UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XXXVII - 1980

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ОДНОЙ ФОРМУЛЫ ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

1.Пусть ([1], 94, 383)

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \qquad \vartheta(t) = \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right). \tag{1}$$

Пусть,дальше, $\{t_\nu\}$ обозначает последовательность значений, удовлетворяющих соотношению

$$\vartheta(t_\nu) = \pi\nu, \tag{2}$$

где ν – целое положительное.

Как известно ([1], 142) имеет место следующая формула Харди-Литтлвуда

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt =$$

$$= T\ln T + (2c-1-\ln 2\pi)T + O(\sqrt{T}\ln T), \tag{3}$$

где C – постоянная Эйлера (для наших целей достаточно использовать оценку Ингама остаточного члена). Так как при $0 < H < T$

$$\ln(T+H) = \ln T + \frac{H}{T} + O\left(\frac{H^2}{T^2}\right),$$

т.е.

$$(T+H)\ln(T+H) - T\ln T = H\ln T + H + o(1), \tag{4}$$

то из (3), в силу (1), (4)

$$\int\limits_{T}^{T+H} Z^2(t)\,dt = H\ln\frac{T}{2\pi} + 2cH + O(\sqrt{T}\ln T). \qquad (5)$$

В этой работе покажем, что имеет место

<u>Теорема 1.</u>

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+H} Z^2(t_\nu) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}H\ln^2\frac{T}{2\pi} + \frac{c}{\pi}H\ln\frac{T}{2\pi} + O(\sqrt{T}\ln^2 T), \qquad (6)$$

где

$$H = O(\sqrt{T}\ln^2 T). \qquad (7)$$

<u>Примечание 1.</u> Соотношение (6) является асимптотическим при соблюдении условия

$$\sqrt{T}\ln T = o(H). \qquad (8)$$

Покажем что существует тесная связь между соотношениями (5), (6). Так как при $t_\nu \in \langle T, T+H\rangle$, (см. [4], (42))

$$t_{\nu+1} - t_\nu = \frac{2\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right), \qquad (9)$$

дальше, ([5], (23))

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+H} 1 = \frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{H^2}{T}\right), \qquad (10)$$

и, наконец, ([1], 109)

$$|Z(t)| = \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| < A\,t^{1/6}\ln t, \qquad (11)$$

то, из (6), в силу (9), (10), (11) получается

<u>Следствие 1.</u> (Арифметический аналог формулы (5))

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+H} Z^2(t_\nu)(t_{\nu+1}-t_\nu) =$$

$$= H \ln \frac{T}{2\pi} + 2cH + O(\sqrt{T}\ln T). \tag{12}$$

Из (5), (12) немедленно получается

<u>Следствие 2.</u>

$$\frac{1}{H}\left(\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} Z^2(t_\nu)(t_{\nu+1}-t_\nu) - \int_T^{T+H} Z^2(t)dt \right) =$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{T}\ln T}{H} \right). \tag{13}$$

<u>Примечание 2.</u> В соотношении (13) мы имеем

$$\frac{\sqrt{T}\ln T}{H} = o(1), \tag{14}$$

в случае (8).

<u>Примечание 3.</u> Приближение функции $Z(t)$ (см. соотношение (5)) соответствующей ступенчатой линией (см. соотношение (12)), в силу (13) не оказывает влияние на главные члены правой стороны соотношения (5).

В следующих частях работы помещено доказательство теоремы 1.

