UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

REMARKS ON THE THEORY OF REAL FUNCTIONS

P. Kostyrko, T. Neubrunn, T. Šalát, J. Smítal, Bratislava

ADDITIVE FUNCTIONS BOUNDED AS FUNCTIONS OF INTERVAL AND UNBOUNDED AS FUNCTIONS OF ELEMENTARY FIGURES

If $k \geq 1$, E_k denotes Euklidean k-dimensional space. The notions additive function of interval, elementary figure, and additive function of elementary figure are used in the same sense as in [1]. Interval means closed non-degenerate interval. Let us remind that an elementary figure is a union of finite number of intervals without common interior points. The symbol $\mathcal{J}$ stands for the set of all intervals in E_k and $\mathcal{R}$ for the set of all elementary figures. Any additive function φ defined on $\mathcal{J}$ may be uniquely extended to an additive function defined on $\mathcal{R}$ ([1] p. 358). If φ is an additive function on $\mathcal{R}$ then φ^+, φ^- are defined on $\mathcal{R}$ as follows: If $R \in \mathcal{R}$

$$\varphi^+ (R) = \sup \{\varphi (S): R \supset S \in \mathcal{R}\}$$

$$\varphi^- (R) = -\inf \{\varphi (S): R \supset S \in \mathcal{R}\}$$

The functions φ^+, φ^- are called upper and lower variations of the function φ, respectively.

An additive function φ may be bounded on $\mathcal{J}$ and unbounded on $\mathcal{R}$.

Lemma 1. For any $k \geq 1$ there exists an additive function φ defined on $\mathcal{R}$ such that φ is bounded on $\mathcal{J}$ and unbounded on $\mathcal{R}$.

Proof. To avoid complicated notion we shall give the proof only for $k = 1$. Define φ on $\mathcal{J}$. If $I \in \mathcal{J}$, $I = \langle a, b \rangle$, then

$$\varphi(I) = \sum_{n_k \in \langle a,b)} (-1)^{n_k+1} n_k^{-1}$$

where the sum is taken over all positive integers belonging to $\langle a, b)$. The additivity of φ is obvious, the boundedness follows from the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-1}$. The function φ is unbounded on $\mathcal{R}$. In fact, if K is any positive number it is sufficient to choose $R = \langle 2^{-1}, 3.2^{-1} \rangle \cup \langle 5.2^{-1}, 7.2^{-1} \rangle \cup \ldots \cup \langle (4n+1)2^{-1}, (4n+3)2^{-1} \rangle$ and if n is sufficiently large we have $\varphi(R) > K$.

Lemma 2. An additive function φ is bounded on $\mathcal{R}$ if and only if φ is of bounded variation.

Proof. If φ is bounded on $\mathcal{R}$ then φ^+, φ^- are bounded on $\mathcal{R}$, hence φ is of bounded variation. If φ is not bounded on $\mathcal{R}$ then at least one of φ^+, φ^- is unbounded on $\mathcal{R}$, hence their sum which is the variation of φ, is unbounded.

Denote by $M(\mathcal{J})$, $M(\mathcal{R})$ the set of additive functions bounded on $\mathcal{J}$, $\mathcal{R}$, respectively. We omit the proof of the following simple lemma.

Lemma 3. If $\varphi \notin M(\mathcal{R})$ and $K \neq 0$ is a real number, then $K\varphi \notin M(\mathcal{R})$. If $\varphi \notin M(\mathcal{R})$ and $\varphi_0 \in M(\mathcal{R})$, then $\varphi + \varphi_0 \notin M(\mathcal{R})$.

A metric ρ may be introduced on $M(\mathcal{J})$ as

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{I \in \mathcal{J}} \{ | \varphi(I) - \psi(I) | \}$$

Since $(M(\mathcal{J}), \rho)$ is the well-known space of bounded real functions which are defined on an index set $\mathcal{J}$, with the supremum metric, the convergence in $M(\mathcal{J})$ means the uniform convergence and the space $M(\mathcal{J})$ is complete.

T h e o r e m 1. $M(\mathcal{R})$ is of first category in $M(\mathcal{J})$.

P r o o f . For n = 1, 2, ... put $M_n = \{\varphi : \varphi \in M(\mathcal{R}), \sup_{R\in\mathcal{R}} \{|\varphi(R)|\} \leq n\}$. We have $M(\mathcal{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. We show that M_n, n = 1, 2, ..., are nowhere dense in $M(\mathcal{J})$.

Let us show at first that M_n is closed. Let $\varphi_i \in M_n$, i = 1, 2,..., and let $\lim_{i\to\infty} \varphi_i = \varphi$. Choose $R\in\mathcal{R}$. We have $R = \bigcup_{j=1}^{s} I_j$ where I_j, j = 1, 2,..., s, are non-overlapping. Since $\lim_{i\to\infty} \varphi_i(I_j) = \varphi(I_j)$, we get

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i(R) = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{s} \varphi_i(I_j) = \sum_{j=1}^{s} \varphi(I_j) = \varphi(R) \leq n$$

Since R is arbitrary, we have $\varphi \in M_n$. Hence M_n, n = 1, 2, ... is closed. Now it is sufficient to prove that the complement of M_n is dense in $M(\mathcal{J})$. Let $\varphi_0 \in M(\mathcal{J})$ and $\varepsilon > 0$. Let $S(\varphi_0, \varepsilon)$ be a sphere with the center φ_0 and radius ε. If $\varphi_0 \notin M_n$ then the existence of an element in $S(\varphi_0, \varepsilon)$ belonging to the complement of M_n is proved. So let $\varphi_0 \in M_n$. Choose $\bar{\varphi}$ such that $\bar{\varphi} \in M(\mathcal{J})$, $\bar{\varphi} \notin M(\mathcal{R})$ (Lemma 1). Let K be a real number such that $|\bar{\varphi}(I)/K| < \varepsilon/2$ for every $I \in \mathcal{J}$. Put $\varphi_1 = \bar{\varphi}/K$. Evidently $\varphi_1 \in M(\mathcal{J})$, but $\varphi_1 \notin M(\mathcal{R})$ (Lemma 3). Moreover, (again by Lemma 3), $\varphi_0 + \varphi_1 \notin M(\mathcal{R})$. Hence $\varphi_0 + \varphi_1 \notin M_n$. Put $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$. Then for any $I \in \mathcal{J}$ $|\varphi(I) - \varphi_0(I)| = |\varphi_1(I)| < \varepsilon/2$. Thus $\sup_{I\in\mathcal{J}} \{|\varphi(I) - \varphi_0(I)|\} < \varepsilon$. So $\varphi \in S(\varphi_0, \varepsilon)$.

C o r o l l a r y 1. The set of all functions φ such that $\varphi \in M(\mathcal{J})$ and $\varphi \notin M(\mathcal{R})$ is a residual set in $M(\mathcal{J})$.

P r o o f . It follows from Theorem 1 and from the fact that $M(\mathcal{J})$ is a complete space.

C o r o l l a r y 2. The set of all additive functions φ

which are bounded but of unbounded variation is a residual set in $M(\mathcal{J})$.

P r o o f . It follows from Corollary 1 and Lemma 2.

A REMARK TO AN ADDITIVE SET FUNCTION

In the next text we shall deal with an example of the monograph [1] (p. 376, ex. 20). An additive set function defined on the smallest set algebra $\mathcal{K}$, which contains all left closed and right open intervals in $\langle a, b\rangle$ ($a, b \in E_1$), will be investigated. Obviously the algebra $\mathcal{K}$ will be the class of all finite unions of sets of the form $\langle c, d)$, $\langle c, b\rangle$ ($a \leq c < d \leq b$), and of the set $\{b\}$. We shall deal with an additive function ϑ_φ defined on $\mathcal{K}$, generated by a real function $\varphi : \langle a, b\rangle \to E_1$ such that $\vartheta_\varphi(\langle c, d)) = \varphi(d) - \varphi(c)$, $\vartheta_\varphi(\langle c, b\rangle) = \varphi(b) - \varphi(c)$ and $\vartheta_\varphi(\{b\}) = 0$.

In the mentioned example a sufficient condition is given warranting that the function ϑ_φ is not σ-additive (φ continuous, φ is not a function of finite variation on $\langle a, b\rangle$). This condition is not true. It is shown in the following example.

E x a m p l e . Let $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$ and $\varphi(x) = x\sin x^{-1}$ for $x \in (0, 1)$, $\varphi(0) = 0$. The function φ is continuous on $\langle 0, 1\rangle$ and it is not a function of finite variation on $\langle 0, 1\rangle$ (see [2], p. 161). But φ is σ-additive on $\mathcal{K}$.

Let $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{K}$. Let $B_j \cap B_k = \emptyset$ for $j \neq k$ and let $c > 0$ exists such that $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subset \langle c, 1\rangle$. Suppose $B_j = \langle c_j, d_j)$ ($j = 1, 2, \ldots$). The continuous function φ is of finite variation on $\langle c, 1\rangle$, hence it can be expressed as the difference of two continuous nondecreasing functions, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. But $\vartheta_{\varphi_i}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta_{\varphi_i}(B_j)$

holds for nondecreasing function φ_i $(i = 1, 2)$. This can be verified e.g. by the method used in monograph [3], p. 35. Consequently, using the equality $\vartheta_\varphi = \vartheta_{\varphi_1} - \vartheta_{\varphi_2}$, it follows $\sum_{j=1}^{\infty} \vartheta_\varphi (B_j) = \vartheta_\varphi(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j)$.

Let $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{K}$, and let $B_j \cap B_k = \emptyset$ for $j \neq k$. It can be supposed that sets $B_j \in \mathcal{K}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ are connected with respect to the usual topology. Let j_0 and j_1 be indices of sets B_j with the property $0 \in B_{j_0}$, $1 \in B_{j_1}$ (if sets with these properties are in the sum). If $B = \bigcup \{B_j : j = \{1, 2, \ldots\} - \{j_0, j_1\}\} \in \mathcal{K}$, then the equalities $\vartheta_\varphi(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \vartheta_\varphi (B_{j_0}) + \vartheta_\varphi (B_{j_1}) + \vartheta_\varphi (B) = \vartheta_\varphi (B_{j_0}) + \vartheta_\varphi (B_{j_1}) + \sum \{\vartheta_\varphi (B_j) : j \in \{1, 2, \ldots\} - \{j_0, j_1\}\} = \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta_\varphi (B_j)$ hold according to the proved facts.

Further a sufficient condition to the non-σ-additivity of the function ϑ_φ will be given.

T h e o r e m 2. Let $\mathcal{K}$ be an algebra and ϑ_φ be a function of the introduced meaning. Let $x \in (a, b\rangle$ be a point in which the function φ is continuous on the left and let φ be the function of non-finite variation on each interval $\langle x', x\rangle$ $(\subset \langle a, b\rangle)$. Then ϑ_φ is not σ-additive.

R e m a r k. The above mentioned Example shows that properties of the function φ in Theorem 2 are essential to the non-σ-additivity of ϑ_φ.

P r o o f of Theorem 2. From assumptions of Theorem 2 it follows the existence of a sequence $\{x_n\}_1^{\infty}$, $x_n < x_{n+1}$, $x_n \to x$ - such that $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)| = +\infty$. Hence the series $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_\varphi (B_n)$ $(B_n = \langle x_n, x_{n+1}))$ is not absolutely convergent and if τ is a suitable permutation of the set of positive integers then $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_\varphi (B_{\tau(n)}) \neq \vartheta_\varphi (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\tau(n)})$.

TWO NOTES ON THE ALMOST UNIFORM CONVERGENCE

Let X be a metric space and denote by C(X) the set of all continuous real-valued functions on X. It is well known that the almost uniform convergence in C(X) is metrisable provided X is a separable locally compact metric space (see e.g. [1], p. 158). We show that each of the two properties is substantial.

T h e o r e m 3. Let (X, ρ) be a non-separable metric space. Then the almost uniform convergence in C(X) is not metrisable.

P r o o f. Let $D \subset X$ be an uncountable set such that for a suitable $\varepsilon > 0$ there is $\rho(x, y) > \varepsilon$ for all $x, y \in D$, $x \neq y$. Let F be the system of all real-valued functions defined on D. To each $f \in F$ assigne a function $f^* \in C(X)$ defined as follows: Let $f^*(x) = \overset{*}{f}(a) \cdot \mathrm{dist}(x, X - S(a, \varepsilon))$ if $x \in S(a, \varepsilon)$ for some $a \in D$, and let $f(x) = 0$ for $x \notin S(D, \varepsilon)$ (here $S(a, \varepsilon)$, or $S(A, \varepsilon)$ denote as usually the open ε-neighbourhood of the point a, or of the set A, respectively). Put $F^* = \{f^* : f \in F\}$. Clearly the mapping $f \mapsto f^*$ between F and F^* is one-to-one, and a sequence $\{f_n\}_1^\infty$ from F converges pointwise to a function f if and only if the sequence $\{f_n^*\}_1^\infty$ converges alomost uniformly to f^*. This follows from the fact, that for every compact $A \subset X$ there is only finite number of points a from D with the property $A \cap S(a, \varepsilon) \neq \emptyset$. But the pointwise convergence in F is non-metrisable, since the corresponding convergence topology is the product topology for $\prod_{D} E_1$, which does not satisfy the first axiom of countability if D is uncountable (see [7], p. 92), q.e.d.

The following theorem shows that the local compactnes of X cannot be omitted.

T h e o r e m 4. There is a separable metric space X such that the almost uniform convergence is not metrisable even in the space $C^*(X)$ of all bounded continuous real-valued functions on X.

P r o o f . Let X be the set of all irrational numbers between 0 and 1, with the usual topology. Let $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of all rational numbers from the open interval (0, 1). For every positive integers m, n define a function $f_{m,n} : X \to E_1$ as follows: $f_{m,n}(x) = 0$ if $x > s_m$, and $f_{m,n}(x) = (1 + x - s_m)^n$ if $x < s_m$. Each $f_{m,n}$ is clearly continuous and bounded, and for each m

$$\lim_{n\to\infty} f_{m,n}(x) = 0 \text{ almost uniformly} \qquad (*)$$

Assume that is a metric ρ on $C^*(X)$ such that for every f, $f_n \in C^*(X)$, $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$ if and only if the sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges almost uniformly to f. From (*) it follows that for each m there is some n(m) such that $\rho(f_{m,n(m)}, 0) < m^{-1}$ whenever $n \geq n(m)$. This means that $\lim_{m\to\infty} f_{m,n(m)}(x) = 0$ almost uniformly in X.

A contradiction arises when we find a sequence $g_k = f_{m(k),n(m(k))}$, k = 1, 2, ..., and a point $y \in X$ such that $g_k(y) \geq 2^{-1}$ for every k. Put m(1) = 1 and choose $y_1 \in X$ such that $y_1 < s_1$ and such that $g_1(t) \geq 2^{-1}$ for each $t \in (y_1, s_1)$. Assume by induction that we have defined m(k) and $y_k \in X$ such that $y_k < s_{m(k)}$ and $g_k(y_k) \geq 2^{-1}$. Let m(k + 1) be the least integer with the property that $s_{m(k+1)} \in (y_k, s_{m(k)})$. Choose $y_{k+1} \in (y_k, s_{m(k+1)}) \cap X$ such that $g_{k+1}(t) \geq 2^{-1}$ for $t \in (y_{k+1}, s_{m(k+1)}) \cap X$. It is easy to verify that $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ is an increasing bounded sequence. Let y be its limit. Since for each positive integer k, $s_k \notin (y_{k+1}, s_{m(k+1)})$, we have $y \in X$, and $g_k(y) \geq 2^{-1}$ for each k, q.e.d.

In connection with the two above quoted theorems the following open problem arises:

P r o b l e m 1. Let X be a separable metric space such that the almost uniform in C(X) (or in $C^*(X)$) is metrisable. Must be X necessarily locally compact?

ON SETS OF POINTS OF SYMMETRIC DISCONTINUITY

Let $C_f^{(s)}$ be the set of all points of symmetric continuity of a function $f: E_1 \to E_1$ and let $D_f^{(s)} = E_1 - C_f^{(s)}$. S. Marcus has shown (see [4]) that for each F_σ set $A \subset E_1$ there exists a function $f: E_1 \to E_1$ such that $D_f^{(s)} = A$.

In the next text it will be shown that the set $D_f^{(s)}$ can be Lebesgue non-measurable. Let T be a Lebesgue non-measurable subfield of the field E_1. The existence of T is proved in [5].

Theorem 5. Let χ_T be the characteristic function of the field T. Then $C^{(s)}_{\chi_T} = T$.

Proof. Let $x_0 \in T$. If $x_0 + h \in T$, then $h \in T$ and also $x_0 - h \in T$. Hence $\chi_T(x_0 + h) - \chi_T(x_0 - h) = 0$. If $x_0 + h \notin T$, then $h \notin T$ and also $x_0 - h \notin T$. Again $\chi_T(x_0 + h) - \chi_T(x_0 - h) = 0$. Consequently $\lim_{h \to 0} (\chi_T(x_0 + h) - \chi_T(x_0 - h)) = 0$, $x_0 \in C^{(s)}_{\chi_T}$.

Let $x_0 \notin T$ and $\delta > 0$. Let r be a rational number such that $0 < r - x_0 < \delta$. Put $h = r - x_0$. Then $x_0 + h = r \in T$, $\chi_T(x_0 + h) = 1$. Since $x_0 - h = x_0 - (r - x_0) = 2x_0 - r \notin T$ we have $\chi_T(x_0 - h) = 0$. Consequently $\limsup_{h \to 0} |\chi_T(x_0 + h) - \chi_T(x_0 - h)| = 1$, $C^{(s)}_{\chi_T} \subset T$, and Theorem 5 is proved.

ON CLASSES OF FUNCTIONS DETERMINED BY DENSE SETS

Let us raise a problem in the connection with the paper [6]. It is proved in this paper that the class F of all functions $f: \langle 0, 1 \rangle \to E_1$, which are uniform limits of approximately derivable functions, is determined by dense sets.

Theorem 6. Let $\mathcal{S}$ be the family of all classes $S (S \subset E_1^{\langle 0,1 \rangle})$ of functions determined by dense sets. Then the family $\mathcal{S}$ partially ordered by the inclusion has a maximal member.

P r o b l e m 2. Is the class F defined in the paper [6] maximal ?

P r o o f of Theorem 6. We show that for each chain $\mathcal{S}^*$ in $\mathcal{S}$ there is a member of $\mathcal{S}$ which contains every member of the chain $\mathcal{S}^*$. Let $S^* = \cup \{S : S \in \mathcal{S}^*\}$. We prove $S^* \in \mathcal{S}$. Let $f_1, f_2 \in S^*$ and let $f_1(x) = f_2(x)$ hold for $x \in D$ (D - dense set in $\langle 0, 1 \rangle$). Obviously $f_1 \in S_1$, $f_2 \in S_2$, where $S_1, S_2 \in \mathcal{S}^*$. Without loss of generality we can suppose $S_1 \subset S_2$, i.e. $f_1, f_2 \in S_2$. Since S_2 is a class determined by dense sets $f_1(x) = f_2(x)$ holds for each $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

A REMARK ON FOURIER SERIES

In the monograph [9] (p. 197) the following result is contained:

(A) If the sequence of arithmetic means of the partial sums of the trigonometric series

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

converges uniformly, then the series (1) is a Fourier series of a certain continuous periodic function.

In connection with the result (A) we prove the following:

T h e o r e m 7. Denote by $s_n(x)$ the n-th partial sum of the trigonometric series (1). Let us suppose that there exists a function $h: E_1 \to E_1$, which is Lebesgue integrable on $\langle 0, 2\pi \rangle$ and such that for each $x \in E_1$

$$|s_n(x)| \leq h(x) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

holds .

Let the series (1) be summable by a regular matrix $A = (a_{nk})$

(for each $x \in E_1$) to a (finite) number ($= g(x)$). Then the function g is periodic (with the period 2π), Lebesgue integrable on $\langle 0, 2\pi \rangle$ and the series (1) is the Fourier series of the function g.

P r o o f . According to the assumption each of the series

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k(x) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

converges (for each $x \in E_1$) and $\lim_{n \to \infty} t_n(x) = g(x)$ (for each $x \in E_1$).

On account of the regularity of the matrix A there exists a $K > 0$ such that for each $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq K \tag{4}$$

holds ([8], p. 8).

We get from (2) - (4) (for each $x \in E_1$) $|t_n(x)| \leq Kh(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ and from this by $n \to \infty$

$$|g(x)| \leq Kh(x) \tag{5}$$

The function g is evidently periodic (with the period 2π), measurable and (beacause of (5)) Lebesgue integrable on $\langle 0, 2\pi \rangle$.

We shall show that

$$I = \int_0^{2\pi} g(x) \cos \ell x \, dx = \pi a_\ell \quad (\ell = 0, 1, \ldots) \tag{a}$$

According to the Lebesgue's dominated convergence theorem ([1], p. 295) we get $I = \lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} t_n(x) \cos \ell x \, dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k(x) \cos \ell x) \, dx$. By the repeated application of the mentioned Lebesgue's theorem we get

$$\int_0^{2\pi} (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k(x) \cos \ell x) \, dx = \lim_{m \to \infty} \int_0^{2\pi} (\sum_{k=1}^{m} a_{nk} s_k(x) \cos \ell x) \, dx \tag{6}$$

Let us notice that $\int_0^{2\pi} (\sum_{k=1}^{m} a_{nk} s_k(x) \cos \ell x) \, dx =$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \int_0^{2\pi} s_k(x) \cos \ell x \, dx$$

If $k < \ell$, then $\int_0^{2\pi} s_k(x) \cos \ell x \, dx = 0$. If $k \geq \ell$, then $\int_0^{2\pi} s_k(x) \cos \ell x \, dx = \pi a_\ell$.

