\nu(t)\} = O\left(\frac{1}{T}\right), \tag{33}$$

так что, из (32), в силу (3), (26), (33), получается

$$\vartheta(t) = \pi\nu + \vartheta'(T)(t-t_\nu) + O\left(\frac{H}{T\ln T}\right). \tag{34}$$

Дальше, в силу (31),

$$\vartheta'(T) = \ln\sqrt{\frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{1}{T}\right) = \ln N_0 + O\left(\frac{1}{T}\right), \tag{35}$$

так что

$$\vartheta(t) = \pi\nu + (t-t_\nu)\ln N_0 + O\left(\frac{H}{T\ln T}\right). \tag{36}$$

Наконец,

$$\cos(\vartheta - t\ln m) =$$

$$= \cos\{\pi\nu + (t-t_\nu)\ln N_0 - t\ln m\} + O\left(\frac{H}{T\ln T}\right) =$$

$$= \cos\left\{\pi\nu + (t-t_\nu)\ln m + (t-t_\nu)\ln\frac{N_0}{m} - t\ln m\right\} + O\left(\frac{H}{T\ln T}\right) =$$

$$= \cos\left\{\pi\nu - t_\nu\ln m + (t-t_\nu)\ln\frac{N_0}{m}\right\} + O\left(\frac{H}{T\ln T}\right) =$$

$$= (-1)^\nu\cos\left\{t_\nu\ln m - (t-t_\nu)\ln\frac{N_0}{m}\right\} + O\left(\frac{H}{T\ln T}\right) =$$

$$=O\left(\frac{H}{T\ln T}\right)+(-1)^{\nu}\cos(t_\nu \ln m)\cos\left\{(t-t_\nu)\ln\frac{N_0}{m}\right\}+$$

$$+(-1)^{\nu}\sin(t_\nu \ln m)\sin\left\{(t-t_\nu)\ln\frac{N_0}{m}\right\}. \qquad (37)$$

4. Прежде всего

$$P_1(\nu)=\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\cos\left\{(t-t_\nu)\ln\frac{N_0}{m}\right\}dt=$$

$$=\frac{\sin\left\{(t_{\nu+1}-t_\nu)\ln\frac{N_0}{m}\right\}}{\ln\frac{N_0}{m}}, \qquad (38)$$

$$P_2(\nu)=\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\sin\left\{(t-t_\nu)\ln\frac{N_0}{m}\right\}dt=$$

$$=-2\,\frac{\sin^2\left\{\frac{1}{2}(t_{\nu+1}-t_\nu)\ln\frac{N_0}{m}\right\}}{\ln\frac{N_0}{m}}. \qquad (39)$$

Дальше, так как в силу (26),

$$t_{\nu+1}-t_\nu=\frac{\pi}{\ln N_0}+O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right), \qquad (40)$$

то

$$\sin\left\{(t_{\nu+1}-t_\nu)\ln\frac{N_0}{m}\right\}=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{\ln N_0}\ln\frac{N_0}{m}\right)+O\left(\frac{H\ln\frac{N_0}{m}}{T\ln^2 T}\right). \qquad (41)$$

Следовательно,

$$P_1(\nu) = \frac{\pi}{\ln N_0} \frac{\sin\{X(m)\}}{X(m)} + O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right), \qquad (42)$$

$$P_2(\nu) = -\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{\ln^2 N_0}\ln\frac{N_0}{m}\left(\frac{\sin\{\frac{1}{2}X(m)\}}{\frac{1}{2}X(m)}\right)^2 + O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right), \qquad (43)$$

где

$$X(m) = \frac{\pi}{\ln N_0}\ln\frac{N_0}{m}. \qquad (44)$$

Наконец, принимая во внимание, что ([3], (23))

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H} 1 \sim \frac{1}{2\pi} H \ln\frac{T}{2\pi}, \qquad (45)$$

в силу (30), (37), (42), (43), получается

$$\alpha(m) = \int_{t_{\bar\nu}}^{t_{\bar{\bar\nu}}} \cos(\vartheta - t\ln m)\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{\ln N_0}\frac{\sin\{X(m)\}}{X(m)} \sum_{\nu=\bar\nu}^{\bar{\bar\nu}-1} (-1)^\nu \cos(t_\nu \ln m) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{\ln^2 N_0}\ln\frac{N_0}{m}\left(\frac{\sin\{\frac{1}{2}X(m)\}}{\frac{1}{2}X(m)}\right)^2 \sum_{\nu=\bar\nu}^{\bar{\bar\nu}-1} (-1)^\nu \sin(t_\nu \ln m) +$$

$$+ O\left(\frac{H^2}{T\ln T}\right) = \alpha_1(m) - \alpha_2(m) + O\left(\frac{H^2}{T\ln T}\right). \qquad (46)$$

