UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XXXVII - 1980

ОБ ОДНОЙ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ СУММЕ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. Пусть ([4], 94, 383)

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right), \qquad \vartheta(t) = \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{1}$$

и, ([4], 261), $\{t_\nu\}$ обозначает последовательность корней уравнения

$$\vartheta(t) = \pi\nu, \tag{2}$$

где ν – целое положительное.

В работе [5], Е.К.Титчмарш получил следующий результат (если учесть сказанное в [1] относительно опечатки в работе [5])

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} Z(t_\nu)Z(t_{\nu+1}) \sim -2\,(c+1)\,N, \tag{3}$$

где M - постоянное целое число, и, c - постоянная Эйлера.

В работе [3], изучая результат Е.К.Титчмарша, мы показали, что

$$\sum_{T\le t_\nu \le T+\bar{H}} Z(t_\nu)Z(t_{\nu+1}) =$$

$$= -\frac{c+1}{\pi}\bar{H}\ln\frac{T}{2\pi} + O(\sqrt{T}\ln^2 T), \tag{4}$$

где

$$\bar{H} = \sqrt{T}\,\psi(T)\ln T, \tag{5}$$

$[\psi(T)$ - сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция$]$.

В предлагаемой теперь работе делаем следующий шаг. Так как имеет место (см. 3 часть этой работы)

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+\bar{H}} Z(t_\nu) Z(t_{\nu+1}) =$$

$$= \sum_{T \leq t_\nu \leq T+\bar{H}} Z(t_\nu) Z\left(t_\nu + \frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}\right) +$$

$$+ O\left(T^{1/3+\varepsilon}\psi^2(T)\ln^2 T\right), \quad \varepsilon > 0, \tag{6}$$

то из (4), в силу (6), получаем

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+\bar{H}} Z(t_\nu) Z\left(t_\nu + \frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}\right) =$$

$$= -\frac{c+1}{\pi}\bar{H}\ln\frac{T}{2\pi} + O\left(\sqrt{T}\ln^2 T\right). \tag{7}$$

Последнее соотношение наводит на мысль изучить следующую а в т о к о р р е л я ц и о н н у ю сумму

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H} Z(t_\nu) Z(t_\nu + \tau) =$$

$$= E(\tau; T, H), \quad \tau \neq 0. \tag{8}$$

В этом направлении мы обнаружили следующие закономерности. В некоторой окрестности значения

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}} \tag{9}$$

расположены отрезки двух арифметических последовательностей значений τ; $\{\bar{\tau}_k\}$, $\{\bar{\bar{\tau}}_k\}$, для которых

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H} Z(t_\nu)Z(t_\nu+\bar{\tau}_k) \sim -\frac{1}{(4k+3)\pi^2} H \ln^2 \frac{T}{2\pi},$$

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H} Z(t_\nu)Z(t_\nu+\bar{\bar{\tau}}_k) \sim \frac{1}{(4k+1)\pi^2} H \ln^2 \frac{T}{2\pi}.$$

Точнее, покажем что имеет место .

<u>Т е о р е м а.</u>

$$E(\tau) = E(\tau; T, H) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\tau \ln\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\right)}{\tau \ln\sqrt{\frac{T}{2\pi}}} H \ln^2 \frac{T}{2\pi} + O(\sqrt{T} \ln^2 T), \tag{10}$$

где

$$\tau = O\left(\frac{1}{\ln T}\right), \quad H \leq \sqrt{T} \ln T. \tag{11}$$

Из этой теоремы получаются

С л е д с т в и е 1.

$$E(\bar{\tau}_k) = -\frac{1}{(4k+3)\pi^2} H \ln^2 \frac{T}{2\pi} + O(\sqrt{T} \ln^2 T), \tag{12}$$

где

$$\bar{\tau}_k = \frac{(4k+3)\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}}, \quad 0 \leq k \leq K_0(T), \quad K_0(T) = O(1), \tag{13}$$

и k – целое число.

С л е д с т в и е 2.

$$E(\bar{\bar{\tau}}_k) = \frac{1}{(4k+1)\pi^2} H \ln^2 \frac{T}{2\pi} + O(\sqrt{T} \ln^2 T), \tag{14}$$

где

$$\overline{\overline{\tau}}_k = \frac{(4k+1)\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}. \tag{15}$$

Полагая (ср. (11), второе соотношение)

$$\tilde{H} = \sqrt{T}\,\psi(T) \tag{16}$$

получаем, что в силу (12), (14)

$$\tilde{E}(\overline{\tau}_k) < 0, \quad \tilde{E}(\overline{\overline{\tau}}_k) > 0, \tag{17}$$

где $\tilde{E}(\tau) = E(\tau; T, \tilde{H})$. Так как, однако, члены последовательностей $\{\overline{\tau}_k\}, \{\overline{\overline{\tau}}_k\}$ отделяют друг друга, то получается

<u>Следствие 3.</u> Функция $\tilde{E}(\tau)$ имеет в промежутке

$$\left\langle \frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}, \frac{(4K_0+3)\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}} \right\rangle \tag{18}$$

не менее чем $2K_0+1$ нечетных нулей.

Наконец напомним, что в работе [3] мы назвали промежуток

$\langle t_\nu, t_{\nu+1} \rangle$ правильным в случае справедливости неравенства

$$Z(t_\nu)\,Z(t_{\nu+1}) < 0.$$

Теперь назовем промежуток $\langle t_\nu, t_\nu + \overline{\tau}_k \rangle$, $\overline{\tau}$ - правильным, если

$$Z(t_\nu) Z(t_\nu + \overline{\tau}_k) < 0. \tag{19}$$

Ясно что $\overline{\tau}$ - правильный промежуток содержит нечетный нуль функции $Z(t)$.