Thus for $m \geq \ell$ we have $\int_0^{2\pi} (\sum_{k=1}^{m} a_{nk} s_k(x) \cos \ell x) \, dx = \pi a_\ell \sum_{k=\ell}^{m} a_{nk}$.

Hence according to (6) we get

$$\int_0^{2\pi} (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k(x) \cos \ell x) \, dx = \pi a_\ell \sum_{k=\ell}^{\infty} a_{nk} = \pi a_\ell (A_n - \sum_{k=1}^{\ell-1} a_{nk}),$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \tag{7}$$

But $A_n \to 1$ $(n \to \infty)$ and $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\ell-1} a_{nk} = 0$ according to well-known properties of regular matrices ([8], p. 8).

Now (a) follows at once from (6) and (7).

Analogously it can be proved that

$$\int_0^{2\pi} g(x) \sin \ell x \, dx = \pi b_\ell \quad (\ell = 1, 2, \ldots) \tag{b}$$

The proof is finished.

ON THE CARDINALITY OF REAL FUNCTIONS $F: E_1 \to E_1$ WITH COUNTABLY MANY DISCONTINUITY POINTS

Denote by D_f the set of all discontinuity points of the function $f: E_1 \to E_1$. The cardinality of the set M will be denoted by $\overline{\overline{M}}$.

<u>Theorem 8.</u> Denote by F the class of all functions $f: E_1 \to E_1$ for which D_f is a countable set. Then we have $\overline{\overline{F}} = c$ (c is the power of the continuum).

<u>Proof.</u> Evidently we have $\overline{\overline{F}} \geq c$. Therefore it sufficies to prove that

$$\overline{\overline{F}} \leq c \tag{8}$$

we shall give two proofs of (8).

P r o o f I. Each function from F is in the first Baire ([10], p. 384). Therefore $\overline{\overline{F}}$ does not exceed the cardinality of all Baire functions, hence (8) is true.

P r o o f II. Let $A \subset E_1$ be a countable set. Denote by $F(A)$ the class of all such functions $f: E_1 \to E_1$ for which $D_f = A$. Each function f from $F(A)$ can be expressed in the form

$$f = (f/A) \cup (f/E_1 - A) \tag{9}$$

Obviously $f / A \in E_1^A$ and $f / (E_1 - A) \in C(E_1 - A)$ ($C(M)$ denotes the set of all continuous functions on $M \subset E_1$). Since $\overline{\overline{E_1^A}} \leq c$, $\overline{\overline{C(E_1 - A)}} \leq c$. (cf. [11], p. 75), we get from (9) the inequality

$$\overline{\overline{F(A)}} \leq c \tag{10}$$

Furher we have

$$F = \cup F(A), \tag{11}$$

the union of sets on the right-hand side being taken over all countable subsets A of the set E_1. On account of (10), (11), (cf. [11], p. 177 - 178) we get (8).

R e m a r k . Since the set of discontinuity points of each monotone function $f: E_1 \to E_1$ is countable, it follows from the previous theorem that the class of all monotone functions $f: E_1 \to E_1$ has power of the continuum.

TYPES OF METRIC AND TOPOLOGICAL SPACES OF A GIVEN CARDINALITY

We shall deal with the question if there exist metric or topological spaces of certain type (e.g. second countable spaces, com pact spaces, connected spaces) of arbitrary given cardinality.

In case of some types the situation is very simple. If a is any cardinal number, then it is sufficient to choose a set X the cardinal number of which is a and to define the trivial metric on X. We get a complete metric space of the cardinality a.

It is a well-known fact that the power of any separable metric space is at most c. Thus there are not separable metric spaces of greater cardinality than c. To each cardinal number $a \leq c$ there exists a separable metric space of the cardinality a (arbitrary subspace X of the space E_1 such that $\overline{\overline{X}} = a$ may serve as an example).

There exist second countable topological spaces of arbitrary cardinality. If a is an arbitrary cardinal number, choose a set X such that $\overline{\overline{X}} = a$ and the topology T on X such that $T = \{\emptyset, X\}$. Then (X, T) is a topological second countable space of the cardinality a.

A similar consideration shows that there exist compact or connected topological spaces of arbitrary cardinality.

A question arises if there exist connected metric spaces of arbitrary cardinality. The answer is negative for cardinal numbers a greater than 1 and less than c.

T h e o r e m 9. Let a be a cardinal number, $2 \leq a < c$. Let (X, ρ) be a metric space, $\overline{\overline{X}} = a$. Then X is totally disconnected metric space.

P r o o f . Let $p, q \in X$, $p \neq q$. Put $v = \rho(p, q) > 0$. Since $\overline{\overline{X}} = a < c$, the set H of all numbers $\rho(p, x)$, $x \in X$, has the complement dense in E_1. Thus number δ, $0 < \delta < v$, exists such that $\delta \notin H$. Then $\emptyset \neq S(p, \delta) \subsetneq X$. The set $S(p, \delta)$ is open. We show that it is a closed set, too. Let $y_n \in S(p, \delta)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $y_n \to y \in X$. Then we prove that

$$y \in S(p, \delta) \qquad (12)$$

According to the assumption $\rho(p, y_n) < \delta$ and since ρ is continuous we have $\rho(p, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(p, y_n) \leq \delta$. Since $\delta \notin H$, we have $\rho(p, y) < \delta$. Thus (12) holds and $X = S(p, \delta) \cup (X - S(p, \delta))$ is a decomposition of X into two nonempty open sets with $p \in S(p, \delta)$, $q \in X - S(p, \delta)$. The theorem is proved.

Theorem 10. For arbitrary cardinal number $a \geq c$ exists a connected metric space of the cardinality a.

Proof. Let A be a set of the cardinality a and $I = \langle 0, 1 \rangle$. We show that the set

$$X = \bigcup_{z \in A} \{z\} \times I \tag{13}$$

(identifying all points of the form (z, 0)) provided with a suitable metric has asked properties.

Really, since $a \geq c$, $\overline{\overline{X}} = a \cdot c = a$. The function $\rho((z, x), (z', x')) = |x| + |x'|$ for $z \neq z'$ and $\rho((z, x), (z, x')) = |x - x'|$ is a metric on X.

It follows, from the expression (13), that X is the union of family of connected sets, no two members of which are separated. Hence (see [7], p. 54) X is a connected metric space.

Theorem 11. Every compact metric space is either countable or of the cardinality c.

Proof. If an uncountable metric space is compact then it is a complette separable one. Thus, according to Alexandrov - Hausdorff Theorem (see [12], p. 459), its cardinality is c. On the other hand for any countable cardinal number a or a = c obviously there is a compact subset A of the real line such that $\overline{\overline{A}} = a$.

R e f e r e n c e s

[1] S i k o r s k i, R.: Funkcje rzeczywiste I, Warszawa 1958.

[2] A l e k s a n d r o v, P. S.: Úvod do obecné theorie množin a funkcí, Praha 1954.

[3] H a l m o s, P. R.: Measure theory, New York 1950

[4] M a r c u s, S.: Multimile F_σ si continuitalca simetrica, Buletin Stiintific sectia de stiinte matematice si fizice VII (1955), 871 - 886.

[5] K o r e c, I.: A class of Lebesgue non-measurable subfields of the field of real numbers, Acta fac. rer. nat. Univ. Com. XXXI (1972), 29-32.

[6] N e u g e b a u e r, C. J.: A class of functions determined by dense sets, Arch. Math. XII (1961), 206 - 209.

[7] K e l l e y, J. L.: General topology, New York 1955.

[8] P e t e r s e n, G. M.: Regular Matrix Transformations, New York 1966.

[9] S i k o r s k i, R.: Funkcje rzeczywiste II, Warszawa 1959.

[10] N a t a s o n, I. P.: Teorija funkcij veščestennoj peremennoj, Moskva 1974.

[11] S i e r p i n s k i, W.: Cardinal and ordinal numbers, Warszawa 1958.

[12] K u r a t o w s k i, K.: Topologija I, Moskva 1966.

Author´s address: Pavel Kostyrko, Tibor Šalát, Katedra algebry a teórie čísel PFUK

Tibor Neubrunn, Jaroslav Smítal, Katedra teórie pravdepodobností a matematickej štatistiky

Matematický pavilón - Mlynská dolina

816 31 Bratislava

Received: 2. 11. 1976

S ú h r n

POZNÁMKY O TEÓRII REÁLNYCH FUNKCIÍ

P. Kostyrko, T. Neubrunn, J. Smítal, T. Šalát

Bratislava

V práci sa riešia problémy týkajúce sa viacerých oblastí teórie reálnych funkcií. Napríklad, skúma sa mohutnosť systému všetkých reálnych funkcií reálnej premennej so spočítateľnou množinou bodov nespojitosti; uvádza sa príklad ohraničenej aditívnej funkcie intervalu, ktorá nie je ohraničenou funkciou elementárnej figury; dokazuje sa, že skoro-rovnomerná konvergencia reálnych funkcií definovaných na neseparabilnom metrickom priestore nie je metrizovateľná; poukazuje sa na skutočnosť, že množina všetkých bodov symetrickej nespojitosti reálnej funkcie reálnej premennej môže byť lebesgueovsky nemerateľná.

Р е з ю м е

ЗАМЕТКИ О ТЕОРИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

П. Костырко, Т. Нойбрун, Я. Смитал, Т. Шалат

Братислава

В работе решены некоторые проблемы касающиеся нескольких областей теории вещественных функций. Например, рассматривается мощность системы всех вещественных функций вещественной переменной множество точек разрыва которых счётное; дается пример ограниченной аддитивной функции бруса, которая не является ограниченой функцией конечного объединения брусов; доказано, что почти-равномерная сходимость вещественных функций определённых на несепара-

бельном метрическом пространстве не метризуема; доказано, что множество всех точек симметрической разрывности вещественной переменной может быть не измеримо.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

PRECHOD CHODCOV CEZ CESTU

R a d k o M e s i a r, Bratislava

Model: Po ceste prichádzajú k prechodu a cezeň vozidlá s nejakým rozdelením časových medzier medzi sebou. Po chodníku prichádzajú k prechodu chodci nezávisle od seba a od situácie na ceste, čakajú na časovú medzeru vhodnej dĺžky, počas ktorej prechádzajú cez cestu bez toho, že by vplývali jeden na druhého.

Na prechod potrebuje každý chodec určitý čas, ktorý nazveme kritickým časom. Uvažujme o dvoch prípadoch: a/ kritický čas je pre každého chodca konštanta; b/ kritický čas je pre každého chodca náhodná premenná. V prípade a/ budeme uvažovať o súbore chodcov, ktorí majú rôzne kritické časy. Ich rozdelenie v tomto súbore popisujeme kritickou časovou funkciou p/t/, ktorú definujeme ako distribučnú funkciu kritických časov. V prípade b/ uvažujeme o súbore chodcov s rovnakými náhodnými kritickými časmi popísanými distribučnou funkciou k/t/. Oba tieto prípady sú motivované praxou. Pýtame sa na priemerné zdržanie v jednotlivých prípadoch. Ďalej sa pýtame, aký je vzťah medzi týmito zdržaniami v prípade k/t/ = p/t/. Pri riešení danej úlohy predpokladáme štatistickú rovnováhu celého systému.

A. KONŠTANTNÝ KRITICKÝ ČAS

Nech je rozdelenie časových medzier medzi vozidlami na ceste popísané distribučnou funkciou F/t/. Potom za daných predpokladov podľa [1] má rozdelenie prvej časovej medzery, t.j. času, ktorý uplynie od príchodu ľubovoľného nezávislého chodca k prechodu po príchod prvého vozidla po ňom, hustotu pravdepodobnosti

$$f_o /t/ = \frac{1 - F/t/}{E/t/}$$

kde $E/t/$ je stredná časová medzera medzi vozidlami.
Určíme najprv priemerné zdržanie chodca s konštantným kritickým časom T. Počas prvej medzery neprejde s pravdepodobnosťou $F_o/T/$, takže jeho priemerné zdržanie je

$$w_T = F_o/T/ \; . \; /L_T^o + D_T/$$

kde L_T^o je stredná hodnota prvých časových medzier kratších ako T,

$$L_T^o = \int_0^T t f_o/t/ \, dt \; : \; F_o/T/$$

D_T je priemerné zdržanie uvažovaného chodca za predpokladu, že príde k prechodu zároveň s nejakým vozidlom /za predpokladu štatistickej rovnováhy je to teda priemerné zdržanie rátané od prejazdu ľubovoľného vozidla/. Keďže ďalšie časové medzery medzi vozidlami sú popísané funkciou $F/t/$, máme

$$D_T = F/T/ \; . \; /L_T + D_T/$$

kde L_T je stredná hodnota časových medzier kratších ako T,

$$L_T = \int_0^T t \, dF/t/ \; : \; F/T/$$

Takto sme úplne dokázali nasledujúcu vetu:

V e t a 1. Priemerné zdržanie chodca s konštantným kritickým časom T v uvedenom modele pri rozdelení časových medzier medzi vozidlami na ceste popísanom distribučnou funkciou $F/t/$ je

$$w_t = \int_0^T t \; . \; \frac{1 - F/t/}{E/t/} \, dt + \frac{F_o/T/}{1 - F/T/} \; . \int_0^T t \, dF/t/$$

Uvažujme teraz o skupine chodcov s konštantným kritickým časom, jeho rozdelenie v tejto skupine nech je určené distribučnou funkciou p/t/. Za predpokladu, že prechod cez cestu je pre každého jednotlivca nezávislý na iných chodcoch, dostávame pre priemerné zdržanie tejto skupiny:

V e t a 2. Priemerné zdržanie skupiny chodcov s konštantným kritickým časom popísanej kritickou časovou funkciou p/t/ je

$$w_A = E_p/w_t/ = \int_0^{\infty} w_t \, dp/t/$$

kde w_t je priemerné zdržanie chodca s konštantným kritickým časom t /podľa Vety 1./.

P o z n á m k a. Vo všetkých doterajších prípadoch ako aj ďalej, ak nebude povedané inak, predpokladáme, že pravdepodobnosť prechodu pre uvažovaných chodcov je nenulová /v opačnom prípade by bolo priemerné zdržanie chodcov s nulovou pravdepodobnosťou prechodu triviálne nekonečné/. Veta 1. je sformulovaná aj v [2], ale jej dôkaz je omnoho komplikovanejší.

P r í k l a d y :

1. V literatúre najčastejšie používané rozdelenia časových medzier medzi vozidlami:

a/ pre riedku premávku exponenciálne rozdelenie,

$$f/t/ = \frac{dF/t/}{dt} = q \, . \, \exp/-qt/, \ t > 0$$

kde q je prúd vozidiel, čiže stredná časová hustota, $q = \frac{1}{E/t/}$.

b/ nakoľko prvý prípad pripúšťa aj nulové medzery medzi vozidlami, čo je v praxi nemožné, zavádza sa ako presnejšie pre prípad riedkej premávky posunuté exponenciálne rozdelenie, berúce do úvahy minimálny odstup medzi vozidlami Z,

$$f/t/ = q' . \exp/-q'/t - Z//, \ t > Z$$

kde q je relatívny prúd vozidiel,

$$q' = \frac{1}{E/t/ - Z}$$

c/ v prípade hustejšej premávky časť vozidiel jazdí v "kolóne", t.j. s minimálnym odstupom Z, časť je relatívne voľná. Označme jej podiel a. Pre takýto prípad sa zavádza modifikované exponenciálne rozdelenie

$$f/t/ = /1 - a/ \ . \ \delta_Z/t/ + aq'' \ . \ \exp/-q''/t - Z/ /, \ t \geq Z$$

kde $_Z/t/$ je jednobodové rozdelenie pravdepodobnosti v bode Z, q'' je relatívny prúd voľných vozidiel, $q'' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{E/t/ - Z}$

2. V literatúre najčastejšie uvažované kritické časové funkcie:

/i/ schodová kritická časová funkcia, kde všetci chodci majú rovnaký kritický čas

$$p/t/ = \begin{cases} 0 & t < T \\ 1 & T \leq t \end{cases}$$

/ii/ lichobežníková kritická časová funkcia

$$p/t/ = \begin{cases} 0 & t < T_o \\ \dfrac{t - T_o}{T_1 - T_o} & T_o \leq t \leq T_1 \\ 1 & T_1 < t \end{cases}$$

/iii/ exponenciálna kritická časová funkcia

$$p/t/ = \begin{cases} 0 & t < T \\ 1 - \exp/-b/t - T// & T \leq t \end{cases}$$

3. priemerné zdržanie a/i, t.j. pre exponenciálne rozdelenie časových medzier medzi vozidlami a schodovú kritickú časovú funkciu

$$w_3 = \frac{1}{q} \ . \ /\exp/qT/ - qT - 1/ \ .$$

4. priemerné zdržanie c/iii, t.j. pre modifikované exponenciálne rozdelenie časových medzier medzi vozidlami a exponenciálnu kritickú časovú funkciu za predpokladu , že minimálna medze-

ra Z nestačí žiadnemu chodcovi na prechod, vychádzajúc z literatúry, podľa ktorej je b   q.

$$w_4 = \frac{qZ^2}{2} - /1 - a/ \cdot \frac{qZ}{q} + \frac{1}{q} \cdot$$

$$\cdot\ /\exp/q''/T - Z/\ / \cdot \frac{b}{a/b - q''/} - q/T + \frac{1}{b} - \frac{q}{q''}\ /$$

B. KRITICKÝ ČAS AKO NÁHODNÁ PREMENNÁ

Majme teraz chodca s náhodným kritickým časom s distribučnou funkciou k/t/. Obdobnými úvahami ako v predchádzajúcom prípade dostávame pre priemerné zdržanie tohoto chodca

$$w_B = \int_0^{\infty} F_o/t/ \cdot /D + L_t^o/\ dk/t/$$

kde L_t^o je stredná hodnota prvých časových medzier kratších ako t, D je priemerné zdržanie uvažovaného chodca za predpokladu, že príde ku prechodu zároveň s nejakým vozidlom,

$$D = \int_0^{\infty} F/t/ \cdot /D + L_t/\ dk/t/$$

kde L_t je stredná hodnota časových medzier kratších ako t. Týmto máme určené priemerné zdržanie uvažovaného chodca a zároveň dokázanú ďalšiu vetu:

V e t a 3 . Priemerné zdržanie chodcov zo skupiny s rovnakými náhodnými kritickými časmi popísanými distribučnou funkciou k/t/ v uvedenom modele pri rozdelení časových medzier medzi vozidlami na ceste popísanom distribučnou funkciou F/t/ je

$$w_B = \int_0^{\infty}\int_0^{t} x\ f_o/x/\ dx\ dk/t/ + \int_0^{\infty} F_o/t/\ dk/t/ \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty}\int_0^{t} x\ dF/x/\ dk/t/\ / : /1 - \int_0^{\infty} F/t/\ dk/t/\ /$$

C. POROVNANIE PRIEMERNÝCH ZDRŽANÍ

Uveďme najprv krátky príklad. Majme skupinu chodcov A s konštantnými kritickými časmi popísanú distribučnou funkciou

$$p/t/ = \begin{cases} 0 & t < 4 \text{ sec} \\ 1/2 & 4 \text{ sec} \leq t < 6 \text{ sec} \\ 1 & 6 \text{ sec} \leq t \end{cases}$$

Ďalej majme skupinu chodcov B s rovnakými náhodnými kritickými časmi s distribučnou funkciou $k/t/ \equiv p/t/$.
Nech je na ceste konštantný prúd vozidiel $q = 0,2 \text{ sec}^{-1}$, t.j. vozidlá jazdia v konštantných časových medzerách 5 sec. Za týchto predpokladov je priemerné zdržanie skupiny A nekonečné, lebo jej polovica nikdy neprejde, zatiaľ čo priemerné zdržanie skupiny B je konečné /pozrime sa napr. na D v tomto prípade - chodci prejdú iba prvú medzeru medzi vozidlami s pravdepodobnosťou 1/2, t.j. $D = 1/2 \cdot /5 \text{ sec} + D/$, teda $D = 5$ sec/.
Pýtame sa, či tento vzťah $/w_A \geq w_B/$ medzi priemernými zdržaniami platí aj vo všeobecnosti. Na túto otázku nám dáva odpoveď nasledujúca veta:

V e t a 4 . Majme skupinu chodcov A s konštantnými kritickými časmi popísanú kritickou časovou funkciou p/t/ a skupinu chodcov B s rovnakými náhodnými kritickými časmi s distribučnou funkciou $k/t/ \equiv p/t/$. Potom pre každé rozdelenie časových medzier medzi vozidlami na cesta za predpokladu štatistickej rovnováhy systému pre jednotlivé priemerné zdržania platí

$$w_A \geq w_B$$

D ô k a z . Podľa Vety 2. a 3. vieme určiť priemerné zdržania w_A a w_B. Dokážme najprv dve lemmy.

L e m m a 1. Nech je p/t/ distribučná funkcia, m_p miera ňou indukovaná. Potom pre každú distribučnú funkciu $G/t < 1 /m_p$ s.v./ platí nasledujúci vzťah:

$$1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} /1 - G/t// \, dp/t/ \, . \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - G/t/} \, dp/t/$$

D ô k a z . Tvrdenie lemmy je evidentné ak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - G/t/} \, dp/t/ = \infty$$

V prípade, že uvažovaný integrál je konečný, je tvrdenie dôsledkom Cauchy - Buňjakovského nerovnosti.