2. Напомним ([1], 261), что имеет место

$$Z(t_\nu) = 2(-1)^\nu \sum_{m \leqq \sqrt{\frac{t_\nu}{2\pi}}} \frac{\cos(t_\nu \ln m)}{\sqrt{m}} + O(t_\nu^{-1/4}). \tag{15}$$

Так как, в силу (7),

$$\sqrt{\frac{T+H}{2\pi}} - \sqrt{\frac{T}{2\pi}} = O\left(\frac{H}{\sqrt{T}}\right) = O(\ln^2 T), \tag{16}$$

то

$$\sum_{\sqrt{\frac{T}{2\pi}} \leqq m \leqq \sqrt{\frac{T+H}{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{m}} = O(T^{-1/4}\ln^2 T), \tag{17}$$

и, следовательно, в случае $t_\nu \in \langle T, T+H \rangle$,

$$Z(t_\nu) = 2(-1)^\nu \sum_{m < \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{\cos(t_\nu \ln m)}{\sqrt{m}} + O(T^{-1/4} \ln^2 T). \quad (18)$$

Теперь, из (18), в силу (11),

$$\sum_{m < \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{\cos(t_\nu \ln m)}{\sqrt{m}} = O(T^{1/6} \ln T). \quad (19)$$

Дальше, из (18), в силу (19),

$$Z^2(t_\nu) = 4 \sum_{m,n < \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \sum \frac{\cos(t_\nu \ln m)\cos(t_\nu \ln n)}{\sqrt{mn}} +$$

$$+ O(T^{-1/12} \ln^3 T). \quad (20)$$

Еще напомним что из (10), в силу (7),

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} 1 = O(\sqrt{T} \ln^3 T). \quad (21)$$

Наконец, из (20), в силу (21),

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} Z^2(t_\nu) =$$

$$= 4 \sum_{m,n < \sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} \cos(t_\nu \ln m)\cos(t_\nu \ln n) +$$

$$+ O(T^{5/12} \ln^6 T) = S + O(T^{5/12} \ln^6 T). \quad (22)$$

3. Положим

$$S = S(m=n) + S(m \neq n),$$

где

$$S(m=n) = 4 \sum_{n<\sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{1}{n} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} \cos^2(t_\nu \ln n) =$$

$$= 2 \sum_{n<\sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{1}{n} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} \{1 + \cos(2 t_\nu \ln n)\} =$$

$$= 2 \sum_{2 \leqq n<\sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{1}{n} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} 1 + 2 \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} 1 +$$

$$+ 2 \sum_{2 \leqq n<\sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{1}{n} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} \cos(2 t_\nu \ln n) =$$

$$= S_1 + S_2 + S_3, \tag{24}$$

$$S(m \neq n) =$$

$$= 2 \sum_{\substack{m,n<\sqrt{\frac{T}{2\pi}} \\ m \neq n}} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} \cos\{t_\nu \ln(mn)\} +$$

$$+ 2 \sum_{\substack{m,n<\sqrt{\frac{T}{2\pi}} \\ m \neq n}} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} \cos\left(t_\nu \ln \frac{n}{m}\right) =$$

$$= 4 \sum_{m<n<\sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} \cos\{t_\nu \ln(mn)\} +$$

$$+ 4 \sum_{m<n<\sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} \cos\left(t_\nu \ln \frac{n}{m}\right) =$$

$$= S_4 + S_5 . \tag{25}$$

Выражения для сумм S_1, S_2 получаются просто. В силу известной формулы Эйлера

$$\sum_{n<\sqrt{\frac{T}{2\pi}}} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{T}{2\pi} + c - 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right). \tag{26}$$

Теперь, в силу (27), принимая во внимание (7), (10),

$$S_1 = \frac{H}{2\pi} \ln^2 \frac{T}{2\pi} + \frac{(c-1)H}{\pi} \ln \frac{T}{2\pi} + O(\ln^5 T),$$

$$S_2 = \frac{H}{\pi} \ln \frac{T}{2\pi} + O(\ln^4 T),$$

т.е.

$$S_1 + S_2 = \frac{H}{2\pi} \ln^2 \frac{T}{2\pi} + \frac{c}{\pi} H \ln \frac{T}{2\pi} + O(\ln^5 T). \tag{27}$$

Для величин S_3, S_4, S_5, методом ван дер Корпута - Титчмарша ([2], 102 - 105) немедленно получаем

$$|S_3|, |S_4|, |S_5| < A\sqrt{T} \ln^2 T. \tag{28}$$

Наконец, из (22), в силу (23), (24), (25), (27), (28) получаем (6), т.е. теорема 1 доказана.