Пусть $R(T, \tilde{H}, k)$ обозначает количество $\overline{\tau}$ - правильных промежутков, принадлежащих промежутку $\langle T, T+\tilde{H} \rangle$, и,

$$\mu = \mu(T, \tilde{H}) = \max_{t \in \langle T, T+\tilde{H} \rangle} |Z(t)| \tag{20}$$

Тогда из (8), (12), (ср. 3 , (11), (12)) получается

<u>Следствие 4.</u>

$$R(T,\widetilde{H},k) > \frac{A}{k+1}\cdot\frac{1}{\mu^2}\sqrt{T}\,\psi(T)\ln^2 T. \qquad (21)$$

Из этого неравенства получаем (ср. [3],(14), (19), (21)):
в общем случае

$$R(T,\widetilde{H},k) > \frac{A(\alpha,\beta)}{k+1}\,T^{\frac{1}{2}-2\alpha}\,\psi(T)\ln^{2-2\beta}T, \qquad (22)$$

в случае справедливости гипотезы Линделёфа

$$R(T,\widetilde{H},k) > \frac{A(\varepsilon)}{k+1}\,T^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\,\psi(T)\ln^2 T, \qquad (23)$$

в случае справедливости гипотезы Римана

$$R(T,\widetilde{H},k) > \frac{A}{k+1}\,T^{\frac{1}{2}-\frac{A}{\ln\ln T}}\,\psi(T)\ln^2 T. \qquad (24)$$

Примечание 1. Так как (см. (5), (16))

$$\bar{H}=\sqrt{T}\,\psi(T)\ln T,\quad \widetilde{H}=\sqrt{T}\,\psi(T),$$

то оценки (22), (23), (24) относятся к несколько меньшему промежутку чем аналогичные оценки для родственной величины $G(T,\bar{H})$ в работе [3].

2. В этой части покажем, что имеет место оценка

$$Z'(t)=O(t^{1/6+\varepsilon}),\quad \varepsilon>0. \qquad (25)$$

Сначала обратим внимание на функцию

$$\zeta'\left(\tfrac{1}{2}+it\right).$$

Применяя теорему Коши к окружности с центром $\frac{1}{2}+it$ и радиусом

$r < \frac{1}{2}$, получаем

$$\zeta'\left(\frac{1}{2}+it\right)=O\left\{\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it+r\,e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\right\}. \qquad (26)$$

Далее получим оценку для $|\zeta(s)|$, $s=\sigma+it$, когда s пробегает упоминавшуюся окружность. Так как имеют место оценки ([4], 54, 109)

$$\begin{aligned}&\zeta(1+it) = O(t^{\varepsilon}),\\ &\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(t^{1/6}\ln t) = O(t^{1/6+\varepsilon}),\ \varepsilon>0,\end{aligned} \qquad (27)$$

то, в силу принципа Фрагмена-Линделёфа, на правой половине окружности имеем

$$\zeta(s) = O(t^{1/6+\varepsilon}). \qquad (28)$$

На левой половине окружности, где

$$\frac{1}{2}-r \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2},$$

в силу функционального уравнения ([4], 23)

$$\zeta(s) = \chi(s)\,\zeta(1-s), \qquad (29)$$

асимптотического соотношения ([4], 96)

$$|\chi(s)| \sim \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma}, \qquad (30)$$

и оценки (28), получаем

$$|\zeta(s)| = |\chi(s)|\,|\zeta(1-s)| < A\,t^{1/2-\sigma}\cdot t^{1/6+\varepsilon} <$$

$$< A\,e^{r\ln t}\,t^{1/6+\varepsilon}. \qquad (31)$$

Полагая в последнем соотношении $r\ln t = 1$, имеем

$$\zeta(s) = O(t^{1/6+\varepsilon}),\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{\ln t} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}. \qquad (32)$$

Теперь из (26), в силу (28), (32)

$$\zeta'\left(\tfrac{1}{2}+it\right)=O\left(t^{1/6+\varepsilon}\ln t\right)=O\left(t^{1/6+\varepsilon_1}\right). \tag{33}$$

Наконец, так как (см. (1))

$$Z'(t)=i\vartheta' e^{i\vartheta}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)+i\,e^{i\vartheta}\zeta'\left(\tfrac{1}{2}+it\right), \tag{34}$$

и ([4], 260)

$$\vartheta'(t)\sim\frac{1}{2}\ln t, \tag{35}$$

то, из (34), в силу (27), (33), (35) получаем (25).

3. В этой части покажем, что имеет место соотношение (6). Прежде всего напомним ([1], (42)) что

$$t_{\nu+1}=t_\nu+\frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right). \tag{36}$$

Применяя теорему Лагранжа и (25), получаем ($t_\nu\in\langle T,T+\bar{H}\rangle$)

$$Z(t_{\nu+1})=Z\left(t_\nu+\frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}\right)+$$

$$+O\left\{\frac{\bar{H}}{T\ln^2 T}\cdot\max_{t\in\langle T,T+\bar{H}\rangle}|Z'(t)|\right\}=$$

$$=Z\left(t_\nu+\frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}\right)+O\left(\frac{\bar{H}\,T^{-5/6+\varepsilon}}{\ln^2 T}\right). \tag{37}$$

Еще напомним ([2], (23)), что

$$\sum_{T\leq t_\nu\leq T+H}1=\frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{H^2}{T}\right). \tag{38}$$

Теперь, в силу (1), (11), (27), (37), (38),

$$\sum_{T\leq t_\nu\leq T+H}Z(t_\nu)Z(t_{\nu+1})=$$

$$= \sum_{(t_\nu)} Z(t_\nu) Z\left(t_\nu + \frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}\right) +$$

$$+ O\left\{\frac{\bar{H}^2 T^{-5/6+\varepsilon}}{\ln T} \cdot \max_{t \in \langle T, T+\bar{H} \rangle} \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2} + it\right)\right|\right\} =$$

$$= \sum_{(t_\nu)} Z(t_\nu) Z\left(t_\nu + \frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}\right) + O\left(T^{1/3+\varepsilon} \psi^2 \ln^2 T\right), \quad (39)$$

т.е. (6).