5. В этой части получим оценку суммы

$$\sum_{m<N_0} \frac{\alpha_1(m)}{\sqrt{m}}. \qquad (47)$$

Прежде всего напомним ([2], (43), (54), $N=\bar{\nu}-\underline{\nu}-1$) что

$$\sum_{\nu=\underline{\nu}}^{\bar{\nu}-1}(-1)^{\nu}\cos(t_{\nu}\ln m)=\frac{(-1)^{\underline{\nu}}}{2}\cos\varphi+$$

$$+\frac{(-1)^{N+\underline{\nu}}}{2}\cos(\omega N+\varphi)+\frac{(-1)^{\underline{\nu}}}{2}\sin\varphi\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}+$$

$$+\frac{(-1)^{N+\underline{\nu}+1}}{2}\sin(\omega N+\varphi)\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}+O\left(\frac{H^3\ln m}{T}\right), \qquad (48)$$

где (см. [2], (50))

$$\omega=2\pi\frac{\ln m}{\ln\frac{T}{2\pi}},\quad \varphi=t_{\underline{\nu}}\ln m. \qquad (49)$$

Принимая во внимание (46), (48), находим, что в (47) типичными являются следующие слагаемые

$$B(T)=\frac{A}{\ln N_0}\sum_{m<N_0}\frac{\sin\{X(m)\}}{X(m)}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sqrt{m}}=$$

$$=\frac{A}{\ln N_0}\sum_{m<N_0}a(m)\,b(m), \qquad (50)$$

$$C(T)=\frac{A}{\ln N_0}\sum_{m<N_0}\frac{\sin\{X(m)\}}{X(m)}\cdot\frac{\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{m}}\sin\varphi=$$

$$=\frac{A}{\ln N_0}\sum_{m<N_0}a(m)\,c(m), \qquad (51)$$

и, следовательно, достаточно изучить эти последние.

Дальше, так как функция $\frac{\sin t}{t}$ убывает при $t\in(0,\pi)$, то, в силу (44), последовательность $a(m)$ возрастает при $1\leq m<N_0$, и ограничена сверху единицей. Однако, в работе

[2], (70), (93), было показано, что (при соблюдении условия (5))

$$\Big|\sum_{m<N_0} b(m)\Big| < A(\Delta)\,T^{\Delta}\ln T, \tag{52}$$

$$\Big|\sum_{m<N_0} c(m)\Big| < A(\Delta)\,T^{1/8+\Delta/2}\ln T. \tag{53}$$

Следовательно, применяя к суммам (50), (51), преобразование Абеля, в силу (52), (53), получается

$$|B(T)| < \frac{A(\Delta)}{\ln N_0}\,T^{\Delta}\ln T < A(\Delta)\,T^{\Delta}, \tag{54}$$

$$|C(T)| < A(\Delta)\,T^{1/8+\Delta/2}. \tag{55}$$

Так как еще (ср. (48))

$$\sum_{m<N_0}\frac{1}{\sqrt{m}}\,O\left(\frac{H^3\ln m}{T}\right) = O\left(\frac{H^3\ln T}{T}\cdot\sqrt{N_0}\right) = O(\ln T), \tag{56}$$

то, в силу сказанного выше,

$$\Big|\sum_{m<N_0}\frac{\alpha_1(m)}{\sqrt{m}}\Big| < A(\Delta)\,T^{1/8+\Delta/2}. \tag{57}$$

6. Остается получить оценку суммы

$$\sum_{m<N_0}\frac{\alpha_2(m)}{\sqrt{m}}. \tag{58}$$

В слагаемые этой суммы входит сомножителем сумма (см. (46))

$$d(m) = \sum_{\nu=\bar{\nu}}^{\bar{\bar{\nu}}-1}(-1)^{\nu}\sin(t_\nu \ln m). \tag{59}$$

Эту сумму (ср. [2], (49) - (51), $N = \bar{\bar{\nu}} - \bar{\nu} - 1$) преобразуем так

$$d(m) = (-1)^{\bar{\nu}} \sum_{M=0}^{N} \sin(\bar{\omega} M + \varphi) + O\left(\frac{H^3 \ln m}{T}\right) \qquad (60)$$