ДОБАВЛЕНИЕ

(A) Об одном асимптотическом соотношении.

4. В работе [5] мы показали, что при условии

$$|S(a,b)| < A\sqrt{a}\, t^{\Delta}, \quad 0 < \Delta < \frac{1}{4}, \qquad (29)$$

(где $S(a,b)$ – элементарная тригонометрическая сумма) имеет место следующее соотношение ([5], (11))

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H} (-1)^\nu Z(t_\nu) = \frac{1}{\pi} H \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{1/8+\Delta/2} \ln T). \qquad (30)$$

Это соотношение является улучшением, в смысле локализации, соотношения Е.К. Титчмарша ([2], 101)

$$\sum_{\nu=M}^{N} (-1)^\nu Z(t_\nu) = 2N + O(N^{3/4} \ln^{1/4} N), \qquad (31)$$

(где M – постоянная).

Однако, можно существенно (в приведенном ниже смысле) улучшить оценку остаточного члена в соотношении (30). А именно, имеет место

<u>Теорема 2.</u> При условии (29)

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H} (-1)^\nu Z(t_\nu) =$$

$$= \frac{1}{\pi} H \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{\Delta} \ln T). \qquad (31)$$

<u>Примечание 4.</u> Соотношение (31) является асимптотическим при соблюдении условия

$$H = T^{\Delta} \psi(T), \qquad (32)$$

(где $\psi(T)$ – сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция).

Так как при условии (29) имеет место следующая оценка

$$|Z(t)| < A(\Delta)\, t^{\Delta} \ln t, \tag{33}$$

(см. [4], соотношения (14) - (22)), делаем следующее

П р и м е ч а н и е 5. Оценка остаточного члена в соотношении (31) является существенным улучшением оценки данной в соотношении (30), так как, в силу (33), она доведена до оценки общего члена суммы

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H} (-1)^\nu Z(t_\nu).$$

5. Просматривая доказательство соотношения, [5], (11), обратим внимание на соотношение [5], (35),

$$\bar{m} = \left[\sqrt[4]{\frac{T}{2\pi}}\right] \sim \sqrt[4]{\frac{T}{2\pi}}.$$

Для выбора показателя в этом соотношении существует некоторый произвол. Если теперь положим

$$\bar{m} = \left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\Delta}\right] \sim \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\Delta}, \tag{35'}$$

т.е.

$$\ln \bar{m} \sim \Delta \ln \frac{T}{2\pi}, \tag{36'}$$

то получается

$$|S_1| < A(\Delta)\, T^{\Delta/2} \ln T, \tag{41'}$$

и, следовательно, в силу [5], (46), имеет место

Л е м м а 3'.

$$\left|\sum \frac{\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{m}} \sin\varphi\right| < A(\Delta)\, T^{\Delta} \ln T.$$

В силу этой леммы получаем

$$|\tilde{W}(T,H)| < A(\Delta)\, T^{\Delta} \ln T. \tag{51'}$$

Теперь, в силу (51'), из соотношения [5], (26), получаем (31).

(B) О локальных экстремумах функции $Z(t)$.

6. В работе [5] мы показали, что промежуток

$$(T,\ T + T^{1/8+\Delta/2}\psi(T)) \tag{34}$$

содержит нечетный нуль функции $Z(t)$. Однако, существование нечетного нуля функции $Z(t)$ в промежутке (34), не исключает возможность монотонного изменения этой функции в промежутке (34). Следовательно, вопрос о существовании локальных экстремумов функции $Z(t)$ на промежутке (34), не является тривиальным. В этом направлении мы обнаружили, что имеет место

<u>Теорема 3.</u> При условии (29), в промежутке

$$(T,\ T + T^{\Delta}\psi(T)), \tag{35}$$

функция $Z(t)$ достигает локального экстремума.