В следующих частях работы помещено доказательство теоремы.

4. Используем формулу Римана-Зигеля ([4], 94)

$$Z(t) = 2 \sum_{m \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{m}} \cos(\vartheta - t \ln m) + O(t^{-1/4}). \quad (40)$$

Пусть

$$0 < H \leq \sqrt{T} (\ln T)^{\ell}, \quad (41)$$

где ℓ - целое положительное. Так как

$$\sqrt{\frac{T+H}{2\pi}} - \sqrt{\frac{T}{2\pi}} = O\left(\frac{H}{\sqrt{T}}\right) = O\{(\ln T)^{\ell}\}, \quad (42)$$

то

$$\sum_{\sqrt{\frac{T}{2\pi}} \leq m \leq \sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{m}} \cos(\vartheta - t \ln m) =$$

$$= O\{T^{-1/4} (\ln T)^{\ell}\}, \quad (43)$$

и, следовательно, при $t \in \langle T, T+H \rangle$,

$$Z(t) = 2 \sum_{m < N_0} \frac{1}{\sqrt{m}} \cos(\vartheta - t \ln m) +$$

$$+O\{T^{-1/4}(\ln T)^2\}, \tag{44}$$

где $N_0=\sqrt{\frac{T}{2\pi}}$. Теперь, в силу (2), при $t_\nu \in \langle T, T+H \rangle$

$$Z(t_\nu)=2(-1)^\nu \sum_{m<N_0} \frac{\cos(t_\nu \ln m)}{\sqrt{m}} +$$

$$+O\{T^{-1/4}(\ln T)^2\}. \tag{45}$$

Далее напомним ([4], 260), что

$$\vartheta'(t)=\ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}}+O\left(\frac{1}{t}\right),\ \vartheta''(t)\sim\frac{1}{2t}. \tag{46}$$

Применяя теорему Тейлора, имеем

$$\vartheta(t_\nu+\tau)=\vartheta(t_\nu)+\vartheta'(t_\nu)\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\vartheta''\{t_\nu+\tau\,\delta_\nu(\tau)\}\tau^2, \tag{47}$$

где $0<\delta_\nu(\tau)<1$. Принимая во внимание что, в силу (46),

$$\vartheta'(t_\nu)=\vartheta'(T)+O\left(\frac{H}{T}\right)=\ln\sqrt{\frac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{H}{T}\right)=$$

$$=\ln N_0+O\left(\frac{H}{T}\right), \tag{48}$$

то, в силу (2), (11),

$$\vartheta(t_\nu+\tau)=\pi\nu+\tau\ln N_0+O\left(\frac{H|\tau|}{T}\right)=$$

$$=\pi\nu+\tau\ln N_0+O\left\{\frac{(\ln T)^{2-1}}{\sqrt{T}}\right\}. \tag{49}$$

Следовательно,

$$\cos\{\vartheta(t_\nu+\tau)-(t_\nu+\tau)\ln m\}=$$

$$=\cos\left(\pi\nu+\tau\ln\frac{N_0}{m}-t_\nu\ln m\right)+O\left\{\frac{(\ln T)^{2-1}}{\sqrt{T}}\right\}=$$

$$=(-1)^{\nu}\cos\left(t_\nu \ln m - \tau \ln\frac{N_0}{m}\right)+O\left\{\frac{(\ln T)^{q-1}}{\sqrt{T}}\right\}. \tag{50}$$

Теперь, в силу (44), (50),

$$Z(t_\nu+\tau)=$$

$$=2(-1)^{\nu}\sum_{m<N_0}\frac{1}{\sqrt{m}}\cos\left(t_\nu \ln m - \tau\ln\frac{N_0}{m}\right)+$$

$$+O\left\{T^{-1/4}(\ln T)^{q-1}\right\}. \tag{51}$$

Заметим что, в силу (1), (27), из (45), (51) получаем

$$\begin{gathered}\sum_{m<N_0}\frac{1}{\sqrt{m}}\cos(t_\nu \ln m) \doteq O(T^{1/6}\ln T),\\ \sum_{m<N_0}\frac{1}{\sqrt{m}}\cos\left(t_\nu \ln m - \tau\ln\frac{N_0}{m}\right)=O(T^{1/6}\ln T).\end{gathered} \tag{52}$$

Следовательно, в силу (45), (51), (52),

$$Z(t_\nu)Z(t_\nu+\tau)=$$

$$=2\sum\sum_{m,n<N_0}\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left\{t_\nu\ln(mn)-\tau\ln\frac{N_0}{n}\right\}+$$

$$+2\sum\sum_{m,n<N_0}\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left(t_\nu\ln\frac{m}{n}+\tau\ln\frac{N_0}{n}\right)+$$

$$+O\left\{T^{-1/12}(\ln T)^{q+1}\right\}, \tag{53}$$

и, если принять во внимание (38), то получается

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+H} Z(t_\nu)Z(t_\nu+\tau)=\sum_{(t_\nu)} Z(t_\nu)Z(t_\nu+\tau)=$$

$$=2\sum_{(m,n)}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{(t_\nu)}\cos\left\{t_\nu\ln(mn)-\tau\ln\frac{N_0}{n}\right\}+$$