L e m m a 2 . Nech je m_p pravdepodobnostná miera, g/t/ nech je m_p kváziintegrovateľná neklesajúca funkcia, pre ktorú platí

$$1 \leq \int_{0}^{\infty} g/t \, dp/t/, \qquad / \, dp/t/ \equiv dm_p/t/$$

Potom pre každú borelovsky merateľnú nezápornú neklesajúcu funkciu h/t/ platí

$$\int_{0}^{\infty} h/t/ \, dp/t/ \leq \int_{0}^{\infty} h/t/ \, g/t/ \, dp/t/$$

D ô k a z . Za predpokladov lemmy je buď g/t/ $\geq$ 1 /m_p s.v./, alebo existuje bod M tak, že g/M - 0/ $\leq$ 1 $\leq$ g/M + 0/. V prvom prípade je dokazovaný vzťah triviálny. Nech teda existuje bod M uvažovaných vlastností, potom

$$0 \leq \int_{0}^{M} /1 - g/t// \, dp/t/ \leq \int_{M}^{\infty} /g/t/ - 1/ \, dp/t/$$

Keďže podľa predpokladov je h/t/ neklesajúca a nezáporná, platí

$$\int_{0}^{M} h/t//1 - g/t// \, dp/t/ \leq \int_{0}^{M} h/M//1 - g/t// \, dp/t/ \leq$$

$$\leq \int_{M}^{\infty} h/M//g/t/ - 1/ \, dp/t/ \leq \int_{M}^{\infty} h/t//g/t/ - 1 \, dp/t/$$

odkiaľ už dostávame požadovaný vzťah.

Vráťme sa teraz k dôkazu Vety 4. Podľa Lemmy 1. máme pre distribučnú funkciu časových medzier medzi vozidlami spĺňajúcu predpoklady tejto lemmy, t.j. $F/t/ < 1$ /m_p s.v./

$$1 \leq \int_0^\infty /1 - F/t// \, dp/t/ \, . \int_0^\infty \frac{1}{1 - F/t/} \, dp/t/$$

Funkcie $g/t/ = \frac{1}{1 - F/t/} \, . \int_0^\infty /1 - F/t// \, dp/t/$ na supporte $dp/t/$

(inak mimo tejto množiny $g/t/$ môžeme vhodne dodefinovať, pripúšťajúc aj nekonečno ako možnú hodnotu), $F_o/t/$ vyhovujú predpokladom Lemmy 2., takže

$$\int_0^\infty F_o/t/ \, dp/t/ \leq \int_0^\infty \frac{F_o/t/}{1 - F/t/} \, dp/t/ \, . \int_0^\infty /1 - F/t// \, dp/t/$$

Obdobne funkcie

$$g_1/t/ = \frac{F_o/t/}{1 - F/t/} \, . \int_0^\infty /1 - F/t// \, dp/t/ \, : \, /\int_0^\infty F_o/t/ \, dp/t/ \, /$$

$h/t/ = \int_0^t x \, dF/x/$ vyhovujú predpokladom Lemmy 2., takže

$$\int_0^\infty \int_0^t x \, dF/x/ \, dp/t/ \leq \int_0^\infty \frac{F_o/t/}{1 - F/t/} \, . \int_0^t x \, dF/x/ \, dp/t/ \, .$$

$$\int_0^\infty /1 - F/t/ \, dp/t/ \, : \, /\int_0^\infty F_o/t/ \, dp/t/ \, /$$

Po úprave nerovnosti a pripočítaní $\int_0^\infty \int_0^t x f_o/x/ \, dx \, dp/t/$ k obom stranám nerovnosti dostávame

$$w_A \geq w_B$$

V prípade, že neplatí $F/t/ < 1$ /m_p s.v./ sme vlastne v situácii, keď časť chodcov skupiny A nikdy neprejde, t.j. w_A je nekonečné.

Vtedy ale dokazovaný vzťah platí triviálne. Tým je dôkaz plne ukončený.

L i t e r a t ú r a

[1] V e n t c e ľ o v á E. S., O v č a r o v L. A.: Teorija verojatnosti. vyd. Nauka, Moskva 1973

[2] H a i g h t F. A.: Matematičeskaja teorija transportnych potokov. ruský preklad, vyd. Mir, Moskva 1966

[3] A s h t o n W. D.: The theory of road traffic flow. Spottiswood, Ballantyne and Co. Ltd., London and Colchster, 1966

Author's address: Radko Mesiar, Katedra numerickej matematiky a
matematickej štatistiky PFUK
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 16. 2. 1976

R e s u m e

THE PASSENGERS ARE CROSSING THE STREET

Radko Mesiar, Bratislava

The vehicles arrive to the cross with distribution function of time gaps F/t/. Passengers arrive independently to the cross and they are waiting for a convenient gap. The mean waiting time of the group A of passengers with constant critical gap described by distribution p/t/ is w_A. The mean waiting time of the group B of passengers with the same random critical time gap with distri-

bution function k/t/ is w_B. In the occasion $p/t/ \equiv k/t/$ there is always $w_A \geqslant w_B$.

Р е з ю м е

ПЕШЕХОДЫ ПРОХОДЯТ УЛИЦУ

Радко Месяр, Вратислава

К переходу приходят автомобили с разделением промежуток времени P/t/. К переходу приходят независимо пешеходы, они ждут промежутка годного для перехода.

Средняя задержка группы А пешеходов с константным критическим промежутком времени определленной разделением p/t/ является w_A. Средняя задержка группы B пешеходов с одинаковыми случайными промежутками времени с разделением k/t/ является w_B. В случае $p/t/ \equiv k/t/$ всегда $w_A \geqslant w_B$.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

ON A CERTAIN TYPE OF CONVERGENCE

Tibor Šalát, Jozef Dravecký, Bratislava

1. INTRODUCTION

S. ZERUOS has defined in [1], with reference to U. DINI, the simple uniform convergence of a sequence of functions by the following definition in which N and R stand for the sets of all positive integers and of all real numbers, respectively, and (a, b) denotes an interval in R which may but need not contain its endpoints a, b.

Definition. A sequence $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ of functions $\varphi_n : (a, b) \to R$ is said to converge in the simple uniform way to a function $\varphi : (a, b) \to R$ if it converges to φ pointwise and if for every $\varepsilon > 0$ and every $\lambda_0 \in N$ there exists $\lambda_1 > \lambda_0$ $(\lambda_1 \in N)$ such that for all $x \in (a, b)$ we have $|\varphi_{\lambda_1}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Let us remark that the pointwise convergence of $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ to φ is missing in the definition of simple uniform convergence in [1]. However, in the proof of Theorème in [1] we read that "la convergence uniforme simple entraîne la convergence simple" (pp. 458-459). If the pointwise convergences were omitted from the definition, uniqueness of the limit function could not be asserted.

2. ZERUOS THEOREM

The main result of the paper [1] by S.ZERUOS is the proof of the following

Theorem A. Let $\{f_n\}_{n\in N}$ be a sequence of functions $f_n : (a, b) \to R$ converging pointwise to a function $f : (a, b) \to R$, let the functions f_n be differentiable on (a, b). If the sequence $\{f_n'\}_{n\in N}$ converges in the simple uniform way to a function $\varphi: (a, b) \to R$, then f is differentiable on (a, b), for all $x\in(a, b)$ we have $f'(x) = \varphi(x)$, and $\{f_n\}_{n\in N}$ converges in the simple uniform way to f.

Observe that the definition of the simple uniform convergence immediately implies the following

Lemma 1. A sequence $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ converges to φ on (a, b) in the simple uniform way if and only if it converges to φ pointwise on (a, b) and for some $n_1 < n_2 < \dots$ we have $\varphi_{n_k} \underset{(a,\, b)}{\rightrightarrows} \varphi$ (i.e. some subsequence $\{\varphi_{n_k}\}_{k\in N}$ converges to φ uniformly on (a, b)).

Using this observation we can easily prove the ZERUOS Theorem A in a different way. The new proof is based on well-known properties of uniformly convergent seguences (cf. [2]).

Proof of Theorem A. Let $n_1 < n_2 < \dots$ be such a sequence of positive integers that $\{f_{n_k}'\}_{k\in N}$ converges uniformly to φ on (a, b). Since $\{f_{n_k}\}_{k\in N}$ coverges pointwise to f on (a, b), we deduce from well-known theorems of analysis (cf. [2], pp. 438--439) that $\varphi(x) = f'(x)$ for each $x\in(a, b)$ and $f_{n_k} \rightrightarrows f$. By Lemma 1 this implies that $\{f_n\}_{n\in N}$ converges to f in the simple uniform way.

3. QUASI-UNIFORM CONVERGENCE

Since clearly the pointwise convergence is implied by the simple uniform convergence and the latter is implied by the uniform convergence, the question arises what is the relation between the simple uniform convergence and the quasi-uniform convergence of a functional sequence. We recall that a sequence $\{f_n\}_{n\in N}$ is said to converge quasi-uniformly to f on (a, b) if it converges to f pointwise and

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{m\geqslant 0}{\forall}\ \underset{p}{\exists}\ \underset{x\in(a,\, b)}{\forall} \min\{|f_{m+1}(x) - f(x)|,\dots$$

$$\dots, |f_{m+p}(x) - f(x)|\} < \varepsilon \tag{1}$$

T h e o r e m 1. If a sequence $\{f_n\}_{n\in N}$ converges to f in the simple uniform way, then it converges to f quasi-uniformly.

P r o o f. By Lemma 1, there exist $n_1 < n_2 < \dots$ with $f_{n_k} \rightrightarrows f$. Let $\varepsilon > 0$ and $m \geqslant 0$. For a sufficiently great k we have $n_k > m$ and $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon$ for all $x \in (a, b)$. Now for this k, (1) is true with $p = n_k - m$.

The converse of the last theorem is not true in general. A counter-example is provided by the sequence $\{f_n\}_{n\in N}$ with $f_n(x) = 0$ for $x \in \langle\frac{1}{n}, 1\rangle$, $f_n(x) = 2nx$ for $x \in \langle 0, \frac{1}{2n}\rangle$ and $f_n(x) = 2 - 2nx$ for $\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}$. This sequence converges quasiuniformly to $f \equiv 0$ on $\langle 0, 1\rangle$ but it does not converge in the simple uniform way, since no subsequence of $\{f_n\}_{n\in N}$ converges uniformly on $\langle 0, 1\rangle$ (see Lemma 1).

4. SOME GENERALIZATIONS

The definition of the simple uniform convergence can be generalized to the case of real-valued functions defined on an abstract set X. The generalization is natural and Lemma 1 remains true. It is possible even to define simple uniform convergence of transfinite sequences of real-valued functions on an abstract set X by requiring that for any $\varepsilon > 0$ and any ordinal $\lambda_0 < \Omega$ there exist an ordinal λ_1 with $\lambda_0 \leq \lambda_1 < \Omega$ and such that for all $x \in X$ we have $|\varphi_{\lambda_1}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, and that $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ converge to φ pointwise. Now evidently a transfinite sequence $\{f_\xi\}_{\xi < \Omega}$ of functions converges to f in the simple uniform way if and only if for some transfinite sequence of ordinals $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\xi < \ldots$ which is cofinal with the transfinite sequence of all ordinals less than Ω we have $f_{\alpha_\xi} \rightrightarrows f$.

5. METRIZABILITY

As with other types of convergence it is natural to ask whether the simple uniform convergence in a functional space is metrizable, i.e. whether there exists a metric d such that $\{f_n\}_{n \in N}$ converges to f iff $\lim_{n \to \infty} d(f_n, f) = 0$.

In the space $C(0,1)$ of all continuous functions on $(0, 1)$, the simple uniform convergence is not metrizable since a subsequence of a simply uniformly convergent sequence need not be simply uniformly convergent. For an example, put $f_n \equiv 0$ if n is odd, and for even n define f_n as in the example in Section 3 of this paper. Since the subsequence $\{f_{2k-1}\}_{k \in N}$ of the (pointwise convergent) sequence $\{f_n\}_{n \in N}$ converges uniformly, we obtain by Lemma 1 that $\{f_n\}_{n \in N}$ is simply uniformly convergent. However, the subsequence $\{f_{2k}\}_{k \in N}$ evidently does not converge in the simple uniform way.

The following theorem provides another result on metrizability.

T h e o r e m 2. Let F denote the space R^X of all real functions on X. The simple uniform convergence in F is metrizable if and only if X is finite.

P r o o f . If X is finite, pointwise convergence in F coincides with the uniform convergence, and so does the simple uniform convergence. Therefore it can be metrized by $d(f, g) = \max_{t\in X}|f(t)-g(t)|$. To prove non-metrizability in the case of infinite X it is sufficient to find an example of a simply uniformly convergent sequence in F having a subsequence that does not converge in the simple uniform way. Since X is infinite, there is $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\} \subset X$. Now for all odd n put $f_n = 0$ on X, and for even n define $f_n(x_m) = 1$ if $m > n$ and $f_n(x) = 0$ elsewhere on X. The obtained sequence $\{f_n\}_{n\in N}$ is simply uniformly convergent but $\{f_{2k}\}_{k\in N}$ is not.

R e f e r e n c e s

[1] Z e r u o s, S.: Sur la dérivation d'une suite de functions réelles. C.R.Acad.Sc. Paris 265 (1967), Série A, 457-460.

[2] F i c h t e n g o l c, G. M.: Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija II, Moskva 1966.

Author's address: Tibor Šalát, Katedra algebry a teórie čísel PFUK,
Jozef Dravecký, Katedra matematickej analýzy PFUK
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 10. 5. 1976

S ú h r n

O ISTOM TYPE KONVERGENCIE

Tibor Šalát, Jozef Dravecký, Bratislava

Práca sa zaoberá jednoducho rovnomernou konvergenciou funkcionálnych postupností. Na základe lemy o vzťahu medzi jednoducho rovnomernou konvergenciou podáva nový dôkaz Zerousovej vety. Ďalej sa zavádza jednoducho rovnomerná konvergencia transfinitných postupností a vyšetruje sa metrizovateľnosť jednoducho rovnomernej konvergencie, ako aj jej vzťah s kvázirovnomernou konvergenciou.

Р е з ю м е

О ОДНОМ ТИПЕ СХОДИМОСТИ

Тибор Шалат, Йозеф Дравецки, Братислава

В работе изучается просто равномерная сходимость последовательностей функций. Новым образом доказывается теорема Зерусс. Определяется просто равномерная сходимость трансфинитных последовательностей и характеризуется метризуемость просто равномерной сходимости и её связь с другими типами сходимости.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

THE DECOMPOSITION OF UNCOUNTABLE CLOSED SETS OF REAL NUMBERS

O t o S t r a u c h, Bratislava

It is very well known that we can prove without use of the continuum hypothesis:

The family of all closed sets of real numbers has power c, where $c = 2^{\aleph_0}$. Every uncountable closed set of real numbers has power c.

The second statement follows e.g. from the following lemma.

L e m m a . /J.C.Oxtoby [1], p. 23/ Any uncountable G_δ set of real numbers contains a nowhere dense closed subset of measure zero that can be mapped continuously onto the closed interval $[0,1]$. This lemma can be proved without use of the continuum hyphothesis. In this short research we shall prove the following theorem using this lemma and again without use of the continuum hypothesis.

T h e o r e m . Every uncountable closed set of real numbers can be decomposed into c pairwise disjoint uncountable closed subsets.

P r o o f . It is sufficient to prove that there exists at least one family of power c of pairwise disjoint uncountable closed sets of real numbers contained in a bounded closed interval I of real numbers. If it is true then it follows from the lemma that every uncountable closed set of real numbers contains c pairwise disjoint uncountable closed subsets. /Every uncountable closed set of real numbers contains, according to the lemma, a closed subset which can be mapped continuously onto the interval $[0,1]$ that can be mapped continuously onto the interval I. We can transmit this family from the interval I to the original set by means of the inverse image/. The required decomposition is obtained by adding those elements of a closed set which are contained at none of the given subsets one after another to individual subsets.

We shall find such a family with the required properties by means of translations of a bounded uncountable closed set of real numbers. Let C be a set of real numbers. Let us find to C a set X of real numbers such that family of translations of C, $\{C + x;\ x \in X\}$, consists of pairwise disjoint sets. It will happen if and only if the sets $C - C$ and $X - X$ /where $C - C = \{|x - y|;\ x,\ y \in C\}$/ have only zero in common. If C is a closed set of measure zero then the distance of arbitrary two points from C can be expressed as a sum of lengths of those component intervals of C which lie between them, i.e.

$$C - C \subseteq \{ \sum_{i \in N'} |I_i|;\quad N' \in 2^N \}$$

where $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ is an enumeration of the family of all finite component intervals of C, $|I_i|$ denotes the length of the interval I_i and N denotes the set of all nonnegative integers. /Let us remark that if X is infinite and bounded then C has to be of measure zero since in the contrary case $C - C$ contains an interval in which there is zero, by H. Steinhaus [4], and $X - X$ contains a sequence converging to zero/.

If for the sequence $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ of all finite component intervals of C the inequality

$$|I_n| > 2 \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} |I_i| \tag{1}$$

holds for every n then we can define the set X as

$$X = \{ \sum_{i \in N'} |I_i| ; \quad N' \in S \}$$

where S is a family of the sets of nonnegative integers no one containing another, since it follows from the inequality (1) that every real number z, which can be written in the form of the sum

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} m_i |I_i| \tag{2}$$

where for every i the enequalities $0 \leq m_i \leq 2$ hold and m_i are integers, has a unique expression in form (2). Now if there exists $x > y$, $x, y \in X$ such that $x - y \in C - C$ then

$$x - y = \sum_{i=0}^{\infty} k_i |I_i|, \quad x = \sum_{i=0}^{\infty} k_i' |I_i| , \; y = \sum_{i=0}^{\infty} k_i'' |I_i|$$

for every i where k_i, k_i', k_i'' are equal to 0 or 1. Hence

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} k_i' |I_i| = \sum_{i=0}^{\infty} (k_i + k_i'')|I_i|$$

where $0 \leq k_i + k_i'' \leq 2$ for every i. From the uniqueness of the expression of x it follows that $k_i' = k_i + k_i''$ for every i which contradicts the existence of i such that $k_i' = 0$ and $k_i'' = 1$ since we have so chosen the family S.

If we choose S such that it has power c then also X has power c. We can choose for S e.g. a family of infinite sets of nonnegative integerrs from which every two have a finite intersection described /without use of the continuum hypothesis/ in the article of J.R.Buddenhagen [2].

It remains still to prove that there exists an uncountable closed set C of measure zero and such that the lengths of finite component intervals of C satisfy the inequality (1). /It follows from (1) that sets C and X are bounded and therefore the union $\cup\{C + x;\ x \in X\}$ is also bounded./ However, it is very well known that to an arbitrary convergent series $\sum_{i=0} d_i$ with positive terms there exists nowhere dense and perfect set C having measure zero such that the lengths of finite component intervals of C are just equal to the terms of the series $\sum_{i=0} d_i$ /Let $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ be an enumeration of all rational numbers from the interval $[0, \sum_{i=0}^{\infty} d_i]$ without its boundary points. Let us define a mapping f on this interval by the rule: $f(x) =$ '' d_i, where the summation is extended over all i such that x_i x. Then it is enough to put

$$C = f(\ [0, \sum_{i=0}^{\infty} d_i]\ ) - f(\{x_i\}^{\infty}_{i=0})./$$

Thus the proof is finished.

<u>R e m a r k 1</u>. With use of the continuum hypothesis this theorem can be proved easily in this way: The set of all families which consists only of pairwise disjoint uncountable closed sets of measure zero /contained in the closed bounded interval I/, can be /partially/ ordered by inclusion. This set will have in this order maximal elements /by Zorn's lemma/. Every such maximal family contains uncountably many sets, for if a maximal family contains only countably many sets, then the union of them is an F_6 set of measure zero and therefore its complement is an uncountable G_δ set. By the lemma, in such a G_δ set there exists a closed uncountable subset of measure zero. If we add this set to this maximal family we obtain the contradiction to the maximality.

<u>R e m a r k 2</u>. Without use of the continuum hypothesis we can also prove the following:

There exists a set B of real numbers such that both B and its complement meet every uncountable closed set of real numbers /see [1], p.23/. These sets B are called Bernstein sets.

Any Bernstein set B is non-measurable and lacks the property of Baire /see [1], p.24/.

The set of all real numbers can be decomposed into c pairwise disjoint Bernstein sets /W.Sierpinski-N.Lusin [3]/.

The family of all Bernstein sets has power 2^c /it follows from the fact that the union of Bernstein sets from a proper subfamily of the preceding decomposition is Bernstein set again/.

Every Bernstein set meets every uncountable closed set in c points and therefore every Bernstein set has power c /it follows from the theorem proved in this paper/.

References

[1] O x t o b y, J. C.: Measure and Category. Springer-Verlag, 1971

[2] B u d d e n h a g e n, J. R.: Subsets of a countable set. Amer. Math. Monthly, 78 /1971/, 536-537.

[3] S i e r p i n s k i, W. - L u s i n, N.: Sur une décomposition d un intervalle en une infinité non dénombrable non mesurables. C.R.Acad.Sci. Paris, 165 /1917/, 422-424.

[4] S t e i n h a u s, H.: Sur les distances des points des ensembles de mesure positive. Fund. Math. I. /1920/, 93-104.