Так как

$$\left[\frac{T^{1/8+\Delta/2}\psi(T)}{T^{\Delta}\psi(T)}\right] = \left[T^{1/8-\Delta/2}\right] \sim T^{1/8-\Delta/2},$$

то из теоремы 3 получается

<u>Следствие 3.</u> В промежутке (34) функция $Z(t)$ достигает не менее чем

$$A\,T^{1/8-\Delta/2} \tag{36}$$

локальных экстремумов, т.е. функция $Z(t)$ в промежутке (34) имеет колебательный характер.

(C) О расстояниях нечетных нулей функции $\zeta(s)$ на критической прямой.

7. В работе [3], 177 - 184, Харди и Литтлвуд доказали следующую теорему, касающуюся вертикального распределения нулей дзета-функции Римана: для любого $\varepsilon > 0$ существует $T_0(\varepsilon) > 0$, такое,

что отрезок

$$\frac{1}{2}+iT\ ,\ \frac{1}{2}+i(T+T^{1/4+\varepsilon}),$$

при $T \geq T_0(\varepsilon)$, содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$.

Вопрос. Какой результат в этом направлении можно получить, если предположить справедливой гипотезу Римана?

В этом направлении мы получили следующий результат.

Теорема 4. Если справедлива гипотеза Римана, то для любой, сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ функции $\psi(T)$ существует $T_1(\psi)>0$, такое, что отрезок

$$\frac{1}{2}+iT,\ \frac{1}{2}+i(T+\psi(T)),\quad T \geq T_1(\psi), \tag{37}$$

содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$.

Доказательства теорем 3, 4 мы надеемся опубликовать в следующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Титчмарш, Е.К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

[2] Titchmarsh, E.C.: On van der Corput´s method and the zeta-function of Riemann (IV), Quart. J. Math.,5 (1934),98-105.

[3] Hardy,G.H., Littlewood,J.E.: Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, Acta math.,41 (1918),119-196.

[4] Ян Мозер, Об одной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 31-43.

[5] Ян Мозер, Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана,Acta Arith., 31 (1976), 45-51.

[6] Ян Мозер, О законе Грама в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 32 (1977), 107-113.

Адрес автора: Ján Moser, Katedra matematickej analýzy, PFUK,
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Поступило: 17. 5. 1977

R E S U M E

ARITMETICKÝ ANALÓG JEDNÉHO HARDY-LITTLEWOODOVHO VZORCA V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA - FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

Nech $Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, $\vartheta(t) = \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right)$ a $\{t_\nu\}$ označuje postupnosť definovanú vzťahom $\vartheta(t_\nu) = \pi\nu$. V tejto práci je dokázaný vzorec

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} Z^2(t_\nu)(t_{\nu+1} - t_\nu) =$$

$$= H\ln\frac{T}{2\pi} + 2cH + O(\sqrt{T}\ln T),$$

(c - označuje Eulerovu konštantu). Tento vzorec je aritmetickým analógom známeho Hardy-Littlewoodovho vzorca

$$\int_T^{T+H} Z^2(t)\,dt = H\ln\frac{T}{2\pi} + 2cH + O(\sqrt{T}\ln T).$$

S U M M A R Y

ON AN ARITHMETIC ANALOGUE OF ONE HARDY-LITTLEWOOD´S FORMULA IN THE THEORY OF RIEMANN´S ZETA - FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

Let be $Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, $\vartheta(t) = \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right)$ and $\{t_\nu\}$ denotes the sequence defined by the relation $\vartheta(t_\nu) = \pi\nu$. In this paper is proved the formula

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H} Z^2(t_\nu)(t_{\nu+1}-t_\nu) =$$

$$= H \ln \frac{T}{2\pi} + 2cH + O(\sqrt{T} \ln T)$$

(c - denotes Euler's constant). This formula is the arithmetic analogue of the known Hardy-Littlewood's formula

$$\int_T^{T+H} Z^2(t)\,dt = H \ln \frac{T}{2\pi} + 2cH + O(\sqrt{T} \ln T).$$