$$+2\sum_{(m,n)}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{(t_\nu)}\cos\left(t_\nu\ln\frac{m}{n}+\tau\ln\frac{N_0}{n}\right)+$$

$$+O\left\{HT^{-1/12}(\ln T)^{q+2}\right\}=$$

$$=S_1+S_2+O\left\{T^{5/12}(\ln T)^{q+2}\right\}. \qquad (54)$$

5. Прежде всего, в силу (38), (41),

$$S_1(m=n=1)=2\sum_{(t_\nu)}\cos(\tau\ln N_0)=$$

$$=O\left\{\sqrt{T}(\ln T)^{q+1}\right\}. \qquad (55)$$

Далее,

$$S_2(m=n)=2\sum_{(n)}\frac{1}{n}\sum_{(t_\nu)}\cos\left(\tau\ln\frac{N_0}{n}\right)=$$

$$=2\sum_{(t_\nu)}1\cdot\sum_{(n)}\frac{1}{n}\cos\left(\tau\ln\frac{N_0}{n}\right). \qquad (56)$$

В силу формулы Эйлера-Маклорена ([4], 19)

$$\sum_{a<n\leqq b}\varphi(n)=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx+$$

$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b), \qquad (57)$$

в случае

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\cos\left(\tau\ln\frac{N_0}{x}\right),\quad |\varphi'(x)|<\frac{A}{x^2}, \qquad (58)$$

получаем

$$\sum_{1 \leq m < N_0} \frac{1}{m} \cos\left(\tau \ln \frac{N_0}{m}\right) = \sum_{1 < m \leq N_0} \frac{1}{m} \cos\left(\tau \ln \frac{N_0}{m}\right) +$$

$$+ O(1) = \int_1^{N_0} \frac{1}{x} \cos\left(\tau \ln \frac{N_0}{x}\right) dx + O(1) =$$

$$= \frac{1}{\tau} \sin\left(\tau \ln N_0\right) + O(1), \qquad (59)$$

и, следовательно, в силу (38), (41), (56), (59),

$$S_2(m = n) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\tau \ln \sqrt{\frac{T}{2\pi}}\right)}{\tau \ln \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} H \ln \frac{T}{2\pi} +$$

$$+ O\{\sqrt{T} (\ln T)^{\ell+1}\}. \qquad (60)$$

Остается изучить следующие суммы

$$S_1(m = n > 1), \; S_1(m \neq n), \; S_2(m \neq n). \qquad (61)$$

Оценки этих сумм немедленно получаются методом ван дер Корпута-Титчмарша, ([5]):

$$\left.\begin{array}{l} S_1(m = n > 1) \\ S_1(m \neq n) \\ S_2(m \neq n) \end{array}\right\} = O(\sqrt{T} \ln^2 T). \qquad (62)$$

Наконец, из (54), в силу (55), (60), (62), в случае $\ell = 1$, получаем (10). На этом доказательство теоремы закончено.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ян Мозер: Об одной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 31-43.

[2] Ян Мозер: Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 45-51.

[3] Ян Мозер: О законе Грама в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 32 (1977), 107-113.

[4] Титчмарш,Е.К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

[5] Titchmarsh,E.C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (IV), Quart. J. Math. 5 (1934), 98-105.

Адрес автора: Ján Moser, Katedra matematickej analýzy, PFUK,
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Поступило: 12. 9. 1977

R E S U M E

O JEDNOM AUTOKORELAČNOM SÚČTE V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

Nech $Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, $\vartheta(t)=\frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+O\left(\frac{1}{t}\right)$ a $\{t_\nu\}$ označuje postupnosť definovanú vzťahom $\vartheta(t)=\pi\nu$ (ν je prirodzené číslo). V tejto práci je dokázaná nasledovná veta:

$$\sum_{T\leq t_\nu\leq T+H} Z(t_\nu)Z(t_\nu+\tau)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\tau\ln\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\right)}{\tau\ln\sqrt{\frac{T}{2\pi}}}H\ln^2\frac{T}{2\pi}+$$

$$+O(\sqrt{T}\ln^2 T),$$

kde

$$\tau=O\left(\frac{1}{\ln T}\right),\quad \tau\neq 0,\quad H\leq\sqrt{T}\ln T .$$

S U M M A R Y

ON AN AUTOCORRELATIVE SUM IN THE THEORY OF THE RIEMANN ZETA - FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

Let $Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, $\vartheta(t)=\frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+O\left(\frac{1}{t}\right)$ and $\{t_\nu\}$ denotes the sequence defined by relation $\vartheta(t)=\pi\nu$ (ν is a positive integer). In this paper the following theorem is proved

$$\sum_{T\leq t_\nu\leq T+H} Z(t_\nu)Z(t_\nu+\tau)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\tau\ln\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\right)}{\tau\ln\sqrt{\frac{T}{2\pi}}}H\ln^2\frac{T}{2\pi}+$$

$$+O(\sqrt{T}\ln^2 T),$$

where

$$\tau=O\left(\frac{1}{\ln T}\right),\quad \tau\neq 0,\quad H\leq\sqrt{T}\ln T.$$

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XXXVII - 1980

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ КАСАЮЩИЕСЯ ИНТЕГРАЛА ПО ПОЛУАДДИТИВНОЙ МЕРЕ

ЙОЗЕФ КАЛАС, Братислава

В настоящей работе мы будем заниматься предельными теоремами касающимися интеграла по полуаддитивной мере, который определил в своей работе [1] А. А. Гольдберг. Сначала мы введем в соответствии с [1] определение интеграла от неотрицательной функции по полуаддитивной мере и некоторые его свойства.