Author's address: Oto Strauch, Katedra algebry a teórie čísel PFUK
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 11. 5. 1976

S ú h r n

ROZKLAD NESPOČETNÝCH UZAVRETÝCH MNOŽÍN REÁLNYCH ČÍSEL

Oto Strauch, Bratislava

V tomto článku je dokázané, bez použitia hypotézy kontinua, že každú nespočetnú uzavretú množinu reálnych čísel môžeme rozložiť na $c = 2^{\aleph_0}$ nespočetných uzavretých podmnožín.

Р е з ю м е

РАЗВИЕНИЕ НЕСЧЁТНЫХ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Ото Штраух, Братислава

В этой статьи показывается, без применения континуум-гипотезы, что всякое несчётное замкнутое множество действительных чисел можно разбить на $c = 2^{\aleph_0}$ несчётных замкнутых подмножеств.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

A CONSTRUCTION OF GEODETIC BLOCKS

J á n P l e s n í k, Bratislava

A graph is geodetic if two arbitrary points are connected by a unique shortest path. Since a connected graph G is geodetic if and only if every block of G is geodetic (STEMPLE and WATKINS [7]), it is sufficient to study geodetic blocks only. Planar geodetic graphs were characterized by STEMPLE and WATKINS [7]. A reformulation of their result can be found in [4]. Geodetic graphs of diameter 2 were studied by STEMPLE [6], ZELINKA [8], J. BOSÁK [1], and partly by SKALA [5]. As for geodetic graphs with any greater diameter, only two classes of examples of geodetic blocks are published up to this time [4]. Each of these graphs contains points of degree two. M. E. WATKINS (oral communication) put the following problem: construct a geodetic block with diameter at least 3 and with minimum degree at least 3. In this paper we present a construction of geodetic blocks which gives also a solution of the mentioned problem. The notation and terminology will be used in the sense of [3]. Given a graph G, V(G) and E(G) denote its point set and line set, respectively. The distance between points $u, v \in V(G)$ is denoted by $d(u, v)$. A shortest u-v path is called u-v geodesic.

The supremum of all distances in G is the diameter of G and is denoted by $d(G)$.

Now we are going to describe the promised construction. Let n and m be given natural numbers. Consider a system $(Q_1, \ldots, Q_m)$ of non-empty subsets of the set $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ with the property: For any two elements $i, j \in N$, $i \neq j$, there is exactly one $k \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$ with $i, j \in Q_k$. In other words, such a system $(Q_1, \ldots, Q_m)$ is in fact a line-decomposition of the complete graph K_n into m complete subgraphs $K_{|Q_1|}, \ldots, K_{|Q_m|}$. Balanced incomplete block designs (see e. g. [2], Chap. 10) with $\lambda = 1$, are examples of such systems.

Further, let $r, s \geq 0$ be given integers. Then we define a graph $G = G(Q_1, \ldots, Q_m; r, s)$ as follows:

$$V(G) = A^0 \cup A^1 \cup \ldots \cup A^s \cup B \cup C \cup D^0 \cup D^1 \cup \ldots \cup D^s \text{ , where}$$

$$A^t = \{a^t_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m, \quad i \in Q_j\} \quad (t = 0, 1, \ldots, s),$$

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\} \ ,$$

$$C = \{c_1, \ldots, c_r\} \ ,$$

$$D^t = \{d^t_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq r \qquad (t = 0, 1, \ldots, s).$$

$$E(G) = \{a^0_{ik}a^0_{jk} \mid a^0_{ik}, \ a^0_{jk} \in V(G), \ i \neq j\} \cup \{a^0_{ik}a^1_{ik}, \ a^1_{ik}a^2_{ik}, \ldots$$
$$\ldots, a^{s-1}_{ik}a^s_{ik}, \ a^s_{ik}b_i \mid a^0_{ik} \in V(G)\} \cup \{c_ic_j \mid 1 \leq i \leq r,$$
$$1 \leq j \leq r, \ i \neq j\} \cup \{b_id^s_{ij}, \ d^s_{ij}d^{s-1}_{ij}, \ldots, d^1_{ij}d^0_{ij}, \ d^0_{ij}c_j \mid$$
$$1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq r\}.$$

In the Fig. 1 we have drawn the graph G({1, 2, 3}, {1, 4, 5}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {5}, {5}; 2, 1).

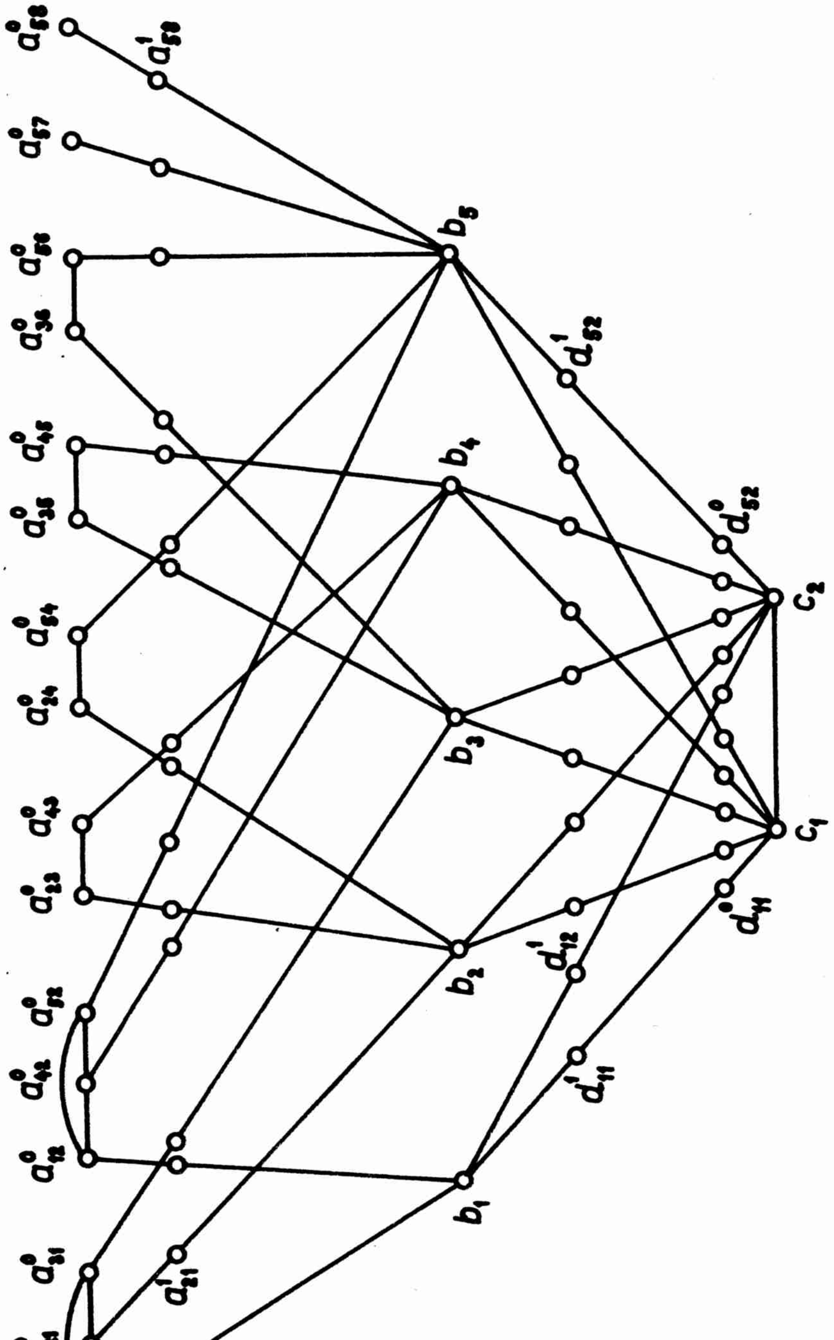


Fig. 1.

R e m a r k 1. Graphs $G(Q_1;\ r,\ s)$ (i.e., the case $m = 1$) were found by J. BOSÁK [1] and then only starting from that construction the author of this paper found the presented construction.

One sees that if there is a set Q_j with $|Q_j| = 1$, then our graph has a cutpoint whenever $m \geq 2$.

A s s e r t i o n 1. Any $G(Q_1,\dots,\ Q_m;\ r,\ s)$ is geodetic graph. Moreover, if $r \geq 1$ or $m \geq 2$, then any $G(Q_1,\dots,Q_m;\ r,\ s)$ is block whenever every Q_j contains at least two elements.

P r o o f. Put $A = A^0 \cup A^1 \cup \dots \cup A^s$ and $D = D^0 \cup D^1 \cup \dots \cup D^s$. We shall prove that $G(Q_1,\dots,\ Q_m;\ r,\ s)$ is geodetic by showing an x-y geodesic for every pair $(x,\ y)$ from $A \times A$, $A \times B$, $\dots$, $D \times D$ (10 cases) and giving the distance $d(x,\ y)$. The verification that there is no more than one x-y geodesic is long (but easy) and will be left to the reader.

x-y (subcases)	x-y geodesic	d(x, y)
$a^p_{ik}-a^q_{jf}$		
$k = f$, $i = j$, $p > q$ (the case $p < q$ is symmetric)	$a^p_{ik}a^{p-1}_{ik}\dots a^q_{ik}$	$p - q$
$k = f$, $i \neq j$	$a^p_{ik}a^{p-1}_{ik}\dots a^0_{ik}a^0_{jk}\dots$ $\dots a^q_{jk}$	$p + q + 1$
$k \neq f$, $i = j$	$a^p_{ik}a^{p+1}_{ik}\dots a^s_{ik}b_i a^s_{if}\dots$	

	$\ldots a^{q}_{if}$	$2s + 2 - p - q$
$k \neq f,\ i \neq j,$	$a^{p}_{ik} a^{p-1}_{ik} \ldots a^{0}_{ik} a^{0}_{jk} \ldots$	
$j \in Q_k$	$\ldots b_j a^{s}_{jf} \ldots a^{q}_{jf}$	$2s + 3 + p - q$
(the case $i \in Q_f$		
is symmetric)		
$k \neq f,\ i \neq j,$	The shortest from the	
$i \notin Q_f,\ j \notin Q_k,$	following two paths	
there is $t \in Q_k \cap Q_f$	(note that their lengths	
(note that in any	have different parities):	
case $\lvert Q_k \cap Q_f \rvert \leq 1$	$a^{p}_{ik} \ldots a^{0}_{ik} a^{0}_{tk} \ldots b_t \ldots$	
and there is exactly	$\ldots a^{0}_{tf} a^{0}_{jf} \ldots a^{q}_{jf}$,	$2s + p + q + 4$
one g with $i, j \in Q_g$)	$a^{p}_{ik} \ldots b_i \ldots a^{0}_{ig} a^{0}_{jg} \ldots$	
	$\ldots b_j \ldots a^{q}_{jf}$	$4s + 5 - p - q$
$k \neq f,\ i \neq j,$	$a^{p}_{ik} \ldots b_i \ldots a^{0}_{ig} a^{0}_{jg} \ldots$	
$Q_k \cap Q_f = \emptyset$	$\ldots b_j \ldots a^{q}_{jf}$	$4s + 5 - p - q$

<u>$a^{p}_{ik} - b_j$</u>

$i = j$	$a^{p}_{ik} \ldots a^{s}_{ik} b_i$	$s + 1 - p$
$i \neq j,\ j \in Q_k$	$a^{p}_{ik} \ldots a^{0}_{ik} a^{0}_{jk} \ldots b_j$	$s + p + 2$
$i \neq j,\ j \notin Q_k$	$a^{p}_{ik} \ldots a^{s}_{ik} b_i \ldots$	
$(i, j \in Q_g)$	$\ldots a^{0}_{jg} a^{0}_{jg} \ldots b_j$	$3s + 4 - p$
<u>$a^{p}_{ik} - c_j$</u>	$a^{p}_{ik} \ldots a^{s}_{ik} b_i \ldots c_j$	$2s + 3 - p$

$\underline{a^p_{ik}-d^q_{jf}}$		
$i = j$	$a^p_{ik} \ldots a^s_{ik}b_i d^s_{if} \ldots d^q_{if}$	$2s + 2 - p - q$
$i \neq j, \quad j \in Q_k$	The shortest from the following two paths (their lengths have different parities):	
	$a^p_{ik} \ldots a^0_{ik}a^0_{jk} \ldots$ $\ldots a^s_{jk}b_j d^s_{jf} \ldots d^q_{jf},$	$2s + 3 + p - q$
	$a^p_{ik} \ldots a^s_{ik}b_i \ldots c_f \ldots$ $\ldots d^q_{jf}$	$2s + 4 + q - p$
$i \neq j, j \notin Q_k$	$a^p_{ik} \ldots a^s_{ik}b_i \ldots c_f \ldots$ $\ldots d^q_{jf}$	$2s + 4 + q - p$
$\underline{b_i - b_j}$		
$i = j$	b_i	0
$i \neq j, (i, j \in Q_g)$	$b_i \ldots a^0_{ig}a^0_{jg} \ldots b_j$	$2s + 3$
$\underline{b_i - c_j}$	$b_i \ldots c_j$	$s + 2$
$\underline{b_i - d^q_{jf}}$		
$i = j$	$b_i d^s_{if} \ldots d^q_{if}$	$s + 1 - q$
$i \neq j$	$b_i \ldots c_f \ldots d^q_{jf}$	$s + 3 + q$
$\underline{c_i - c_j}$		
$i = j$	c_i	0

$i \neq j$	$c_i c_j$	1
$\underline{c_i - d^q_{jf}}$		
$i = f$	$c_i d^q_{ji} \dots d^q_{ji}$	$q + 1$
$i \neq f$	$c_i c_f d^q_{jf} \dots d^q_{jf}$	$q + 2$
$\underline{d^p_{ik} - d^q_{jf}}$		
$i = j,\ k = f,\ p \geqslant q$	$d^p_{ik} d^{p-1}_{ik} \dots d^q_{ik}$	$p - q$
(the case $p \leqslant q$ is symmetric)		
$i = j,\ k \neq f$	The shortest from the following two paths (their lengths have different parities):	
	$d^p_{ik} \dots d^s_{ik} b_i d^s_{if} \dots$ $\dots d^q_{if}$,	$2s + 2 - p - q$
	$d^p_{ik} \dots d^0_{ik} c_k c_f d^0_{if} \dots$ $\dots d^q_{if}$	$p + q + 3$
$i \neq j,\ k = f$	$d^p_{ik} \dots d^0_{ik} c_k d^0_{jk} \dots$ $\dots d^q_{jk}$	$p + q + 2$
$i \neq j,\ k \neq f$	$d^p_{ik} \dots d^0_{ik} c_k c_f d^0_{jf} \dots$ $\dots d^q_{jf}$	$p + q + 3$

Thus our graph is geodetic. If $r \geqslant 1$ or $m \geqslant 2$, then obviously $G(Q_1, \dots, Q_m; r, s)$ has no cutpoint whenever $|Q_j| \geqslant 2$ $(j = 1, \dots, m)$. Q.E.D.

One sees that $G(Q_1, \ldots, Q_m; r, s)$ contains points of degree 2 whenever $r \geqslant 1$ (e.g. d^0_{11}) or $s \geqslant 1$ (e.g. a^s_{11}). Therefore, we shall consider only graphs with $r = s = 0$.

<u>A s s e r t i o n 2</u>. Let $e \geqslant 3$. If $m \geqslant e$ and $|Q_i| \geqslant e$ ($i = 1, \ldots, m$), then any graph $G(Q_1, \ldots, Q_m; 0, 0)$ is geodetic with the point-connectivity at least e and the diameter of it is 4 or 5 depending on $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$ for all i, j or not.

<u>P r o o f</u>. Any graph $G(Q_1, \ldots, Q_m; 0, 0)$ is geodetic by Assertion 1. The assertion on the diameter follows directly from the proof of the Assertion 1 ($r = s = 0$).

To establish the required connectivity, we are going to show that for any two points, x, y ($x \neq y$) there are at least e pairwise point-disjoint x-y paths. Firstly, we shall prove that for any element $i \in N$ there are at least e sets Q_j containing i (i.e., any b_i has the degree at least e). Let $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$ be all sets containing i. We have $\bigcup_{j=1}^{h} Q_j = N$. Further, as $m \geqslant 2$, we have $h \geqslant 2$. Let $i_1 \in Q_1$ and $i_2 \in Q_2$ with $i_1 \neq i \neq i_2$. There is a set Q_g containing i_1, i_2. Since $|Q_g \cap Q_j| \leqslant 1$ ($j = 1, \ldots, h$), $|Q_g| \leqslant h$. By the assumption $e \leqslant |Q_g|$, hence $h \geqslant e$.

In the sequel we shall write a_{ij} instead of a^0_{ij} for all i and j.

<u>$a_{ik}-a_{jk}$</u> :

$a_{ik}a_{jk}$,

$a_{ik}a_{pk}a_{jk}$, $(p \in Q_k,\ i \neq p \neq j)$

$a_{ik}b_i a_{it} a_{qt} b_q a_{qg} a_{jg} b_j a_{jk}$, $(t \neq k,\ q \in Q_t)$.

As the degree of any b_i is at least e, such a t exists. The existence of q is obvious. Further, for any j, q there is (exactly one) g with

$j, q \in Q_g$.

$\underline{a_{ik} - a_{if}}$:

$a_{ik} b_i a_{if}$,

$a_{ik} a_{p_j k} b_{p_j} a_{p_j g_j} a_{q_j g_j} b_{q_j} a_{q_j f} a_{if}$, $(j = 1, 2, \ldots, e - 1)$

The set $Q_k - \{i\}$ contains at least $e - 1$ elements: $p_1, p_2, \ldots, \ldots, p_{e-1}$. Analogously, Q_f contains $i, q_1, q_2, \ldots, q_{e-1}$. For every pair (p_j, q_j) there is exactly one g_j with $p_j, q_j \in Q_{g_j}$.

$\underline{a_{ik} - a_{jf}}$ with $i \neq j$, $k \neq f$, $j \in Q_k$ (the case $i \in Q_f$ is symmetric):

$a_{ik} a_{jk} b_j a_{jf}$,

$a_{ik} b_i a_{ig_0} a_{q_0 g_0} b_{q_0} a_{q_0 f} a_{jf}$,

$a_{ik} a_{p_t k} b_{p_t} a_{p_t g_t} a_{q_t g_t} b_{q_t} a_{q_t f} a_{jf}$, $(t = 1, 2, \ldots, e - 2)$

There are $p_1, p_2, \ldots, p_{e-2} \in Q_k - \{i, j\}$ and $q_0, q_1, \ldots, q_{e-2} \in Q_f - \{j\}$. The elements $g_0, g_1, \ldots, g_{e-2}$ exist as above.

$\underline{a_{ik} - a_{jf}}$ with $Q_k \cap Q_f = \{z\}$:

$a_{ik} b_i a_{ig} a_{jg} b_j a_{jf}$,

$a_{ik} a_{zk} b_z a_{zf} a_{jf}$,

$a_{ik} a_{p_t k} b_{p_t} a_{p_t g_t} a_{q_t g_t} b_{q_t} a_{q_t f} a_{jf}$, $(t = 1, 2, \ldots, e - 2)$

The elements p_t, q_t, g_t g exist as above.

$\underline{a_{ik} - a_{jf}}$ with $Q_k \cap Q_f = \emptyset$:

$a_{ik} b_i a_{ig} a_{jg} b_j a_{jf}$,

$a_{ik} a_{p_t k} b_{p_t} a_{p_t g_t} a_{q_t g_t} b_{q_t} a_{q_t f} a_{jf}$, (t = 1, 2, ..., e-1)

The elements p_t, q_t, g_t, g exist as above.

$\underline{a_{ik} - b_i}$:

$a_{ik} b_i$,

$a_{ik} a_{p_t k} b_{p_t} a_{p_t g_t} a_{q_t g_t} b_{q_t} a_{q_t u_t} a_{iu_t} b_i$, (t = 1, 2, ..., e-1)

There are elements p_t as above. Further, the degree of b_i is at least e, i.e., there are $u_1, u_2, \dots, u_{e-1}$ such that $i \in Q_k$, $Q_{u_1}, Q_{u_2}, \dots, Q_{u_{e-1}}$. Then for every t we arbitrarily choose $q_t \in Q_{u_t} - \{i\}$. The elements g_t exist as above.

$\underline{a_{ik} - b_j}$ with $i \neq j$, $j \in Q_k$:

$a_{ik} a_{jk} b_j$,

$a_{ik} b_i a_{ig_0} a_{z_0 g_0} b_{z_0} a_{z_0 u_0} a_{ju_0} b_j$,

$a_{ik} a_{p_t k} b_{p_t} a_{p_t g_t} a_{z_t g_t} b_{z_t} a_{z_t u_t} a_{ju_t} b_j$, (t = 1, 2, ..., e - 2)

As the degree of b_j is at least e, there are $u_0, u_1, \dots, u_{e-2}$ with $j \in Q_k, Q_{u_0}, Q_{u_1}, \dots, Q_{u_{e-2}}$. Then we choose arbitrarily points $z_0 \in Q_{u_0} - \{j\}, \dots, z_{e-2} \in Q_{u_{e-2}} - \{j\}$. The set $Q_k - \{i, j\}$ contains $p_1, \dots, p_{e-2}$. Then there exist (uniquely)

$g_0, g_1, \ldots, g_{e-2}$ with $i, z_0 \in Q_{g_0}$ and $p_t, z_t \in Q_{g_t}$ $(t = 1, 2, \ldots, \ldots, e - 2)$.