где $\bar{\omega} = \omega + \pi$. Напомним, что в случае суммы (48) мы использовали формулу (см. 2 , (52))

$$\sum_{M=0}^{N} \cos(\bar{\omega} M + \varphi) = \frac{\sin\left\{\frac{\bar{\omega}(N+1)}{2}\right\} \cos\left(\frac{\bar{\omega} N}{2} + \varphi\right)}{\sin \frac{\bar{\omega}}{2}}. \qquad (61)$$

В случае (60) используем формулу

$$\sum_{M=0}^{N} \sin(\bar{\omega} M + \varphi) = \frac{\sin\left\{\frac{\bar{\omega}(N+1)}{2}\right\} \sin\left(\frac{\bar{\omega} N}{2} + \varphi\right)}{\sin \frac{\bar{\omega}}{2}}. \qquad (62)$$

Достаточно одного взгляда на формулы (61), (62), чтобы убедиться в том, что формула (62) приводит к членам, родственным тем, которые входят в соотношение (48), (в силу чего нет надобности явно выписывать последние). Значит, применяя преобразование Абеля (способом изложенным в 5 части) получаем

$$\left| \sum_{m<N_0} a^2(m) d(m) \right| < A(\Delta)\, T^{1/8 + \Delta/2} \ln T. \qquad (63)$$

Теперь обратим внимание на величину (см. (46))

$$\frac{1}{\ln^2 N_0} \sum_{m<N_0} a^2(m)\, d(m) \ln \frac{N_0}{m} =$$

$$= \frac{1}{\ln N_0} \sum_{m<N_0} a^2(m) d(m) - \frac{1}{\ln^2 N_0} \sum_{m<N_0} a^2(m)\, d(m) \ln m =$$

$$= D(T) - E(T). \qquad (64)$$

С одной стороны, в силу (63),

$$|D(T)| < A(\Delta)\, T^{1/8+\Delta/2}. \qquad (65)$$

С другой стороны, так как последовательность $\{\ln m\}$ возрастает и ограничена при $m < N_0$ значением $\ln N_0 < A \ln T$, то, применяя преобразование Абеля, получаем

$$|E(T)| < \frac{A(\Delta)}{\ln^2 N_0} \cdot \ln T \cdot T^{1/8+\Delta/2} \ln T <$$

$$< A(\Delta)\, T^{1/8+\Delta/2}. \qquad (66)$$

Теперь, в силу (64), (65), (66), (ср. (46)), получается

$$\Big| \sum_{m<N_0} \frac{\alpha_2(m)}{\sqrt{m}} \Big| < A(\Delta)\, T^{1/8+\Delta/2}. \qquad (67)$$

Наконец, так как

$$\sum_{m<N_0} \frac{1}{\sqrt{m}}\, O\left(\frac{H^2}{T \ln T}\right) = O\left(\frac{H^2}{T^{3/4} \ln T}\right) = O\left(\frac{T^{-1/4}}{\ln T}\right), \qquad (68)$$

то, в силу (28), (29), (46), (57), (67), получается(6), т.е. теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Титчмарш, Е.К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

[2] Ян Мозер : Об одной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 31-43.

[3] Ян Мозер : Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 45-51.

Поступило: 21. 2. 1977

R E S U M E

O JEDNOM INTEGRÁLI V TEORII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

Nech $Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, a $S(a,b)$ označuje elementárny trigonometrický súčet. V tejto práci je dokázaná nasledovná veta. Ak

$$|S(a,b)|<A(\Delta)\sqrt{a}\,t^{\Delta},\quad 0<\Delta<\frac{1}{4},$$

potom

$$\left|\int_T^{T+H} Z(t)\,dt\right|<A(\Delta)\,T^{1/8+\Delta/2},\quad 0<H<\sqrt[4]{T}.$$

S U M M A R Y

ON AN INTEGRAL IN THE THEORY OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

Let $Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, and $S(a,b)$ denote the elementary trigonometrical summ. In the paper the following theorem is proved. If

$$|S(a,b)|<A(\Delta)\sqrt{a}\,t^{\Delta},\quad 0<\Delta<\frac{1}{4},$$

then

$$\left|\int_T^{T+H} Z(t)\,dt\right|<A(\Delta)\,T^{1/8+\Delta/2},\quad 0<H<\sqrt[4]{T}.$$