Пусть X основное множество, $\mathcal{S}$ алгебра подмножеств множества X и μ полуаддитивная мера определенная на $\mathcal{S}$, т.е.

1/ если $A \in \mathcal{S}$, то $0 \leqq \mu(A) < \infty$ и $\mu(\emptyset) = 0$,

2/ если $A, B \in \mathcal{S}$, то $\mu(A \cup B) \leqq \mu(A) + \mu(B)$,

3/ если $A, B \in \mathcal{S}$ и $A \subset B$, то $\mu(A) \leqq \mu(B)$

Обозначим через Y пространство всех неотрицательных ограниченных функций, определенных на множестве X. А.А. Гольдберг определил интеграл от неотрицательной ограниченной функции f следующим образом:

$$\int f \, d\mu = \inf_{\mathcal{T}} \sup_{P(T)} \sum_{k=1}^{n} M_k . t_k \qquad , \text{ где}$$

T - конечное и измеримое разбиение множества X, т.е.

$T = \{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_i \subset \mathcal{S}$, $(i = 1, \ldots, n)$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ если $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$;

$\mathcal{T}$ -система всех конечных и измеримых разбиений множества X;

$P(T) = \{(t_1, \ldots, t_n) \in R_n : t_{i_1} + t_{i_2} + \ldots + t_{i_p} \leqq$

$\leqq \mu(X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_p})$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, $i = 1, \ldots, n\}$;

$M_k = \sup\limits_{X_k} f(x)$, $k = 1, \ldots, n$

В [1] показано (Теорема 2.1), что $\int f\, d\mu = \inf\limits_{\tau} \sup\limits_{P_+(T)} \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot t_k$ где $P_+(T) = P(T) \cap R_n^+$ (R_n-n-мерное евклидово пространство, $R_n^+ = \{(t_1, \ldots, t_n) \in R_n : t_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$).

В дальнейшем нам нужны следующие свойства этого интеграла:

а/ если $f, g \in Y$, to $\int\limits_X (f + g)\, d\mu \leqq \int\limits_X f\, d\mu + \int\limits_X g\, d\mu$

б/ если $f \in Y$, $\int\limits_X f\, d\mu \leqq \sup\limits_X f(x) \cdot \mu(X)$,

с/ если $f, g \in Y$ и $f \leqq g$, то $\int\limits_X f\, d\mu \leqq \int\limits_X g\, d\mu$,

д/ если более того μ аддитивная, то $\int\limits_X f\, d\mu = \inf\limits_{\tau} \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot \mu(X_k)$ ($T = \{X_1, \ldots, X_n\} \in \tau$),

е/ пусть E произвольное множество из $\mathcal{S}$. Обозначим через $\mathcal{S}_E = \{B \in \mathcal{S} : B \subset E\}$. Класс $\mathcal{S}_E$ образует алгебру подмножеств основного множества E. Обозначим через $\mu_E : \mathcal{S}_E \to R^+$, $\mu_E(A) = \mu(A)$ для всех $A \in \mathcal{S}_E$ и $f_E : E \to R$, $f_E(x) = f(x)$ для всех $x \in E$ и τ_E - систему всех конечных и измеримых относительно алгебры $\mathcal{S}_E$ разбиений множества E как основного множества. Тогда для $f \in Y$ можно определить и $\int\limits_X f\, d\mu$ и $\int\limits_E f_E\, d\mu_E$. Если $f \in Y$ и $f(x) = 0$ для всех $x \in E^c$, то $\int\limits_X f\, d\mu = \int\limits_E f_E\, d\mu_E$.

<u>Замечание.</u> Обозначением $f_n \nearrow f$ ($f_n \searrow f$) мы в дальнейшем будем понимать следующее: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, возрастающая (убывающая) последовательность и для всех точек x справедливо, что $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

А.А. Гольдберг строит в [1] интеграл по полуаддитивной мере у которой он не предполагает непрерывность сверху в $\emptyset$ (если $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывающая последовательность измеримых множеств и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(E_n) = 0$). Первый вопрос, на который мы хотим ответить есть: сходится этот интеграл сверху к 0 (значит, верно-ли вытекание $f_n \searrow 0 \Longrightarrow \int_X f_n \, d\mu \searrow 0$) для всякой полуаддитивной меры, необъязательно непрерывной сверху в 0 ? Следующий пример дает на это отрицательный ответ.

П р и м е р 1. Пусть $X = R$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}$ (σ -алгебра борелевских множеств) и полуаддитивную меру μ мы определим на $\mathcal{S}$ следующим образом:

$\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(E) = 1$ если $E \neq \emptyset$. Положим $f_n = \chi_{E_n}$, $E_n = (n, \infty)$. Очевидно, $f_n \searrow 0$ и более того f_n измеримые функции относительно σ -алгебры $\mathcal{S}$. Пусть $T = \{X_1, \ldots, X\}$ произвольное измеримое разбиение числовой прямой и пусть n произвольное, но фунсированное натуральное число. Так как T является разбиением числовой прямой, существует $X_{k_0} \in T$ так, что $X_{k_0} \cap E_n \neq \emptyset$. Из определения множества $P(T)$ следует, что n-мерный вектор, который имеет на k_0-том месте единицу и на всех остальных нули принадлежит в $P(T)$. Тогда $\sup\limits_{P(T)} \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot t_k \geq M_{k_0} \cdot 1 = 1$, где $M_k = \sup\limits_{X_k} \chi_E(x)$. Так как $T \in \mathcal{T}$ было произвольное, мы получаем, что $\int_X f_n \, d\mu =$

$= \inf\limits_{\mathcal{T}} \sup\limits_{P(T)} \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot t_k \geq 1$ для всех $n \in N$, значит $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \neq 0$.