$\underline{a_{ik} - b_j}$ with $i \neq j$, $j \notin Q_k$:

$a_{ik} b_i a_{ig_0} a_{jg_0} b_j$,

$a_{ik} a_{p_t k} b_{p_t} a_{p_t g_t} a_{jg_t} b_j$, $(t = 1, 2, \ldots, e - 1)$

There are $p_t \in Q_k - \{i\}$ and $g_0, g_1, \ldots, g_{e-1}$ with $i, j \in Q_{g_0}$ and $p_t, j \in Q_{g_t}$ $(t = 1, 2, \ldots, e-1)$.

$\underline{b_i - b_j}$

$b_i a_{ig_0} a_{jg_0} b_j$,

$b_i a_{ip_t} a_{u_t p_t} b_{u_t} a_{u_t q_t} a_{jq_t} b_j$, $(t = 1, 2, \ldots, \hat{e})$

$b_i a_{ip_t} a_{u_t p_t} b_{u_t} a_{u_t g_t} a_{z_t g_t} b_{z_t} a_{z_t q_t} a_{jq_t} b_j$, $(t = \hat{e} + 1, \ldots, e - 1)$

There is exactly one g_0 with $i, j \in Q_{g_0}$. Further, there are $e - 1$ another sets $Q^{(i)}$ containing i and $e - 1$ another sets $Q^{(j)}$ containing j. Let $Q_{p_1}, \ldots, Q_{p_{e-1}}$ and $Q_{q_1}, \ldots, Q_{q_{e-1}}$ be those sets, respectively. We can suppose that there exists $\hat{e}$, $0 \leq \hat{e} \leq e - 1$, such that $Q_{p_t} \cap Q_{q_t} = \emptyset$ if $t \leq \hat{e}$, and $Q_{p_t} \cap Q_{q_t} = \emptyset$ if $t > \hat{e}$. Moreover, we shall suppose that $\hat{e}$ is maximal with the property over all independent orderings of the sets $Q^{(i)}$ and the sets $Q^{(j)}$. Then we put $Q_{p_t} \cap Q_{q_t} = \{u_t\}$ if $t \leq \hat{e}$, and arbitrarily choose $u_t \in Q_{p_t} - \{i\}$ and $z_t \in Q_{q_t} - \{j\}$ if $t > \hat{e}$. For every $t > \hat{e}$ there is exactly one g_t with $u_t, z_t \in Q_{g_t}$.

Having covered all cases, the assertion is proved. Q.E.D.

R e m a r k 2. We see that a graph $G(Q_1, \ldots, Q_m; 0, 0)$ is regular of a degree $e \geq 3$ if and only if $Q_j = e$ for all j and for any element $i \in N$ there are exactly e sets Q_j containing i. However, then the system $(Q_1, \ldots, Q_m)$ is in fact a balanced incomplete block desing (BIBD) (see [2], Chap. 10) with parameters: $v = n$, $b = m$, $k = e$, $r = e$, $\lambda = 1$. Thus such a BIBD is symmetric. Consequently, for any pair (i, j), $i \neq j$, we have $|Q_i \cap Q_j| = \lambda = 1$. Hence by Assertion 2, the corresponding graph has the diameter 4. So results on the existence of symmetric BIBDs provide infinitely many regular geodetic graphs with diameter 4 and a high connectivity.

P r o b l e m. We have just described a construction which gives geodetic graphs with high connectivities and diameter 4 or 5. However, there is an open problem to find such graphs with diameter 3 or more than 5.

R e f e r e n c e s

[1] B o s á k, J: Geodetic graphs, In: Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, 18. Combinatorics, Keszthely, 1976, 151-172.

[2] H a l l, M.: Combinatorial theory, Blaisdell Publishing Company, Waltham 1967.

[3] H a r a r y, F.: Graph theory, Addison-Wesley, Reading 1969.

[4] P l e s n í k, J.: Two constructions of geodetic graphs, Math. Slovaca 27 (1977), 65-71.

[5] S k a l a, H. L.: A variation of the friendship theorem, SIAM J. Appl. Math., 23 (1972), 214-220.

[6] S t e m p l e, J. G.: Geodetic graphs of diameter two, J. Comb. Theory Ser. B 17 (1974), 266-280.

[7] S t e m p l e, J. G. - W a t k i n s, M. E.: On planar geodetic graphs, J. Comb. Theory 4 (1968), 101-117.

[8] Z e l i n k a, B.: Geodetic graphs of diameter two, Czech. Math. J. 25 (100)(1975), 148-153.

Author's address: Ján Plesník, Katedra numerickej matematiky
a matematickej štatistiky PFUK
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 13. 5. 1976

S ú h r n

JEDNA KONŠTRUKCIA GEODETICKÝCH BLOKOV

Ján Plesník, Bratislava

Graf G sa nazýva geodetický, ak každé dva vrcholy grafu G sú spojené jedinou najkratšou cestou. Predkladá sa jedna konštrukcia geodetických grafov, ktorá okrem iných dáva geodetické grafy priemeru 4 alebo 5 s veľkou vrcholovou súvislosťou.

Р е з ю м е

ОДНА КОНСТРУКЦИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ВЛОКОВ

Ян Плесник, Вратислава

Граф G называется геодезическим если каждые две вершины графа G соединены единственной кратчайшей цепью. Предлагается одна

конструкция геодезических графов, которая кроме других дазает геодезические графы диаметра 4 или 5 с большой вершинной связностью.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

ON EXTENSION OF CONTINUOUS FUNCTIONS

Eva Pernecká, Bratislava

Let $\mathcal{A}$ be the system of subsets P of the set E_1 of reals with the following property: There is a continuous function $f : E_1 \longrightarrow E_1$, which is not injective, and such that the restriction $f \mid P$ is injective.

P. D. Hammer [3] recently has posed the problem, whether the sets Q of the rational and I of the irational numbers belong to $\mathcal{A}$. It is easy to see, that $Q \in \mathcal{A}$, and $I \notin \mathcal{A}$. In the present note we give a generalization of these results. We begin with the following lemma.

<u>Lemma 1</u>. Let A, B be non-empty, nowhere dense, perfect sets; let I, J be two closed intervals such that $A \subset I$, $B \subset J$, and let the right (left)-hand end-point of I belong to A if and only if the right (left)-hand end-point of J belongs to B. Then there is a continuous, strictly increasing surjective function $f : I \longrightarrow J$ such that $F(A) = B$, and f is linear at the component intervals of the set $I \setminus A$.

<u>Proof</u>. Let $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of the component intervals of the set $I \setminus A$; let $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of the component intervals of the set $J \setminus B$. In the natural ordering the sets $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ are dense and countable.

Let $g : \{I_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ be the corresponding order-isomorphism.

We define now the function f as follows: f is linear increasing at every component interval I_k of the set $I \setminus A$ such that $f(I_k) = g(I_k)$.

Let $f(x) = \inf \{ f(t);\ t \in \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ t > x$ for $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$.

The function f is continuous and injective; proof of this fact is similar as in the case of the Cantor's function. Clearly $f(A) = B$.

T h e o r e m 1. If A is a set of the first category, then $A \in \mathcal{a}$.

P r o o f. Since A is a set of the first category, it is possible to find a set $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ which is dense in E_1 and such that every of the sets A_k is nowhere dense, perfect set and $A \subset B$. We shall show that $B \in \mathcal{a}$. Then it will be evident that $A \in \mathcal{a}$.
Let $a < b; a, b \in E_1$. We shall define a function $g: E_1 \longrightarrow E_1$ as follows: Let $g(x) = x - b + 1$ for $x \in \langle b, \infty)$ and let g be strictly decreasing, continuous function on the interval $(-\infty, a\rangle$ with the property $g((-\infty, a\rangle) = \langle 0, 1)$. On the interval $\langle a, b\rangle$ the function g will be a limit of a sequence of functions g_n such that g_n is continuous and injective for every $n = 0, 1, \ldots$.
Put $C = g((-\infty, a) \cap B) \subset \langle 0, 1)$. Then C is a set of the first category, because $g|_{(-\infty, a)}$ is a homeomorphism.

We shall define functions g_n by induction. Let g_0 be linear increasing function with $g_0(\langle a, b\rangle) = \langle 0, 1\rangle$. Assume that we have defined a function $g_k: \langle a, b\rangle \rightarrow \langle 0, 1\rangle$ which is increasing, surjective, and such that $g_k(A_0 \cup \ldots \cup A_k) \cap C = \emptyset$, where $A_0 = \emptyset$
Let J be a component interval of the set $(0, 1) - (A_0 \cup \ldots \cup A_k)$. Then $g_k(J)$ is a component interval of the set $(0, 1) \setminus g_k(A_0 \cup \ldots \cup A_k)$.
Put $P_{k+1}^J = \overline{A_{k+1} \cap J}$ (we denote by $\overline{X}$ the closure of the set X).
Clearly P_{k+1}^J is perfect. If it is nonempty, choose a nonempty nowhere dense perfect set C_{k+1} in the interval $I = g_k(J)$ such that

$C_{k+1} \cap C = \emptyset$ (this is possible, see e.g. [1], p. 387). Moreover, we can clearly choose C_{k+1} such that

(1) the length of every component interval of the set

$\langle 0, 1\rangle \setminus C_{k+1}$ is less then $|I| / 2$

and that C_{k+1} has this property: If the left (right)-hand end-point of J belongs to P^J_{k+1}, then the left (right)-hand end-point of I belongs to C_{k+1}. By Lemma 1 there is a function $g^J_{k+1} : J \to I$, which is continuous, increasing, surjective, and such that $g^{J\,\prime}_{k+1}(P^J_{k+1}) = C_{k+1}$. If $P^J_{k+1} = \emptyset$, put $g^J_{k+1}(x) = g_k(x)$ for $x \in J$.

Then we can define the function $g_{k+1}: \langle a, b\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ as follows:

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) \text{ for } x \in (A_0 \cup \ldots \cup A_k) \cap \langle a, b\rangle$$

$$g_{k+1}(x) = g^J_{k+1}(x) \quad \text{for } x \in J$$

where J is some component interval of the set $\langle a, b\rangle \setminus (A_0 \cup \ldots \cup A_k)$.

Clearly g_{k+1} is increasing and surjective. Moreover the sequence $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ converges for $x \in \langle a, b\rangle$ uniformly to a function g. This follows from (1) and from the fact that the sequence $\{g_k(x)\}_{k=n}^{\infty}$ is constant whenever $x \in (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap \langle a,b\rangle$. It is easy to see that $g(B \cap (a, b)) \cap C = \emptyset$. The function $g|B : B \to E_1$ is continuous and injective. But $g((a, b\rangle) = (0, 1\rangle$ and $g((-\infty, a\rangle) = \langle 0, 1)$, hence the continuous function $g: E_1 \to E_1$ is not injective, q.e.d.

To prove the next Theorem 2 we need the following lemma:

L e m m a 2. Let U, V be intervals, let $f : U \to V$ be a continuous surjective function. Assume that $A \subset U$ is residual in U and that f / A is an injective function. Then the set f(A) is residual in V.

P r o o f. Since every residual set contains a residual subset of the type G_δ, we can assume, that A is a residual G_δ

set. Let A_1 be the set of all points of the set A, in which the function f/A takes on locally strictly extreme value. It is easy to see that the set A_1 is countable, so $A^* = A \setminus A_1$ is a residual G_δ set.

Put $B^* = f(A^*)$. To prove Lemma 2 it suffices to show that B^* is residual. First we show that $g = f/_{A^*}$ is a homeomorphism $A^* \rightarrow B^*$. Because g is injective and continuous function, it is sufficient to show that $g^{-1} : B^* \rightarrow A^*$ is a continuous function, i.e. that for each open interval I, $g(A^* \cap I)$ is the set of the form $J \cap B^*$, where J is an open interval.

Take such an interval I. Put $J = f(I)$. It is easy to see, that J is an interval. If J contains some of its end-points, e.g. $J = \langle a, b)$ such that $a \in B^*$, then the function g takes on in $x = g^{-1}(a)$ locally strictly minimal value. But such x cannot belong to A^*, so J is an open interval. Hence B^* is homeomorphic with the G_δ set A^*. By a Mazurkiewicz's theorem if X and Y are homeomorphic subsets of complete metric spaces and X is G_δ, then also Y is G_δ (see e.g. [1], page 337).

So B^* is a G_δ set. Further B^* is a dense set in V. Indeed, if B^* is not dense in V, there is an interval $J_0 \subset V$ such that $B^* \cap J_0 = \emptyset$. Since f is continuous and surjective, the interval J_0 is an image of some interval $I_0 \subset U$. But $A^* \cap I_0 \neq \emptyset$, so $f(A^*) \cap J \neq \emptyset$, e.g. B^* is a dense set in V. Since every dense G_δ set is a residual set, B^* is a residual set in V.

<u>Theorem 2</u>. If A is a residual set, than $A \notin \mathcal{A}$.

<u>Proof</u>. Assume on the contrary, that $A \in \mathcal{A}$. Then there is a continuous function $f : E_1 \rightarrow E_1$ not injective and such that $f/_A$ is injective. Then there are numbers $a, b \in E_1$ such that

$a < b$ and $f(a) = f(b)$. Since f is a continuous function, it takes on the maximum and minimum value in $\langle a, b\rangle$. Since f is not constant, we can without loss of generality assume that $\max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(c) \neq f(a)$. Put $I_1 = f(\langle a, c)\rangle$, $I_2 = f(\langle c, b\rangle)$. Then I_1, I_2 are intervals with a common right-hand end-point. Let $I = I_1 \cap I_2$. Then $I \neq \emptyset$ is an interval and each of the sets $f(\langle a, c) \cap A) \cap I$, $f((c, b\rangle \cap A) \cap I$ is by Lemma 2 residual in I, and so $f(\langle a, c) \cap A \cap \cap f((c, b\rangle \cap A) = \emptyset$, contrary to the fact, that $f/_A$ is injective.

Corollary. There is a subset A of E_1 with zero Lebesgue measure and such that $A \notin \mathcal{A}$ and $E_1 \setminus A \in \mathcal{A}$.
Proof follows from the fact that there is a residual set A of zero Lebesgue measure (see e.g. [2], page 4). By the preceeding corollary the Lebesgue measure does not give a criterion for a set to belong to $\mathcal{A}$. The following two examples show that also the property to be a set of the second category cannot be used for such a criterion.

Example 1. The set E_1 can be decomposed into two complementary sets A and B such that both A and B are of the second category on every interval and $A \notin \mathcal{A}$, $B \notin \mathcal{A}$.

Proof. Let $\{F_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ be a sequence of the non-empty perfect sets (Ω is the first ordinal of the power of the continuum) and let $\{g_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ be the system of all continuous functions $E_1 \to E_1$, which are not injective.

Define transfinite sequence of finite sets $\{A_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ and $\{B_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ as follows: Assume that sequence of finite sets $\{A_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, $\{B_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, where $\beta < \Omega$, has been defined. Put $D = \bigcup_{\alpha<\beta}(A_\alpha \cup B_\alpha)$. Since the cardinality of D is less then the power of the continuum, there are elements $a_1, b_1 \in F_\beta \setminus D$, $a_1 \neq b_1$.

Choose elements a_2, a_3, b_2, b_3 such that a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 are six different elements, which do not belong to D and such that $f(a_2) = f(a_3)$, $f(b_2) = f(b_3)$ (this choice is possible, since the set $M = \{x \in E_1$, for which exists $y \in E_1$, $y \neq x$, $g(x) = g(y)\}$ has power of the continuum). Put $A_\beta = \{a_1, a_2\ a_3\}$ and $B_\beta = \{b_1, b_2, b_3\}$. The set $A = \bigcup_{\alpha < \Omega} A_\alpha$ is a set of the second category on every interval, because A has a common point with every non-empty perfect set. It is evident that $A \notin \mathcal{a}$. Now it is sufficient to put $B = E_1 \setminus A$.

Example 2. There is a decomposition $E_1 = A \cup B$ such that every of the sets A, B is of the second category on every interval and $A \in \mathcal{a}$, $B \in \mathcal{a}$.

Proof. Let $A' \cup B'$ be a decomposition of E_1 such that every set A', B' is of the second category on every interval. Assume that $0 \in A'$. Put $A = (A' \cap \langle 0, \infty)) \cup ((-B') \cap (-\infty, 0\rangle)$, where $-B' = \{x \in E_1;\ -x \in B'\}$. Then the function $g(x) = |x|$ is injective on A and on $E_1 \setminus A = B$. But g is not injective on E_1.

Note. It is possible to show, that if A is a set such that for some interval I, $A \cap I$ is of the first category, then $A \in \mathcal{a}$.

References

[1] Kuratowski, C.: Topologie I, Warszawa 1958

[2] Oxtoby, J. C.: Measure and Category, Springer, Berlin 1973

[3] American Mathematical Monthly, 81/1974/, No 6, Problem 5978

Author's address: Eva Pernecká
Hospodárska 3
921 01 Piešťany

Received: 17. 8. 1976

S ú h r n

O ROZŠIROVANÍ SPOJITÝCH FUNKCIÍ

Eva Pernecká, Bratislava

V práci je riešený takýto problém: Nech $\mathcal{A}$ je systém všetkých podmonžín $P \subset E_1$ s vlastnosťou: existuje spojitá funkcia $f: E_1 \to E_1$, ktorá nie je prostá, ale zúženie $f/_P$ je funkcia prostá.
Aké množiny patria do $\mathcal{A}$? Hlavné výsledky: Ak A je množina I. kategórie, potom $A \in \mathcal{A}$, a ak množina A je reziduálna, potom $A \notin \mathcal{A}$.

Р е з ю м е

О РАСШИРЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Ева Пернецка, Братислава

В работе решена такая проблема: Пусть $\mathcal{A}$ система подмножеств $P \subset E_1$ обладающих следующим свойством: существует неоднозначная непрерывная функция $f : E_1 \to E_1$, сужение f/P которой однозначно. Какие множества совпадают в $\mathcal{A}$? Главные результаты: Если A множество первой категории, то $A \in \mathcal{A}$, и если дополнение A' первой категории, то $A \notin \mathcal{A}$.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

A REMARK ON l^p SPACES

Tibor Šalát, Bratislava

Denote by $l^p (p \geq 1)$ the Banach space of all real sequences $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ with $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty$. The norm of the point $x \in l^p$ denote by $\|x\|_p$. We write l instead of l^1.

It is a well-known fact that for $1 \leq q < r < +\infty$ the inclusion $l^q \subset l^r$ holds (cf. [1], p. 190; [3], p. 22). In connection with this knowhedge we prove the following result on "the magnitude" of l^q in l^r.

Theorem. $1 \leq q < r < +\infty$. Then

(a) l is a dense subset of l^r;

(b) l^q is a set of the first Baire category in l^r.

If we take into consideration the fact that l^r is a complete metric space (cf. [3], p. 15, 19), then with respect to the well-known Baire's theorem (cf. [2], p. 80) we get the following:

Corollary. If $1 \leq q < r < +\infty$, then l^q is a dense set of the first Baire category in l^r and hence $l^r - l^q$ is a residual set of the second Baire category in l^r.

Proof of Theorem.

a) Let $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^r$, $\delta > 0$.

Choose a positive integer m such that

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |\xi_k|^r < \delta^r \tag{1}$$

Put $\eta_k = \xi_k$ for $k \leq m$, $\eta_k = 0$ for $k > m$.

Then evidently $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l$ and according to (1) we have

$$\| y - x \|_r = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |\xi_k|^r \right)^{\frac{1}{r}} < \delta$$

Hence l is a dense subset of l^r.

b) Let m be a natural number. We shall define the function $h_m : l^r \to R$ $(R = (-\infty, +\infty))$ in the following way:

For $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^r$ we put $h_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^q$

If $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^r$, $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^r$,

then for each $k = 1, 2, \ldots$ we have

$$|\xi_k - \eta_k| \leq \| x - y \|_r$$

From this it is easy to see that h_m is a continuous function on l^r .

Now we define for $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$:

$$h(x) = \lim_{m \to \infty} h_m(x) \quad (= \| x \|_q^q)$$

Since each of the functions $h_m \mid l^q$ $(m = 1, 2, \ldots)$ is continuous on l^q , the function $h : l^q \to R$ is in the first Baire class on the space l^q regarded as a subspace of l^r.

We shall show that h is discontinuous at each point $x \in l^q \subset l^r$. Let $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$, $\varepsilon > 0$.

We show that there exists such a point $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$ that

$$\| x - y \|_r < \varepsilon \tag{2}$$

and

$$h(y) - h(x) > 1 \tag{2'}$$

Choose a natural number s such that

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} | \xi_k |^r < (\tfrac{\varepsilon}{2})^r \tag{3}$$

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} | \xi_k |^q < (\tfrac{\varepsilon}{2})^r \tag{3'}$$

and

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} k^{-\frac{r}{q}} < (\tfrac{\varepsilon}{2})^r \tag{4}$$

Such an integer exists since $\sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k |^a < +\infty \quad (a = r,\ q)$

and $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{r}{q}} < +\infty$ for $\frac{r}{q} > 1$.

Put $\tau_k = \xi_k$ for $k \leq s$ and $\tau_k = 0$ for $k > s$.