З а м е ч а н и е. Система $\mathcal{S}$ в этом примере образовала σ -алгебру и функции f_n были измеримыми. Значит, для того чтобы интеграл сходился сверху в 0, нам надо больше требовать от функции множества μ .

О п р е д е л е н и е. Функция f называется слабо измеримая относительно алгебры $\mathcal{S}$, если $\{x: f(x) < c\} \in \mathcal{S}$, для произвольного числа $c \in R$.

Т е о р е м а 1. Пусть $\mathcal{S}$ алгебра подмножеств множества X, μ полуаддитивная мера на $\mathcal{S}$ непрерывная сверху в $\emptyset$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность неотрицательных ограниченных функций определенных на X, слабо измеримых относительно $\mathcal{S}$ и таких, что $f_n \searrow 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = 0$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Обозначим через $E_n = \{x: f_n(x) \geqq \varepsilon'\}$, $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}$ и пусть $M_1 = \sup\limits_X f_1(x)$. Из предложения $f_n \searrow 0$ следует, что $E_n \supset E_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Из слабой измеримости функций f_n следует, что E_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Затем из непрерывности сверху функции множества в $\emptyset$ мы получим, что существует $n_0 \in N$ так, что $\mu(E_n) < \frac{\varepsilon}{2M_1}$ для всех $n \geqq n_0$. Из свойств интеграла вытекает для всех $n \geqq n_0$, что $\int\limits_X f_n \, d\mu \leqq \int\limits_{E_n} f_n \cdot \chi_{E_n} \, d\mu + \int\limits_{E_n} f_n \cdot \chi_{E_n^c} \, d\mu \leqq M_1 \cdot \mu(E_n) + \varepsilon' \cdot \mu(X)$, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu = 0$.

Мы покажем опять на примере, что условие слабой измеримости функций нельзя выпустить.

<u>Пример 2.</u> Пусть $X = (a,b\rangle$, $b - a > 1$, $\mathcal{S} = \{E \subset X: E$-счетное или E^c-счетное$\}$, μ-мера Лебега рассуждаемая на σ-алгебре $\mathcal{S}$. Если мы положим $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{(a,b-\frac{1}{n})}(x) + \chi_{\langle b-\frac{1}{n},b)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $f_n \searrow 0$ и f_n не обладают свойством слабой измеримости. Пусть $T = \{X_1, \ldots, X\} \in \mathcal{T}$. Ввиду определения σ-алгебры $\mathcal{S}$, существует только одно такое множество $X_{k_0} \in T$, что X_{k_0} не счетное и $X_{k_0} \cap \langle b - \frac{1}{n}, b) \neq \emptyset$. Затем если мы опять обозначим $M_k = \sup\limits_{X_k} f_n(x)$, мы получим ($\mu$ аддитивная), что $\sup\limits_{P(T)} \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot t_k = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot \mu(X_k) \geqq M_{k_0} \cdot \mu(X_{k_0}) = b - a$. Значит, $\int\limits_X f_n \, d\mu \geqq b - a$ для всех $n \in N$ и следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu \geqq b - a > 1$.

<u>Теорема 2.</u> Обозначим через $\mathcal{S}$ σ-алгебру подмножеств множества X, пусть μ полуаддитивная мера на $\mathcal{S}$ непрерывная сверху в $\emptyset$ и пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывающая последовательность неотрицательных ограниченных и измеримых функций определенных на X. Пусть функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ограниченная. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu = \int\limits_X f \, d\mu$.

Доказательство. Обозначим через $g_n = f - f_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Из условий теоремы следует, что $g_n \searrow 0$, g_n $(n = 1, 2, \ldots)$ неотрицательные ограниченные и измеримые функции. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X g_n\, d\mu = 0$ (Теорема 1). Из монотонности и полуаддитивности интеграла мы получим, что

$$\int\limits_X f_n\, d\mu \leqq \int\limits_X f\, d\mu = \int\limits_X (f_n + (f - f_n))\, d\mu \leqq \int\limits_X f_n\, d\mu + \int\limits_X (f-f_n) d\mu .$$

Если $n \to \infty$, то из этих неравенств следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu =$ $= \int\limits_X f d\mu$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{S}$ σ-алгебра подмножеств множества X, μ полуаддитивная мера на $\mathcal{S}$ непрерывная сверху в $\emptyset$ и пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастающая последовательность неотрицательных ограниченных и измеримых функций определенных на X. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu$, где $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для каждого $x \in X$.

Доказательство. Из предположений теоремы следует, что $g_n = f_n - f$ $(n = 1, 2, \ldots)$ последовательность функций с следующими свойствами : $g_n \searrow 0$, g_n $(n = 1, 2, \ldots)$ неотрицательные ограниченные и измеримые. Ввиду теоремы 1, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X (f_n - f)\, d\mu = 0$. Тогда если $n \to \infty$ мы получим из неравенцтв $\int\limits_X f_n\, d\mu \geqq \int\limits_X f\, d\mu =$ $= \int\limits_X (f_n - (f_n - f))\, d\mu \geqq \int\limits_X f_n\, d\mu - \int\limits_X (f_n - f) d\mu$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu = \int\limits_X f_n\, d\mu$.

Замечание. Уже знаем, что если система $\mathcal{S}$ образует σ-алгебры, μ полуаддитивная мера на $\mathcal{S}$ непрерывная сверху в $\emptyset$, $f_n \nearrow f$ / f_n измеримые, f_n и $f \in Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$), то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu$.

Мы думаем, что будет опять удобно показать на примере, что вообще ни в этом случае невозможно условие непрерывности сверху функции множества пропустить.

П р и м е р 3. Пусть $X = [0,1)$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}_{[0,1)}$ (σ -алгебра борелевских множеств в $[0,1)$(. Определим на $\mathcal{S}$ функцию множества μ следующим образом:

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{если } \sup\{x : x \in E\} = 1 \\ 0 & \text{если } \sup\{x : x \in E\} < 1 \end{cases}$$

функция множества μ является на $\mathcal{S}$ полуаддитивной мерой, но она не обладает свойством непрерывности сверху в $\emptyset$. Пусть $f_n = \chi_{E_n}$, $E_n = [0,1 - \frac{1}{n})$. Тогда $f_n \nearrow f = \chi_{[0,1)}$ и функции f_n измеримые относительно σ -алгебры $\mathcal{S}$. Для каждого $n \in N$ справедливо : $0 \leqq \int_X f_n \, d\mu = \int_{E_n} \chi_{E_n} d\mu_{E_n} \leqq \mu(E_n) = 0$. Теперь мы будем подсчитывать $\int_X f \, d\mu$. Пусть $T = \{X_1, \dots, X_n\}$ произвольное измеримое (относительно $\mathcal{S}$) разбиение множества X . Тогда существует такое $X_{k_0} \in T$, что $\sup\{x : x \in X_{k_0}\} = 1$, т.е. $\mu(X_{k_0}) = 1$. n -мерный вектор, который имеет на k_0-том месте единицу и на всех остальных нуль принадлежит множеству $P(T)$. Тогда $\sup_{P(T)} \sum_{k=1}^{n} M_k . t_k \geqq 1$ $(M_k = \sup_{X_k} f(x))$. Так как разбиение T было произвольное, то $\int_X f \, d\mu \geqq 1$, т.е. $\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \neq \int_X f \, d\mu$.

Т е о р е м а 4. Пусть на σ -алгебре $\mathcal{S}$ подмножеств основного множества X определенная полуаддитивная мера μ , непрерывная сверху в $\emptyset$. Если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность неотрицательных измеримых функций, равномерно ограниченная на X, то

$$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu \leqq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \leqq \limsup_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \leqq$$

$$\leqq \int_X \limsup_{n \to \infty} f_n \, d\mu .$$

<u>Доказательство.</u> Из предположений теоремы следует, что $\limsup_{n\to\infty} f_n \in y$, $\liminf_{n\to\infty} f_n \in y$. Если мы обозначим через $g_n = \sup_{m\geq n} f_m$ то $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует не возрастающую последовательность неотрицательных ограниченных и измеримых функций и $g_n \searrow \limsup_{n\to\infty} f_n$. Из теоремы 3 и из монотонности интеграла следует, что

$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu$ и $\int_X g_n \, d\mu \geq \int_X f_m \, d\mu$ для всех $m \geq n$. Затем и $\sup_{m\geq n} \int_X f_m \, d\mu \leq \int_X g_n \, d\mu$. Из этих неравенств уже получим, что $\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu$. Если мы обозначим через $h_n = \inf_{m\geq n} f_m$, то $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует не убывающую последовательность неотрицательных ограниченных и измеримых функций, для которой справедливо, что $h_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n$. Затем ввиду теоремы 2 и монотонности интеграла справедливо:

$\lim_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$ и $\int_X h_n \, d\mu \leq \int_X f_m \, d\mu$ для всех $m \geq n$. Значит, $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu \leq$ $\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$. Из первой и второй части доказательства уже следует утверждение теоремы.

<u>Следствие.</u> Если более того последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в каждой точке $x \in X$, то $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu =$ $= \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu$.

<u>Доказательство.</u> Из предположений следует, что $\liminf_{n\to\infty} f_n =$ $= \limsup_{n\to\infty} f_n$. Затем из предходящей теоремы следует, что

$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu$.

Следующее определение заимствованно из работы [2] .

<u>О п р е д е л е н и е .</u> Последовательность измеримых функций f_n ($n = 1, 2, \ldots$) определенных на множестве X, с σ -алгеброй подмножеств $\mathcal{S}$ и полуаддитивной мерой μ определенной на $\mathcal{S}$, сходится к измеримой функции f по полуаддитивной мере μ ($f_n \xrightarrow{\mu} f$), если для произвольного $\varepsilon > 0$ справедливо:
$\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqq \varepsilon\} = 0.$

<u>Т е о р е м а 5.</u> Пусть последовательность f_n ($n = 0,1,2,\ldots$) неотрицательных измеримых функций определенных на X равномерно ограниченная и пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f_o$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$

<u>Доказательство.</u> Пусть $\delta > 0$ произвольное. Обозначим через $E_n = \{x : |f_n(x) - f_o(x)| \geqq \varepsilon\}$, $\varepsilon < \frac{\delta}{2\mu(X)}$. Потому что $f_n \xrightarrow{\mu} f$, существует такое $n_o \in N$, что для $n \geqq n_o$ справедливо: $\mu(E_n) < \frac{\delta}{4c}$ где $f_n(x) \leqq c$ для всех $x \in X$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Затем $\int_X |f_n - f| \, d\mu \leqq \int_X |f_n - f| \chi_{E_n} \, d\mu + \int_X |f_n - f| \chi_{E_n^c} \, d\mu \leqq$
$\leqq 2c\,\mu(E_n) + \varepsilon . \mu(X) < \delta$.

Пусть опять полуаддитивная мера μ определенная на σ -алгебре $\mathcal{S}$ подмножеств основного множества X. Подобно как в [3] можно ввести понятие "почти всюду" относительно полуаддитивной меры (например $f \leqq g$ почти всюду, если существует такое множество $E \in \mathcal{S}$, что $\mu(E) = 0$ и для всех $x \in E^c$ справедливо: $f(x) \leqq g(x)$. В дальнейшем мы обратим внимание на некоторые свойства изучаемого интеграла по полуаддитивной мере относительно этого понятия.