Then $t = \{\tau_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$ and according to (3) we have

$$\| x - t \|_r < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

Choose an integer $v \geq 1$ such that

$$\sum_{k=s+1}^{s+v} k^{-1} > 1 + (\tfrac{\varepsilon}{2})^r \tag{6}$$

Such an integer exists on account of divergence of the series

$\sum_{j=1}^{\infty} (s+j)^{-1}$. Put $\eta_k = \tau_k$ for $k \leq s$, $\eta_k = k^{-\frac{1}{q}}$ for $s+1 \leq k \leq s+v$ and $\eta_k = 0$ for $k > s+v$.

Then $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$ and according to (4) we have

$$\| t - y \|_r < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

From (5), (7) we obtain (2).

Further

$$h(y) - h(x) = \sum_{k=s+1}^{s+v} k^{-1} - \sum_{k=s+1}^{\infty} |\xi_k|^q$$

and according to (3') and (6) we get (2').

Hence the real function h defined on the subspace l^q of l^r is discontinuous at each point of l^q . According to a well-known theorem on discontinuity points of functions of the first Baire class (cf. [2] , p. 182) the set l^q is a set of the first Baire category in the subspace l^q of l^r and hence also in l^r. This ends the proof.

In connection with the proved theorem the question arises whether an analogous result holds also for the spaces $L^p(X, \mu)$, where $1 \leq p < +\infty$, μ is a finite measure defined on a σ-algebra of subsets of the set X.

References

[1] N a t a s o n, I. P.: Teorija funkcij veščestvennoj peremennoj, Izd. Nauka, Moskva 1974.

[2] S i k o r s k i, R.: Funkcje rzeczywiste I, PWN, Warszawa 1958

[3] S i k o r s k i, R.: Funkcje rzeczywiste II,PWN, Warszawa 1959

Author's address: Tibor Šalát, Katedra algebry a teórie čísel PFUK
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 1. 9. 1976

S ú h r n

POZNÁMKA O PRIESTOROCH

Tibor Šalát, Bratislava

Ak $1 \leq q < r < +\infty$, potom $l^q (\subset l^r)$ je hustá množina prvej Baireovej kategórie v l^r.

Р е з ю м е

ЗАМЕТКА О ПРОСТРАНСТВАХ

Тибор Шалат, Братислава

Зсли $1 \leq q < r < +\infty$, то l^q $(\subset l^r)$ плотное множество первой категории Вера в l^r .

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО ТИПА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ III

Рудольф Кодкар, Братислава

Работа является непосредственным продолжением работ [1,2]. Рассматривается случай ортогональной анизотропии и показывается на возможность использования результатов в проблемах упруго-пластических.

Предпологаем впредь, что Ω ограниченная область евклидова пространства размерности 2 и $\partial\Omega$ ее граница. О функциях, постоянных и пространствах предпологаем, что они вещественные.

Ь Ω рассмотрим систему уравнений

$$\frac{D}{t}\left(\delta_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\delta_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\delta_3\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=\lambda\left[F_0,w\right]+\left[k,F\right]+\left[F,w\right]+q_1$$

$$-\frac{1}{E}\left(\delta_4\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\delta_5\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\delta_6\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right)=\frac{1}{2}\left[w,w\right]+\left[k,w\right]-q_2\,, \qquad (34)$$

где $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5,\delta_6$ положительные постоянные. Остальные обозначения одинаковые как в [1]. Частным случаем уравнений (34) являются уравнения в [3].

Систему (34) будем рассматривать в пространстве $W=H_1\times H_2$, где пространства H_1 (пространство функций w) и H_2 (пространство функций F) порождены краевыми условиями.

1. Пусть $\partial\Omega$ кривая с непрерывно изменяющейся нормалой, $\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2=\emptyset$ и $\operatorname{mes}\partial\Omega_1>0$, $\operatorname{mes}\partial\Omega_2>0$.
В этом случае будем систему (34) рассматривать при краевых усло-

виях

$$w|_{\partial\Omega_1} = \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_1} = F|_{\partial\Omega} = \frac{\partial F}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$w|_{\partial\Omega_2} = \mu(\Delta^1 w + \Delta^2 w) + (1-\mu)\Big[\delta_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}n_x^2 + 2\delta_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}n_x n_y + \delta_3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}n_y^2\Big] - \mu\Big[(\delta_1 n_y^2 + \delta_2 n_x^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\delta_2 n_y^2 + \delta_3 n_x^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big]\Big|_{\partial\Omega_2} = 0. \tag{35}$$

$n = (n_x, n_y)$ внешняя нормаль к Ω, μ постоянная ($0 \le \mu \le 1$).

$$\Delta^1 u = \delta_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \Delta^2 u = \delta_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta_3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Обозначим опять, как в [1]

$$V(\Omega) = \Big\{u \,\Big|\, u \in W_2^{(2)}(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0\Big\}$$

Для $u, v \in W_2^{(2)}(\Omega)$ рассмотрим билинейную форму

$$A_\delta(u,v) = \int_\Omega\Big[\delta_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu\delta_2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big) + 2\delta_2(1-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \delta_3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big]d\Omega \tag{36}$$

<u>Л е м м а 9.</u> Для $u \in V(\Omega)$ справедливо

$$R_1\|u\|^2_{W_2^{(2)}(\Omega)} \le A_\delta(u,u) \le R_2\|u\|^2_{W_2^{(2)}(\Omega)}, \tag{37}$$

где R_1, R_2 положительные постоянные, которые независят от u и Ω.

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Согласно леммы 1 [1] существуют положительные постоянные C_1, C_2, которые независят от u и Ω, исполняющие соотношения

$$C_1\|u\|^2_{W_2^{(2)}} \le \int_\Omega\Big[\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2 + 2(1-\mu)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2 + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big]d\Omega \le C_2\|u\|^2_{W_2^{(2)}}$$

Обозначим $C_1' = \min(1, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$,

$$C_2' = max(1, \delta_1, \delta_2, \delta_3).$$

Тогда $R_1 = C_1 \cdot C_1'$, $R_2 = C_2 \cdot C_2'$ и исполнено (37).

Простым вычислением можно легко показать, что билинейная форма $A_\delta(u,v)$ обладает всеми свойствами скалярного произведения. Пополним $V(\Omega)$ в норме пороженой скалярным произведением определеным формой $A_\delta(u,v)$. Полное пространство, которое получим обозначим $V_\delta(\Omega)$. Из конструкции пространства $V_\delta(\Omega)$ очевидно, что

$$\overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(\Omega) \subset V_\delta(\Omega) \subset W_2^{(2)}(\Omega).$$

В случае краевых условий (35) положим

$$H_1 = V_\delta(\Omega), \quad H_2 = \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(\Omega)$$

2. Если исполнены условия (35) и $\partial\Omega_2 = \emptyset$, то $\partial\Omega$ может быть липшицовская и положим $H_1 = H_2 = \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(\Omega)$.

3. Если $\partial\Omega$ прямоугольник, можем обсуждать еще краевые условия

$$w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{\partial\Omega} = F|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (38)$$

Обозначим $M = \{u \mid u \in W_2^{(2)}(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

На M введем скалярные произведения пологая по определению

$$\forall u, v \in M: \qquad (u,v)_1 = A_1(u,v), \qquad (39)$$

$$(u,v)_2 = A_2(u,v), \qquad (40)$$

где
$$A_1(u,v) = \int_\Omega \Big(\delta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\delta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \delta_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big) d\Omega,$$

$$A_2(u,v) = \int_\Omega \Big(\delta_4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\delta_5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \delta_6 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big) d\Omega.$$

Легкими вычислениями можно показать, что скалярные произведения введены соотношениями (39), (40) имеют все свойства скалярного произведения.

Пополнение множества M в норме порожденой скалярным произведением (39) обозначим $V_1(\Omega)$ и пополнение M в норме порожденой (40) $V_2(\Omega)$. Пространства $V_1(\Omega)$, $V_2(\Omega)$ имеют свойства пространства $W_2^{(2)}(\Omega)$, что можно показать использованием неравенств Фридрихса и Пуанкаре. В случае краевых условий (38) положим $H_1 = V_1(\Omega)$, $H_2 = V_2(\Omega)$.

Пространство $W = H_1 \times H_2$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(h_1, h_2)_W = (w_1, w_2)_{H_1} + (F_1, F_2)_{H_2},$$

где $h_i = \langle w_i, F_i \rangle \in W$, $i = 1, 2$.

<u>Определение 6.</u> а) Пару $\langle w, F \rangle \in W$ будем называть обобщенным решением системы (34) при краевых условиях (35), если для любой пары $\langle \varphi, \psi \rangle \in W$

$$\frac{D}{t} A_\delta(w, \varphi) = L(F, w, \varphi) + \lambda L(F_0, w, \varphi) + L(k, F, \varphi) + \int_\Omega q_1(x,y)\, \varphi(x,y)\, d\Omega,$$

$$\frac{1}{E} A_2(F, \psi) = -\frac{1}{2} L(w, w, \psi) - L(k, w, \psi) + \int_\Omega q_2(x,y)\, \psi(x,y)\, d\Omega$$

б) Пару $\langle w, F \rangle \in W$ будем называть обобщенным решением системы (34) при краевых условиях (35) и $\partial\Omega_2 = \varnothing$, или краевых условиях (38), если для любой пары $\langle \varphi, \psi \rangle \in W$

$$\frac{D}{t} A_1(w, F) = L(F, w, \varphi) + \lambda L(F_0, w, \varphi) + L(k, F, \varphi) + \int_\Omega q_1(x,y)\, \varphi(x,y)\, d\Omega,$$

$$\frac{1}{E} A_2(F, \psi) = -\frac{1}{2} L(w, w, \psi) - L(k, w, \psi) + \int_\Omega q_2(x,y)\, \psi(x,y)\, d\Omega.$$

В определении 6 пользуемся обозначением

$$L(\varphi,\psi,\xi)=\int_\Omega\Big[\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big)\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big]\partial\Omega$$

Таким образом как в [1] можно конструировать операторы вида G и T. В нашем случае обозначим эти операторы G_δ, T_δ, G_{12}, T_{12}. Они опять действуют в пространстве W.

Операторы G_δ, G_{12} потенциальные. Отвечающее функционалы имеют вид

$$\Phi_\delta=\frac{D}{t}A_\delta(w,w)-\frac{1}{2E}A_2(F,F)-\frac{\lambda}{2}([F_0,w],w)_{L_2}-$$
$$-([k,F],w)_{L_2}-\frac{1}{2}([F,w],w)_{L_2}-\int_\Omega(q_1w-q_2F)\,d\Omega.$$

Функционал Φ_{12} будет одинаковый, только вместо $A_\delta(w,w)$ будет квадратическая форма $A_1(w,w)$.

Как в [1] можно доказать эти утверждения:

<u>Лемма 10.</u> Функционалы Φ_δ и Φ_{12} слабо полунепрерывные снизу на W.

<u>Лемма 11.</u> Операторы G_δ, G_{12} на W ограниченные, непрерывные и их нелинейные части вполне непрерывные.

<u>Лемма 12.</u> Пусть F решение второго уравнения из системы (34) в смысле определения 6. Тогда Φ_δ и Φ_{12} возрастающее на W.

<u>Теорема 11.</u> Для $q_1,q_2\in L_1(\Omega)$, F_0, $k\in W_2^{(2)}(\Omega)$ существует хотя бы одно решение задач из определения 6.

Пусть Q ограниченная область в пространстве W и $\Theta\in Q$. Пусть $k(x,y)$, $F_0(x,y)$ функции из пространства $W_2^{(2)}(\Omega)$ и $q_1,q_2\in L_1(\Omega)$ Пусть для $h\in\partial Q$

$$(T_\delta h,h)_W\geq 0,\quad (T_{12}h,h)_W\geq 0.$$

Тогда имеет место

Теорема 12. Задачи из определения 6 имеют хотя бы одно решение в Q. Если в Q существует только одно решение, то существуют все галеркинские приближения этого решения и стремятся к решению в норме пространства W.

Замечание 4. Операторы T_σ, T_{12} не являются потенциальными.

Доказательство. Явно покажется, что не исполнено необходимое условие потенциальности [4].

В случае $q_1 \equiv q_2 \equiv 0$ можно проблемы точек бифуркации системы (34) решить так как в [2]. Мы бы получили теорему

Теорема 13. Для того чтобы λ_0 было точной бифуркации задач из определения 6 при $q_1 \equiv q_2 \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы задачи

а) $\frac{D}{t} A_\sigma(w,\varphi) - ([k,F],\varphi)_{L_2} = \lambda_0([F_0,w],\varphi)_{L_2}$,

$\frac{1}{E} A_2(F,\psi) = -([k,w],\psi)_{L_2}$,

или б) $\frac{D}{t} A_1(w,\varphi) - ([k,F],\varphi)_{L_2} = \lambda_0([F_0,w],\varphi)_{L_2}$,

$\frac{1}{E} A_2(F,\psi) = -([k,w],\psi)_{L_2}$,

имели для любых $\langle\varphi,\psi\rangle \in W$ ненулевое решение $\langle w, F\rangle$ из пространства W.

Замечание 5. Соображения из этой работы можно применить для решения упростеных задач о ровновесии гибких упруго-пластических пластинок при больших прогибах [5], §3.

Литература

[1] K o d n á r R.: Qualitative Eigenschaften eines Typs von Randwertproblemen I., Acta F.R.N.Univ.Comen.-Mathematica (im Druck).

[2] K o d n á r R.: Qualitative Eigenschaften eines Typs von Randwertproblemen II., Acta F.R.N.Univ.Comen._Mathematica (im Druck).

[3] М о р о з о в Н. Ф.: Нелинейные задачи теории тонких анизотропных пластин, Изв.высш.учеб.завед.-Математика, № 6, 1960.

[4] В а й н б е р г М. М.: Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Москва 1956.

[5] Л е п и к Ю. Р.: Равновесие гибких упруго-пластических пластинок при больших прогибах, Инж.сборник XXIV ,1956.

Author's address: Kodnár Rudolf, Ústav aplikovanej matematiky a výp.tech. PFUK, Mlynská dolina, 816 31 Bratislava

Received: September 17.,1976

S ú h r n

KVALITATÍVNE VLASTNOSTI JEDNÉHO TYPU OKRAJOVÝCH ÚLOH III

Rudolf Kodnár, Bratislava

Práca bezprostredne nadväzuje na práce [1,2] . Rozpracovaný je prípad ortogonálnej anizotropie a poukazuje sa na možnosť využitia výsledkov v pružno-plastických problémoch.

Z u s a m m e n f a s s u n g

QUALITATIVE EIGENSCHAFTEN EINES TYPS VON RANDWERTPROBLEMEN III

Rudolf Kodnár, Bratislava

Die Arbeit knüpft unmittelbar an die Arbeiten [1,2] an. Es wurde ein Fall orthogonaler Anisotropie bearbeitet und auf die Möglichkeit der Benützung von Ergebnissen in elastisch-plastischen Problemen hingewiesen.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

VARIOTIONAL INEQUALITY FOR THE ORTHOTROPIC PLATE REINFORCED WITH STIFFENING RIBS

R. Kodnár, J. Lovíšek, Bratislava

In this paper, we examine unilateral pheonomena for elastic orthotropic plate reinforced with stiffening ribs. For the aproximation of the solution of variational inequalities one can employ the finite element technique - see [1], [3], [5].
Let Ω be a bounded region in the plane x, y with the boundary $\partial\Omega$.
Let us study in Ω a system of partial differential equations

$$A(w) = D_1 w_{xxxx} + 2D_3 w_{xxyy} + D_2 w_{yyyy} = p(x, y)^{1)} \qquad (1)$$

$$L_{\tau k,s} = \rho_k^{-1} L_{nk} - m_k(s), \quad L_{nk,s} = -\rho_k^{-1} L_{\tau k} + V_{bk} \qquad (2)$$

where

$L_{\tau k}$, L_{nk} are the internals forced of the rib γ_k:

$$L_{\tau k} = C_k(\theta_{k,s} - \rho_k^{-1}\theta_{nk}), \quad L_{nk} = A_k(\theta_{nk,s} - \rho_k^{-1}\theta_k) \qquad (3)$$

ρ_k is a variable radius of curvature of a sufficiently smooth

1/ Hence forth we shall denote $\frac{\partial w}{\partial x} = w_x$, $L_{\tau k,s} = \frac{dL_{\tau k}}{ds}$

curve γ_k for $k = 1, 2, \ldots, \ell$,

C_k is the torsional rigidity of the rib,

A_k is bending rigidity of the rib with respect to the axis n, where n is the normal to the tangent τ of the curve γ_k on the section s,

V_{bk} is the shearing force on the section s of the stiffening rib γ_k defined by the equations

$$V_{bk} = - \int_0^s p_k(s)ds + \text{const.}, \quad \text{and}$$

$p_k(s) = p_{ok}(s) - p_{kk}$, s is the vertical load (shearing forces), which acts on the k-th rib and which accordind to the definition is equal to the difference of the shearing forces $p_{ok}(s)$, $p_{kk}(s)$ on the k-th rib γ_k from the side of the regions Ω_o, Ω_k, respectively.

Analogously the resulting moment load (bending moments) $m_k(s) = m_{ok}(s) - m_{kk}(s)$, will act upon the k-th stiffening rib γ_k, where $m_{ok}(s)$, $m_{kk}(s)$ are individual bending moments acting upon the k-th rib from the side of the regions Ω_o and Ω_k, respectively.

$\theta_{\tau k}$, θ_{nk} are the deformation parameters of the k-th rib defined by

$$\theta_{\tau k} = \frac{d\,\Delta_k}{dn}, \quad \theta_{nk} = - \frac{d\,\Delta_k}{ds}; \quad \Delta_k = w_o - w_k$$

is the deflection ordinate on the γ_k axis of the k-th rib, w_o, w_k are the deflection ordinates of the regions Ω_o and Ω_k and for each $k = 1, 2, \ldots, \ell$ it holds

$$\frac{\partial w_k}{\partial n} + \frac{\partial w_k}{\partial s} = \theta_{\tau k} - \theta_{nk} \qquad (1)$$

The curve $\Gamma = \bigcup_{1}^{\ell} \gamma_k$ divides the region into $\ell + 1$ subregions. Then $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 + \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_\ell$. For the sake of simplicity let us suppose that regions $\Omega_k (k = 1, 2, \ldots, \ell)$ are simply connected while Ω_0 is a multiple-connected region bounded by the set of curves Γ and by $\partial \Omega = \bigcup_{1}^{m+1} \partial \Omega_j^*$. The curve $\partial \Omega_{m+1}^*$ encircles all the other curves $\partial \Omega_j^*$ and the curves Γ and $\partial \Omega$ do not touch nor intersect each other. The given vertical load of the plate applied to the region is defined by a function $p = p(x, y)$.

The following notation is introduced for the constants:

$D_1 = D_{11}$, $D_2 = D_{22}$, $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$, where D_{ij} are the rigids of an orthotropic thin plate.

The physical reality, i.e. the non-negativity of work of the internal forces of an orthotropic plate with stiffening ribs implies that the matrix of coefficients

$$D = \begin{bmatrix} D_1, & D_3 \\ D_3, & D_2 \end{bmatrix} \qquad (1^o)$$

is positively definite. Taking into account the Silvester Theorem we obtain from the positive definiteness of the quadratic form of the five unknown quantities w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, $L_{\tau k}$, L_{nk},

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad D_{66} > 0, \quad D_1 D_2 - D_{12}^2 > 0 \quad ([7]). \qquad (2^o)$$

Equations (1), (2) will be examined in the bounded region Ω, which is a multiple-connected region with a Lipschitzian boundary $\partial \Omega$. It is assumed that $\partial \Omega$ consists of two disjoint parts $\partial \Omega_1$ and $\partial \Omega_2$ such that

$$\partial \Omega = \partial \Omega_1 \cup \partial \Omega_2 \text{, where}$$

mes $\partial\Omega_1 > 0$. The boundary conditions are considered in the form

$$w|\partial\Omega_1 = \frac{\partial w}{\partial n}|\partial\Omega_1 = 0 \qquad (4_1)$$

$$w|\partial\Omega_2 = 0 \qquad (4_2)$$

$$\overline{m}_n = - w_{xx}(D_1 n_x^2 + D_{12} n_y^2) - w_{yy}(D_{12} n_x^2 + D_2 n_y^2) -$$

$$- 4 w_{xy} D_{66} n_x n_y \Big|_{\partial\Omega_2} = m_2$$

where $n = (n_x, n_y)$ is the external normal with regard to Ω, $\overline{m}_n$ is a statical quantity, the bending moment on the surface of the boundary $\partial\Omega_2$ with the normal n.

Within the region Ω the following geometric conditions are formulated for the function w (x, y):

$$w^+|_{\gamma_k} = w^-|_{\gamma_k}$$

$$\frac{\partial w^+}{\partial n}\Big|_{\gamma_k} = \frac{\partial w^-}{\partial n}\Big|_{\gamma_k} \quad (k = 1,2,\ldots,l) \qquad (4_3)$$

The superscript plus or minus indicates that the quantity in question refers to the region Ω_0 or Ω_k, respectively. The mechanical meaning of these conditions is as follows: in $\partial\Omega_1$ the plate is clamped, in $\partial\Omega_2$ it is simply supported and the deflection surface is smooth over the region Ω.

Terminology. Let Ω be a bounded region in the plane x, y whose boundary is Lipschitzian (see [6]).
$L_p(\Omega)$ denotes the space of all measurable functions integrable with the power p on Ω (with regard to the Lebesque measure dx dy).
Further let us adopt the notation

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i , \quad D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$$

Let us define the Sobolev space $W_2^2(\Omega)$ by

$$W_2^2(\Omega) = \{ u \mid u \in L_2(\Omega),\ D^{\alpha} u \in L_2(\Omega),\ |\alpha| \leq 2 \},$$

(the derivatives are taken in the sence of distributions).
$W_2^2(\Omega)$ is a Banach space with respect to the norm

$$\| u \|_{W_2^2} = \{ \int_{\Omega} u^2 dxdy + \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} (D^{\alpha} u)^2 dxdy \}^{1/2}$$

The space $W_2^2(\Omega)$ with a scalar product

$$(u, v)_{W_2^2} = \int_{\Omega} uvdxdy + \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} D^{\alpha} u\, D^{\alpha} v\, dxdy$$

is a Hilbert space.
$\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ denotes a subspace $W_2^2(\Omega)$ which is obtained as the closure of the space $\mathcal{D}(\Omega)$ in the norm $\| . \|_{W_2^2}$ ($\mathcal{D}(\Omega) = \{ \varphi \mid \varphi$ are infinitely differentiable functions with a compact support in $\Omega \}$.
The scalar product defined in $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ by

$$(u, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} = \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} D^{\alpha} u\, D^{\alpha} v\, dxdy$$

generates in $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ the norm $\| . \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2}$ which is equivalent to the norm $\| . \|_{W_2^2}$ in $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$.
For the purpose of studying of unilateral phenomena for flat elastic orthotropic plate reinforced with stiffenig ribs, let us define a space $V(\Omega)$ in the following way:
Let

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{ u \mid u \in \mathcal{E}(\bar{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega_1} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_1} = 0,\ u|_{\partial\Omega_2} = 0 \}$$

then $V(\Omega)$ is the closure of $\mathcal{V}(\Omega)$ in the norm

$$\|u\|_{H(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{W_2^2} + \|u\|^2_{K(\Gamma)} \right)^{1/2} \tag{ii}$$

where

$$\|u\|^2_{K(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{\ell} \left(\|L_{\tau k}(u)\|^2_{L_2(\gamma_k)} + \|L_{nk}(u)\|^2_{L_2(\gamma_k)} \right)$$

And finally, closed convex subset of $V(\Omega)$, subset $K(\Omega)$ will be defined as the closure of $\{u \in \mathcal{V}(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega_2'} \geqslant 0,\ \partial\Omega_2' \subset \partial\Omega_2\}$, in the norm (ii) (it is subspace of virtual displacements and the cone of admissible virtual displacements, respectively).

$\mathcal{E}(\bar{\Omega})$ is a set of functions infinitely differentiable in Ω, whose all derivatives may be continuously extended to the boundary $\partial\Omega$. Let us further denote by $C_0(\bar{\Omega})$ the space of all real functions continuous in $\bar{\Omega}$ and equal to zero on $\partial\Omega$, $C_c(\bar{\Omega})$ being the space of real functions continuous in Ω and equal to zero outside a certain compact subset of Ω. From the Sobolev theorems on imbeddings (see [6]) we obtain that $V(\Omega) \subset C_0(\bar{\Omega})$ both algebraically and topologically.

Because $C_c(\bar{\Omega})$ is dense in $C_0(\bar{\Omega})$ each of the elements in $(C_0(\bar{\Omega}))^*$ may be identified by means of a transposition with the element in $(C_c(\bar{\Omega}))^*$. Hence in our further considerations the Dirac measure $\delta = \delta(x_0, y_0)((x_0, y_0) \in \Omega)$ represents a singular vertical load in (1). If $p \in (C_0(\bar{\Omega}))^*$ and $\varphi \in C_0(\bar{\Omega})$ then the value of p for the function φ will be denoted by $\langle p, \varphi \rangle$. Let us note that $L_1(\Omega) \subset (C_0(\bar{\Omega}))^*$ implies

$$\langle p, \varphi \rangle = \int_{\Omega} p(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

It follows from the Sobolev theorems on imbeddings and from the theorems on traces that for each $u \in V(\Omega)$, $u = 0$ pointwise in $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ (see [6]) and $\partial u/\partial n$ in the sence of traces in $\partial\Omega_1$. For the study of our variational inequality it is necessary to introduce by means of a bilinear form a new scalar product in $V(\Omega)$ of the form

$$a(u,\ v) = \int_{\Omega} [D_{11}u_{xx}v_{xx} + 2D_{12}u_{xx}v_{yy} + D_{22}u_{yy}v_{yy} +$$

$$+ 4D_{66}u_{xy}v_{xy}]\,dxdy + \sum_{k=1}^{\ell} \int_{\gamma_k} [L_{\tau k}(u)L_{\tau k}(v) + L_{nk}(u)L_{nk}(v)]\,ds \tag{5}$$

In the case of a rectangular plate the bilinear form (5) may be taken in a simpler form

$$a(u,\ v) = \int_{\Omega} [D_1u_{xx}v_{xx} + 2D_3u_{xy}v_{xy} + D_2u_{yy}v_{yy}]\,dxdy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\ell} \int_{\gamma_k} [L_{k}(u)L_{k}(v) + L_{nk}(u)L_{nk}(v)]\,ds$$

<u>Lemma 1</u>. There exist positive constants c_1, $c_2 > 0$ for which

$$c_1\|u\|_H^2 \leq a(u,\ u) \leq c_2\|u\|_H \tag{6}$$

holds for all $u \in V(\Omega)$.

<u>Proof</u>. The first inequality in (6) follows from (1^o), (2^o) and from [2; Theorem 2.1], while the other inequality is evident.

<u>Lemma 2</u>. The bilinear form $a(u,\ v)$ is symmetric in the space $V(\Omega)$.

<u>Proof</u>. It is easy to prove by integration by parts - - the Green Theorem, the integral identity

$$a(u, v) = (A(u), v)_{L_2(\Omega)} - (\overline{m}_n(u), v_n)_{L_2(\partial\Omega)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \int_{\gamma_k} [\, L_{\tau k}(u) L_{\tau k}(v) + L_{nk}(u) L_{nk}(v) \,]\, ds$$

for each $u, v \in V(\Omega)$.

The identity (7) shows that the bilinear form a (u, v) is symmetric in $V(\Omega)$, if the linear operator $A(w)$ is symmetric in the space $V(\Omega)$. The symmetry of the operator $A(w)$ is, however, proved by a usual application of the Green Theorem under the assumption that the boundary $\partial\Omega$ is smooth. After a simple rearrangement we obtain:

$$(A(u), v)_{L_2(\Omega)} - (\overline{m}_n(u), v_n)_{L_2(\partial\Omega)} = (u, A(v))_{L_2(\Omega)} -$$

$$- (u_n, \overline{m}_n(v))_{L_2(\partial\Omega)} \tag{8}$$

Which substituted into (7) yields

$$a(u, v) = (A(v), u)_{L_2(\Omega)} - (\overline{m}_n(v), u_n)_{L_2(\partial\Omega)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \int_{\gamma_k} [\, L_{\tau k}(v) L_{\tau k}(u) + L_{nk}(v) L_{nk}(u) \,]\, ds$$

In view of the identity (8) we obtain

$$a(v, u) = (A(u), v)_{L_2(\Omega)} - (\overline{m}_n(u), v_n)_{L_2(\partial\Omega)} +$$

$$+ \sum_{k=1} \int_{\gamma_k} [\, L_{\tau k}(u) L_{\tau k}(v) + L_{nk}(u) L_{nk}(v) \,]\, ds = a(u, v) \tag{9}$$

In this way, the symmetry of the bilinear form a (u, v) in the space $V(\Omega)$ is proved.

Lemma 1, 2 implies that $V(\Omega)$ with a scalar product defined by

$$(u, v)_{V(\Omega)} = a(u, v) \tag{10}$$

is a Hilbert space. Hence the inclusion $V(\Omega) \subset W_2^2(\Omega)$ is evident, the bedding being continuous.

The vertical deflection w (x, y) which is the unknown in this problem, satisfies the equations (1) and (2) in Ω and Γ , respectively in the form

$$a(w, v) = \langle p, v \rangle + \int_{\partial\Omega_2} m_2 \frac{\partial v}{\partial n} \, ds = L_{(v)}, \quad \forall v \in V(\Omega) \qquad (11)$$

The integral identity (11) can be obtained formally by multiplying (1) by the test function $v \in V(\Omega)$, integrating by parts and making use of the boundary conditions (4_1, 4_2). Then we multiply the second and the first equation from (2) by the test function $C_k v$, $A_k(^{\partial v}/\partial n)$, respectively. After integration by parts over a closed curve γ_k for $k = 1, 2, \ldots, \ell$ with regard to (i), the Glebsch's and Kirchoff's relationships [8], we obtain finally the integral identity (11).

The functional of potential energy can be as

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \qquad (12)$$

Problem P.

We then consider the approximation of problems of the following type:

Find $u \in K(\Omega)$ such that

$$J(u) \leq J(v), \qquad \forall v \in K(\Omega) \qquad (13)$$

L e m m a 3. A functional $L(v) = \langle p, v \rangle + \int_{\partial\Omega_2} m_2(\partial v/\partial n) \, ds$ represents a bounded linear functional in $V(\Omega)$.

P r o o f . It is obvious that functional L(v) is linear in the space $V(\Omega)$. In virtue of the continuity of operators of traces in $W_2^2(\Omega)$ and of the Sobolev Theorem on imbeddings, the following estimate for L(v) is obtained

$$\left| \int_{\partial\Omega_2} m_2 \frac{\partial v}{\partial n} \, ds + \langle p, v \rangle \right| \leq \text{const}(\| m_2 \|_{L_2(\partial\Omega_2)} +$$

$$+ \| p \|_{(C_0(\bar{\Omega}))^*}) \| v \|_{V(\Omega)},$$

from which the boundedness of the functional $L(v)$ in $V(\Omega)$ follows. So we have according to the Riesz-Fréchet representation theorem

$$L(v) = (p^*, v)_{V(\Omega)}$$

where $p^* \in V(\Omega)$ and $\| L \|_{V(\Omega)} = \| p^* \|_{V(\Omega)}$.

It is easy to verify that:

Problem P is equivalent to the variational inequality

$$a(u, v-u) \geq (p , v-u)_{V(\Omega)}$$

for each $v \in K(\Omega)$

<u>Theorem 1</u>. Exists a unique solution of problem P. The map $p^* \to u$ (generally nonlinear) is continuos from $V(\Omega)$ into $V(\Omega)$.

<u>Proof</u>. Let u_i, $i = 1, 2$ be solutions in $K(\Omega)$ of

$$a(u_i, v-u_i) \geq (p_i^*, v-u_i)_{V(\Omega)} , \quad \forall v \in K(\Omega)$$

with $p_i^* \in V(\Omega)$.

Setting $v = u_2$ in the inequality for $i = 1$ and $v = u_1$ for $i = 2$ and adding one has

$$0 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq (p_1^* - p_2^*, u_1 - u_2)_{V(\Omega)}$$

Now from (6) it follows that

$$c_1 \| u_1 - u_2 \|^2_{V(\Omega)} \leq \| p_1^* - p_2^* \|_{V(\Omega)} \| u_1 - u_2 \|_{V(\Omega)}$$

and so

$$\| u_1 - u_2 \|_{V(\Omega)} \leq \frac{1}{C_1} \| p_1^* - p_2^* \|_{V(\Omega)}$$

This implies uniqueness and continuity.

The set $K(\Omega)$ being closed and convex in $V(\Omega)$, is weakly closed.

For the second Gâteaux differential of the functional (potential energy)

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v)$$

we may write

$$D^2 J(u, v, v) = a(v, v) \geq C_1 \| v \|^2_{V(\Omega)}, \quad u \in V(\Omega), \quad v \in K(\Omega).$$

Therefore $J(v)$ is weakly lower semicontinuous and coercive.

The existence of a solution follows.

FINITE ELEMENT APROXIMATIONS

The finite element method may be viewed as an analoque of the Ritz-Galerkin procedure with a special choice of basic functions. The Ritz-Galerkin method has one very favourable property, namely, the admissibility of basic function in the trial variational principle quarantees its convergence.

Finite element of analysis is the piecewise approximation of the solution of a problem in variational form. The variational principles frequently are associated with an elliptic boundary value problem.

Certain approximations to the variational principle are used in practice. Strang calls these "variational crimes". The form of the variational problem requires the approximation to have a certain smoothness in order that they "conform" to the theory, e.g. for fourth order problems, conforming elements have $C^1(\Omega)$ continuity.

This requirement leads to complicated finite alements. Engineers have sometimes chosen simpler elements that are "nonconforming" i.e. smooth enough to fit the theory. For example over a triangulation $C^1(\Omega)$ polynomial elements are of fifth degree whereas a frequently used element is of second degree. Some nonconforming elements converge in practice. Irons "patch-test" attempted to justify there results and has since been shown to be theoretically sound [9] . The conforming method as well as the Ritz-Galerkin procedure may be too complicated, while the nonconforming method is much simpler. A nonconforming solution, especially for few elements of division, may be more exact then the conforming one and in comparison with Ritz-Galerkin method it is not so "stiff".

We consider a finite method for obtaining error estimates for the approximation of variational inequality in the problem of clamped orthotropic plate with ribs. The approximate problem is simply.

Problem P_h. Find $u_h \in K_h(\Omega)$ such that

$$J(u_h) \leqq J(v_h), \quad \text{for each } v_h \in K_h(\Omega) \tag{16}$$

where

$$J(v_h) = \frac{1}{2}\, a\,(v_h, v_h) - (p^*, v_h)_{V_h(\Omega)}$$

$K_h(\Omega)$ is a closed convex subset of $V_h(\Omega)$ (be a finite dimensional spaces, in general $V_h(\Omega) \not\subset V(\Omega)$).

We remark that Problem P_h is equivalent to:

Find $u_h \in K_h(\Omega)$ such that

$$a(u_h, v_h-u_h) \geqq (p^*, v_h-u_h)_{V_h(\Omega)}, \quad \text{for each } v_h \in K_h(\Omega)$$

For simplicity we restrict ourselves to rectangle domains.

The plate before deformation is situated in the three-dimensional space R^3 so that its middle plane and the plane $Oxy = R^2$ coincide.

In the middle plane Oxy the plane occupies a region Ω.
For the sake of simplicity we assume

$$\Omega \equiv (-a, a) \times (-b, b)$$

where a, b are positive constants. Let

$$M = \{M_i\}_{i=1}^{n}$$

be the set of straight line segments in Ω characterizing ribs that are to y - axis, while $N = \{N_j\}_{j=1}^{m}$ is the set of similar segments parallel to x - axis. The endpoints of the segments lie on the boundary of Ω, i.e.

$$M_i = \{[x, y] \in R^2 \mid x = x_i, \ y \in (-b, b)\}$$

$$N_j = \{[x, y] \in R^2 \mid x \in (-a, a), \ y = y_j\}$$

$-a < x_i < a$, $-b < y_j < b$; x_i, y_j are constans

$i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$

The approximation of the problem defined above is based on the following idea:
We introduce a family $\{V_h(\Omega)\}_{h \in (0, 1\rangle}$ of finite dimensional space $V_h(\Omega)$. For any $h \in (0, 1\rangle$ we define

$$K_h(\Omega) = \{u \mid u \in V_h(\Omega), \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_2'} \geq 0\}$$

Obviously, $K_h(\Omega) \subset K(\Omega)$ for each $H \in (0, 1\rangle$. The family $\{K_h(\Omega)\}_{h \in (0, 1\rangle}$ is used to find an approximative solution $u_h \in K_h(\Omega)$

The essential difference betwen (13), (14) and (16), (17) is that in (17) the energy a(.,.) is calculated separately in each element whereas in (14) it is calculated over the region as a whole. In the case the conforming elements (14) and (17) are equivalent but in the case of nonconforming element we do not have the inclusion $V_h(\Omega) \subset V(\Omega)$ and thus although (17) is still well defined (14) and (17) are by no means equivalent since the energy in (14) becomes infinite. Since (17) makes sence, we can utilise (17) to find a nonconforming solution u_h, this solution may not, however, converge to the true solution u. The behaviour of u_h depends crucially on an idea due to [9], [10] and [1], this is now known as the patch - - test.

Suppose the following:

i) the energy a(.,.) contains derivates of order k,

ii) the nonconforming trial space is such that $Q_k \subset V_h(\Omega)$, (where $Q_k = \{ p_k \mid p_k$ is a polynomial of degree $\leq k \}$),

iii) boundary conditions and the right hand side of the original p.d.e are chosen so that the solution

$$u = p_k \in Q_k$$

We consider a division $\Omega_h = \{\Omega_{ih}\}_{i=1}^{k(h)}$ consisting of open rectangles Ω_{ih}, $i = 1, 2, \ldots, k(h)$ for $h \in (0, 1\rangle$ such that

1° $\quad \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{k(h)} \Omega_{ih}$

2° $\quad \Omega_{ih} \cap \Omega_{jh} = \emptyset$, $\quad i, j = 1, \ldots, k(h)$, $\quad i \neq j$

3° an edge of any rectangle $\Omega_{ih} \in \Omega_h$ either, an edge of another rectangle $\Omega_{jh} \in \Omega_h$, $j \neq i$ or a partion $\partial\Omega$ or Γ or γ, $\Gamma \in M$, $\gamma \in N$.

We shall suppose the sequence $\{\Omega_h\}_{h \in (0,\, 1\rangle}$ of rectangulation is a regulary family i.e. with each rectangle Ω_{ih} of a given division Ω_h we associate the following geometrical parameters:

$h(\Omega_{ih})$ .... diameter of Ω_{ih},

$\varrho(\Omega_{ih})$ .... supremum of diameters of spheres in Ω_{ih} .

Then

$$h \geq \max\{h(\Omega_{ih}),\ i = 1,2,\ \ldots,\ k(h)\}$$

and

$$0 < \bar{\gamma} \leq \min\left\{\frac{\varrho(\Omega_{ih})}{h(\Omega_{ih})},\ i = 1,2,\ \ldots,\ k(h)\right\}$$

for each $h \in (0,\, 1\rangle$, where $\bar{\gamma}$ is a fixed real number. The space $V_h(\Omega)$ we define in the following way:

$$v_h \in V_h(\Omega) : \Omega \to R^2;\quad v_h/\Omega_{ih} \in B(\Omega_{ih})$$

where

$$B(\Omega_{ij}) = \{\varphi \mid \varphi = \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=3}} a_{ij}x^i y^j + a_{31}x^3y + a_{13}xy^3, [x,y] \in \Omega_{ij}$$

Elements of the space $B(\Omega_{ij})$ are the so-called Ari-Adinis polynomials. The patch-test, as stated by Irons, then requires the finite element solution $u_h \in K_h(\Omega)$ calculated by solving of variational inequality

$$a(u_h,\ v_h-u_h) \geq (p^*,\ v_h-u_h)_{V_h(\Omega)}$$

$$\text{for each}\quad v_h \in K_h(\Omega)$$

where

$$a(u_h, v_h-u_h) = \int_{\Omega} [D_1 u_{h,xx}(v_{h,xx}-u_{h,xx}) + 2D_3 u_{h,xy}(v_{h,xy} -$$

$$- u_{h,xy}) + D_2 u_{h,yy}(v_{h,yy}-u_{h,yy})] \, dxdy +$$

$$+ \sum_{\Gamma \in M} \int_{\Gamma} u_{h,yy}(v_{h,yy}-u_{h,yy}) \, dy +$$

$$+ \sum_{\gamma \in N} \int_{\gamma} u_{h,xx} (v_{h,xx}-u_{h,xx}) \, dx$$

(assume that the torsional rigidity of ribs is sufficiently small) i.e. by ignoring inter - element discontinuities is identicaly p_k. The patch-test was first examined from a mathematical viewpoint by Strang [10]. In a similar vein to Strang, we have the following: the patch-test is passed if and only if

$$a(p_k, v_h) = (Ap_k, v_h)_h \tag{18}$$

A neat way of showing the equivalence of Iron's statement of the patch-test with (18) is via the following inequalities (see Strang and Fix [10], [9]).

Define

$$\| u - u_h \|_h = (a(u - u_h, u - u_h))^{1/2}$$

Then

$$\| u - u_h \|_h \geq \frac{| a(u,v_h) - (Au,v_h)_h |}{\| v_h \|_h}, \text{ for each } v_h \in V_h(\Omega) \tag{19}$$

$$\| u - u_h \|_h \leq \max_{v_h \in V_h(\Omega)} \frac{| a(u,v_h) - (Au,v_h)_h |}{\| v_h \|_h} +$$

$$+ \min_{v_h \in V_h(\Omega)} \| u - v_h \|_h \tag{20}$$

The inequality (20) along (18) is fundamental in obtaining convergence results for nonconforming trial-space.

We equip the space $V_h(\Omega)$ with the natural norm $\|\cdot\|_h$

$$\|w\|_{V_h(\Omega)} = \|w\|_h = \{\|w\|^2_{W^2_{2,h}} + \sum_{\Gamma\in M} \|w\|^2_{W^2_2(\Gamma)} + \sum_{\gamma\in N} \|w\|^2_{W^2_2(\gamma)}\}^{1/2}$$

where

$$\|w\|_{W^2_{2,h}} = (\sum_{i=1}^{k(h)} \|w\|^2_{W^2_2(\Omega_{ih})})^{1/2}$$

All results of this chapter can be easily extanded to a more general case.