<u>Л е м м а 1.</u> Пусть множество $E \in \mathcal{S}$ и пусть $\mu(E) = 0$. Тогда для произвольной ограниченной функции f справедливо:
$\int_X f . \chi_E \, d\mu = 0.$

Доказательство. Мы обозначим через $M = \sup_X f(x)$. Тогда $0 \leqq \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu = \int_E f_E \, d\mu_E \leqq M \cdot \mu(E)$, т.е. $\int_X f \cdot \chi_E d\mu = 0$.

Лемма 2. Пусть множество $E \in \mathcal{S}$ и пусть $\mu(E) = 0$. Тогда для произвольной неотрицательной ограниченной функции f справедливо: $\int_X f \, d\mu = \int_X f \cdot \chi_{E^c} \, d\mu$.

Доказательство. $\int_X f \, d\mu \leqq \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu + \int_X f \cdot \chi_{E^c} \, d\mu = \int_X f \cdot \chi_{E^c} d\mu$. Но из соотношения $f \geqq f \cdot \chi_{E^c}$ и из монотонности интеграла следует неравенство $\int_X f \, d\mu \geqq \int_X f \cdot \chi_{E^c} \, d\mu$, т.е. $\int_X f \, d\mu = \int_X f \cdot \chi_{E^c} \, d\mu$.

Теорема 6. Если f, g неотрицательные ограниченные и измеримые функции и если $f \leqq g$ почти всюду, то тоже $\int_X f \, d\mu \leqq \int_X g \, d\mu$.

Доказательство. Обозначим через $E = \{ x : f(x) \geqq g(x) \}$. Из предположений теоремы следует, что $\mu(E^c) = 0$. Ввиду предыдущих двух лемм мы получим, что $\int_X f \, d\mu \leqq \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu + \int_X f \cdot \chi_{E^c} \, d\mu = \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu \leqq \int_X g \cdot \chi_E d\mu = \int_X g \, d\mu$.

Теорема 7. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастающая последовательность неотрицательных ограниченных и измеримых функций и пусть $f_n \searrow 0$ почти всюды. Тогда $\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = 0$.

Доказательство. Из предположений теоремы следует, что существует такое множество $E \in \mathcal{S}$, что $\mu(E) = 0$ и $f_n(x) \searrow 0$ для всех $x \in E^c$. Тогда $0 \leqq \int_X f_n \, d\mu \leqq \int_X f_n \chi_E \, d\mu + \int_X f_n \chi_{E^c} \, d\mu = \int_X f_n \chi_{E^c} \, d\mu$. Если $n \to \infty$ мы получим, ввиду теоремы 1, утверждение теоремы.

Т е о р е м а 8. Если не убывающая последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных ограниченных и измеримых функций сходится почти всюду к неотрицательной ограниченной и измеримой функции f, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu$.

Доказательство. Так как $f_n \nearrow f$ почти всюду, существует такое множество $E \in \mathcal{S}$, что $\mu(E) = 0$ и для всех точек $x \in E^c$ справедливо: $f_n(x) \nearrow f(x)$. Тогда $f - f_n \searrow 0$ почти всюду и затем ввиду предшествующей теоремы тоже $\int\limits_X (f - f_n)\, d\mu \searrow 0$. Если $n \to \infty$, то из следующих неравенств, следует утверждение теоремы:

$$\int\limits_X f_n\, d\mu \leqq \int\limits_X f\, d\mu \leqq \int\limits_X (f - f_n)\, d\mu + \int\limits_X f_n\, d\mu .$$

Т е о р е м а 9. Если не возрастающая последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных ограниченных и измеримых функций сходится почти всюду к неотрицательной ограниченной функции f, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu .$$

Доказательство. Так как $f_n \searrow f$ почти всюду, существует такое множество $E \in \mathcal{S}$, что $\mu(E) = 0$ и для всех $x \in E^c$ справедливо: $f_n(x) \searrow f(x)$. Тогда $(f_n - f) \searrow 0$ почти всюду и затем ввиду теоремы 7 $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X (f_n - f)\, d\mu = 0$. Если $n \to \infty$ то мы получим из следующих неравенств утверждение теоремы:

$$\int\limits_X f_n\, d\mu \geqq \int\limits_X f\, d\mu \geqq \int\limits_X f_n\, d\mu - \int\limits_X (f_n - f)\, d\mu .$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Гольдберг, А.А.: Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, Матем. сборник, т. 58 100 ЕЭ

[2] Попов, В.А.: Свойства -интеграла, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-т им. А. И. Герцена, 1972, 541, 155-165.

[3] Хальмош, П.Р.: Теория меры, Москва 1952, (перевод с англ.)

Адрес автора: Jozef Kalas, Katedra numerickej matematiky PFUK,
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Поступило: 19.9.1977

S Ú H R N

LIMITNÉ VETY TÝKAJÚCE SA INTEGRÁLU PODĽA SUBADITÍVNEJ MIERY

JOZEF KALAS, BRATISLAVA

Práca sa zaoberá limitnými vetami, týkajúcich sa integrálu k nezápornej ohraničenej funkcii podľa subaditívnej miery, ktorý zaviedol A. A. Goľdberg v [1] .

S U M M A R Y

THE LIMIT THEOREMS FOR THE INTEGRAL WITH RESPECT TO A SUBADDITIVE MEASURE

JOZEF KALAS, BRATISLAVA

The limit theorems pertinent to the integral from nonnegative bounded functions with respect to the subadditive measure berg in [1] .