Since the functions v_h are smooth in each element, we may use integration by parts in (18) to obtain a further restatement of the patch-test. In the case of fourth order problems, sufficient conditions for the patch-test to be passed are

1) on boundary segments $\partial\bar{\Omega}_{ih}$

$$\int_{\partial\bar{\Omega}_{ih}} \frac{\partial v_h}{\partial n}\, ds = 0 \quad \text{and} \quad \int_{\partial\bar{\Omega}_{ih}} \frac{\partial v_h}{\partial t}\, ds = 0 \tag{21}$$

2) on internal element sides $\partial\Omega_{ih}$

$$\int_{\partial\Omega_{ih}} [\frac{\partial v_h^{I}}{\partial n} - \frac{\partial v_h^{II}}{\partial n}]\, ds = 0 \quad \text{and} \tag{22}$$

$$\int_{\partial\Omega_{ih}} [\frac{\partial v_h^{I}}{\partial t} - \frac{\partial v_h^{II}}{\partial t}]\, ds = 0$$

where $\partial/\partial n$ and $\partial/\partial t$ represent normal and tangential derivatives, respectively. For our problem of a trial space which has properties (21) and (22) is the space of functions defined by [1]. It is readily seen that there exists a unique finite element aproximation. This assertion can be verified by following the proof of Theorem 1. For the sake of simplicity.

We focus our attention to the estimate of the error $u - u_h$ between the solution of the problem P and P_h, respectively.

Let us recall

Lemma 4. Let J (v) be the functional defined on a closed convex subset K (Ω) of a Banach reflexive space S (Ω). Assume that J (v) is twice differentiable in S (Ω) nad the second differential satisfies the following inequalities:

$$\alpha_0 \|z\|^2_{S(\Omega)} \leqq D^2 J(u,z,z) \leqq C \|z\|^2_{S(\Omega)} ,$$

$$\forall\, u \in K(\Omega),\ z \in S(\Omega)$$

Let $K_h(\Omega) \subset K(\Omega)$ be a closed convex set. Denote the minimizing element of J(v) over $K(\Omega)$ and $K_h(\Omega)$ by u and u_h, respectively. Assume there exists $w_h \in K_h(\Omega)$ such that $2u - w_h \in K(\Omega)$.

Then it holds

$$\|u - u_h\|_{S(\Omega)} \leqq (C/\alpha_0)^{1/2} \|u - w_h\|_{S(\Omega)}$$

For the proof see [4] - Lemma 2.1.

Hence the problem is to find a $w_h \in K_h(\Omega)$ sufficiently close to u and such that $2u - w_h \in K(\Omega)$. We introduce o class of regular solutions of the problem P:

Let Ω^1 and Ω^2 be open rectangles $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^1 \cup \bar{\Omega}^2$, $\Omega^1 \cap \Omega^2 = \emptyset$ $\Omega^i \cap \Gamma = \emptyset$, for i = 1, 2. We define set $W(\Omega) = \{ w \mid w \in K(\Omega),$ $w \in W_2^3(\Omega^i)$, $i = 1, 2$, $w \in W_2^3(\Gamma) \}$.

If u is a solution of the problem P and $u \in W(\Omega)$ then we say that u is a regular solution of problem P.

We can prove the following

T h e o r e m 2. Assume that $u \in W(\Omega)$ and $\partial u/\partial n \in W_2^3(\partial\Omega_2')$. Then there exists a $w_h \in V_h(\Omega)$ such that

$$0 \leq \frac{\partial w_h}{\partial n} \leq \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_2'$$

and
$$\| u - w_h \|_h = O(h)$$

For the proof see [3] - Theorem 2.1 and [1] - Theorem 4.1.

R e f e r e n c e s

[1] J a n o v s k ý V., P r o c h á z k a P.: The nonconforming finite element method in the problem of clamped plate with ribs, Aplikace matem., 24, 4, (1976), 273 - 289.

[2] H l a v á č e k I., N e č a s J.: On inequalities of Korn s Type I, Arch. Rat. Mech. Anal.: 36, (1970), 305 - 311

[3] H l a v á č e k I., L o v í š e k J.: A finite element analysis for the Signirini problem in plane elastostatics, Ap likace matem., (to appear).

[4] H l a v á č e k I., Dual finite element, Aplikace matem., (to appear).

[5] D u v a u t G., L i o n s J. L.: Inequalities in Mechanics and Physics. Springer Verl. 1976

[6] N e č a s J.: Les méthodes directes dans la théorie des équations elliptiques. Praha 1967

[7] B r i l l a J., N e m e t h y A.: Variačné princípy v teórii väzkopružnosti. Záv. správa úlohy III-6-2/1.2, Bratislava 1972

[8] S a w i n g G. N., F l e i s c h m a n N. P: Plates and shells with stiffening ribs (in russian), Kijev 1964

[9] S t r a n g G.: Variational crimes in the finite element method, In: The mathematical foundations of the finite element method ... (A.K. Azis), Acad. Press, (1972), 689 - 710

[10] S t r a n g G., F i x Y.: An Analysis of the finite element method. Prentice - Hall 1973

Author's address: Rudolf Kodnár, Ján Lovíšek, Ústav aplikovanej matematiky a výpočtovej techniky PFUK
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 27. 9. 1976

S ú h r n

VARIAČNÁ NEROVNOSŤ PRE ORTOTROPICKÚ DOSKU ZOSILENÚ TUHOSTNÝMI REBRAMI

R. Kodnár, J. Lovíšek, Bratislava

Článok pojednáva o existencii rovnovážneho stavu tenkej pružnej ortotropickej dosky zosilenej tuhostnými rebrami pri priečnom vonkajšom zaťažení. Predpokladá sa, že na okraji dosky sú predpísané čiastočne podmienky pre pootočenie, čiastočne klasické okrajové podmienky v tvare rovností. Skúmané okrajové podmienky sú prevedené na variačnú nerovnosť vo vhodnom funkcionálnom priestore. Okrem toho sa odvodzuje apriorný asymptotický odhad chyby metódy konečných prvkov pre prípad jedného rebra a za predpokladu istej regularity riešenia.

Р е з ю м е

ВАРИЯЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛИТЫ УСИЛЕНОЙ ЖЕСТКИМИ РЕБРАМИ

Рудолф Коднар, Ян Ловишек, Братислава

В статьи рассмотривается существование равновесного состояния тонкой упругой ортотропной плиты усиленой ребрами. Краевые условия сведены к вариационному неравенству. Сделана априорная асимптотическая оценка ошибки метода конечных элементов для случая одного ребра и в предположении гладкости решения.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП ПРОСТРАНСТВА ОКРУЖНОСТЕЙ КАСАЮЩИХСЯ ДАННОГО ЭЛЛИПСА

Ян Кисел, Братислава

Пусть K множество всех окружностей евклидовой плоскости рассматриваемое как топологическое пространство с естественной топологией определенной гомеоморфизмом

$$\phi: R^2 \times R_+ \to K, \quad (a, b, r) \mapsto (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

Пользуемся следующими обозначениями: если f эллипс (или окружность), то f° множество всех внутренних точек эллипса (окружности) и $\bar{f} = f \cup f^\circ$, если $A, B, C \in E^2$, то $\mu(A, B, C)$ утверждает что точка B является внутренней точкой отрезка AC.

В дальнейшем предпологается фиксирован эллипс $e \subset E^2$. Подпространство X_0 пространства K состоящее из всех окружностей $k \in K$ касающихся эллипса e разлагается на две непересекающиеся части $X_1 = \{k \in X_0; k^\circ \cap e^\circ = \emptyset\}$, $X_2 = \{k \in X_0; k^\circ \cap e^\circ \neq \emptyset\}$.

Главным результатом работы являются следующие два предложения.

<u>Предложение 1</u>: Пространство X_1 гомотопически эквивалентно окружности S^1.

<u>Предложение 2</u>: Пространство X_2 гомотопически эквивалентно сфере S^2.

Из предложений 1 и 2 вытекает :

<u>Следствие</u>: Пространство X_0 гомотопически эквивалентно дизъюнктной сумме $S^1 \cup S^2$.

Задачу необходимо решать для трех случаев а именно в зависимости от отношения длин осьей эллипса $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

(1) $a > b\sqrt{2}$

(2) $a = b\sqrt{2}$

(3) $a < b\sqrt{2}$

В дальнейшем решается только случай (1). Не сложно проверить, что случаи (2) и (3) сводятся к темже результатам как и случай (1).

Не теряя общности в качестве эллипса (1) случая возмем эллипс $\ell : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

Ее эволютой является кривая

$ev : \sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}$

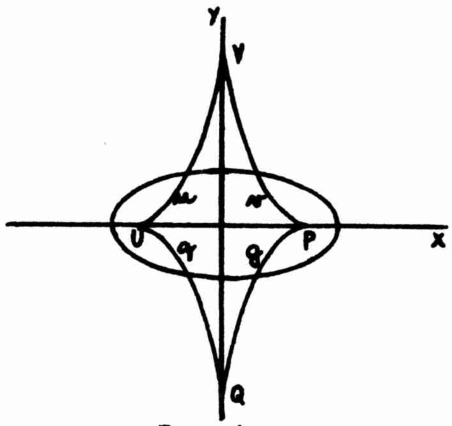
Вершини эволюти суть точки $U\left[-\frac{3}{2};0\right]$, $V[0;3]$, $P\left[\frac{3}{2};0\right]$, $Q[0;-3]$.

Дальше обозначим 4 ее дуги следующим образом:

$\mu = \{[x,y] \in ev;\ x \leq 0 \wedge y \geq 0\}$, $\nu = \{[x,y] \in ev;\ x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$,

$g = \{[x,y] \in ev;\ x \geq 0 \wedge y \leq 0\}$, $q = \{[x,y] \in ev;\ x \leq 0 \wedge y \leq 0\}$.

Смотри рисунок 1.



<u>Рис. 1.</u>

Пусть $\sigma: X_0 \to E^2$ отображение, которое любой окружности $k \in X_0$ сопоставляет ее центр $S[x,y]$.

Лемма 1 : Отображение $\sigma/X_1 : X_1 \to E^2 - \bar{\mathcal{E}}$ является гомеоморфизмом.

Доказательство: Пусть $S[x,y] \in E^2 - \bar{\mathcal{E}}$ любая точка. Потом из компактности множества $\bar{\mathcal{E}}$ вытекает, что функция $d: \bar{\mathcal{E}} \to R$, $x \mapsto |XS|$ достигает на $\bar{\mathcal{E}}$ своего минимума, и из выпуклости фигуры вытекает, что этот минимум абсолютный. Обозначим его r_S. Потом отображение $E^2 - \bar{\mathcal{E}} \to X_1, S \mapsto k(S, r_S)$ является инверзным к отображению σ/X_1.

Пространства $E^2 - \bar{\mathcal{E}}$ и $E^2 - B^2$ гомеоморфны, в качестве гомеоморфизма можно здесь подобрать аффинное отображение. Пространство $E^2 - B^2$ является гомотопически эквивалентным окружности S^1. Из этого сразу вытекает предложение 1.

Доказательство предложения 2 начнем с вопроса, сколько окружностей пространства X_2 имеет центр в конкретно фиксированной точке S. Обнаружим, что это зависит от положения точки относительно эллипса и его эволюты. Суть 4 возможности. Точка S из E^2 может служить центром 4, 3, 2 или 1 окружности из X_2. Смотри рисунок 2.

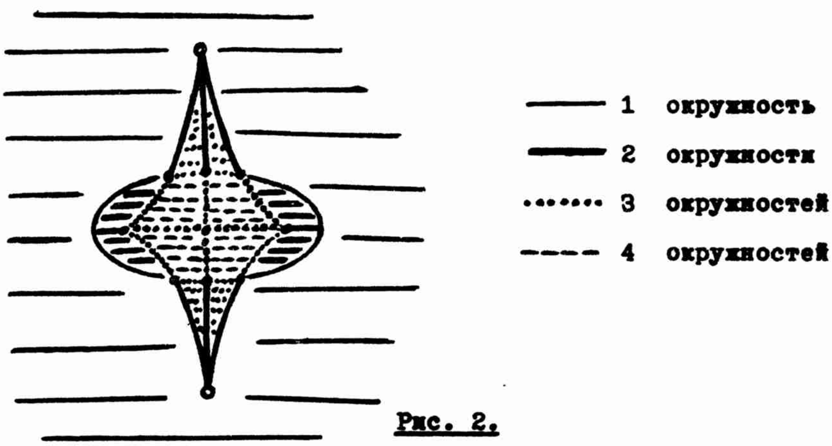


Рис. 2.

Согласно сказанному разобьем пространство X_2 на 4 части A_1, A_2, A_3, A_4, следующим образом.

Пусть t^T касательная эллипса в точке $T \in \ell$ и n^Z касательная эволюты в точке $Z \in ev$. Пространства A_1, A_2, A_3, A_4 определяются при помощи следующих высказываний:

V_1 $\quad S \in n^Z$

$V_2(X, Y, R)$ если точки $W \in X \cup Y$, $W \neq Z$, W, Z принадлежат одновременно дуге X или одновременно дуге Y и если $S \in n^Z$, то $|ZR| < |WR|$

V_3' $\quad \mu(TSZ) \vee (S = Z)$, причем для $T \in \ell$ выполняется

(i) $T = n^Z \cap \ell$

(ii) $t^T \perp n^Z$

V_3'' $\quad \mu(TZS) \vee (S = Z)$, причем для $T \in \ell$ выполняется

(i) $T = n^Z \cap \ell$

(ii) $t^T \perp n^Z$

$k(S, r) \in A_1 \Leftrightarrow \exists Z \in u \cup q$ так, что верны высказывания $V_1, V_2(u, q, U), V_3'$.

$k(S, r) \in A_2 \Leftrightarrow \exists Z \in u \cup v$ так, что верны высказывания $V_1, V_2(u, v, V), V_3''$.

$k(S, r) \in A_3 \Leftrightarrow \exists Z \in v \cup g$ так, что верны высказывания $V_1, V_2(v, g, P), V_3'$.

$k(S, r) \in A_4 \Leftrightarrow \exists Z \in g \cup q$ так, что верны высказывания $V_1, V_2(g, q, Q), V_3''$.

Определим отображение $\rho: X_2 \to E^2 \times \{1, 2, 3, 4\}$

$\rho / A_i : k(S[x, y], r) \mapsto ([x, y], i)$, $i = 1, 2, 3, 4$

Обозначим $B_i = \rho(A_i)$, $B = \rho(X_2) = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. Смотри рисунок 3.

Отображения инверсные к отображениям ρ / A_i обозначим τ_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Эти отображения можем описать явно. Например .

$\tau_1 : B_1 \to A_1$, $([x,y]\ ,\ 1) \mapsto (S[x,y]\ ,\ n_1)$, где $n_1 = |ST_1|$.

T_1 получим следующим образом. Построим касательную n^z , для которой одновременно выполняются 3 условия:

(11) $S \in n^z$

(22) $Z \in \mu \cup q$

(33) если $W \in \mu \cup q$, $W \neq Z$, W, Z лежат одновременно на μ или

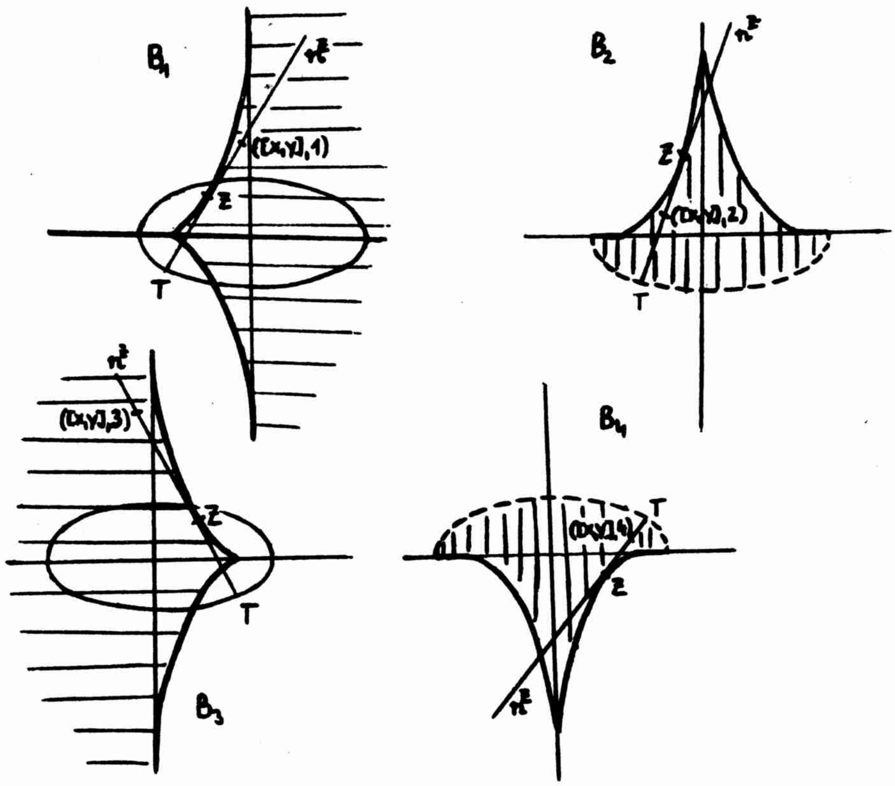


Рис. 3.

одновременно на q , $S \in n^z$, то $|ZU| < |WU|$.

Потом для $n^z \notin G = \{[x,y] \in E^2 ;\ xy = 0\}$ точкой T_1 является то из пересечений прямой n^z с эллипсом e, для которого $t^T \perp n^z$.

В случае отождествления прямой n^z с осью $y = 0$ будет точкой T_1 служить то из пересечений $n^z \cap e$ которое ближе точки U . В случае отождествления прямой n^2 с осью $X = 0$ будет точкой T_1 служить то из пересечений $n^2 \cap \ell$ которое дальше точки S. Аналогически можно описать отображения τ_2, τ_3 и τ_4.

На пространстве B определим отношение эквивалентности Θ:
$([x,y], i)\ \Theta\ ([x,y], j) \Leftrightarrow \tau_i\{([x,y], i)\} = \tau_j\{([x,y], j)\}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Тем одновременно определяется склейка пространств B_1, B_2, B_3 и B_4 посредством отношения эквивалентности Θ.

Выяснилось, что:

B_1 и B_2 склеиваются вдоль u,
B_1 и B_3 склеиваются вдоль оси $X = 0$,
B_1 и B_4 склеиваются вдоль q,
B_2 и B_3 склеиваются вдоль v,
B_2 и B_4 склеиваются вдоль части оси $y = 0$, для $-2 < x < 2$,
B_3 и B_4 склеиваются вдоль g.

Пространства B_1, B_2, B_3, B_4 гомеоморфно отобразим на пространства C_1, C_2, C_3, C_4.

$$\varphi_1 : B_1 \to C_1, \quad ([x,y], 1) \mapsto ([x,y], 1) \text{ для } x \geq 0$$
$$\mapsto \left(\left[\frac{y-3}{\sqrt{(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{y^2})^3}} \cdot x, y\right], 1\right) \text{ для } x \leq 0$$

$$\varphi_2 : B_2 \to C_2, \quad ([x,y], 2) \mapsto ([x,y], 2) \text{ для } x \leq 0$$
$$\mapsto \left(\left[\frac{y-3}{\sqrt{(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{y^2})^3}} \cdot x, y\right], 2\right) \text{ для } x \geq 0$$

Аналогически отобразим B_3 и B_4 при помощи центральной симметрии
$S : E^2 \to E^2$, $[x,y] \mapsto [-x, -y]$
Потом $\varphi_3 = S \cdot \varphi_1 \cdot S$, $\varphi_4 = S \cdot \varphi_2 \cdot S$

Пусть C пространство полученное склейкой пространств C_1, C_2, C_3, C_4. Пространство гомеоморфно отобразим на пространство
$C' = \{[x;y;x] \in E^3;\ ([x;y], 1) \in C_1\} \cup \{[x;y;-x] \in E^3;\ ([x;y], 3) \in C_3\} \cup$

$$\left\{\left[-\tfrac{3}{2}+\tfrac{y}{5};-\tfrac{2}{5}y;x\right]\in E^3;([x,y],4)\in C_4\right\}\cup\left\{\left[-\tfrac{3}{2}+\tfrac{y}{5};\tfrac{2}{5}y;x\right]\in E^3;([x,y],2)\in C_2\right\}.$$

Гомеоморфизм определен отображениями

$$\begin{aligned}
\alpha: C\to C', \ ([x,y],i) &\mapsto [x,y,x] && \text{для } i=1\\
&\mapsto [-x,y,x] && \text{для } i=3\\
&\mapsto \left[-\tfrac{3}{2}+\tfrac{y}{\sqrt{5}},\tfrac{2y}{\sqrt{5}},x\right] && \text{для } i=2\\
&\mapsto \left[-\tfrac{3}{2}+\tfrac{y}{\sqrt{5}},-\tfrac{2y}{\sqrt{5}},x\right] && \text{для } i=4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}: C'\to C, \ [x,y,z] &\mapsto \left(\left[z,\tfrac{\sqrt{5}}{2}y\right],2\right) && \text{для } [x,y,z]\in(U_\alpha P_\alpha V_\alpha)\\
&\mapsto \left(\left[z,-\tfrac{\sqrt{5}}{2}y\right],4\right) && \text{для } [x,y,z]\in(U_\alpha P_\alpha Q_\alpha)\\
&\mapsto ([x,y],1) && \text{для } [x,y,z]\in(U_\alpha V_\alpha Q_\alpha)\\
&\mapsto ([-x,y],3) && \text{для } [x,y,z]\in(P_\alpha Q_\alpha V_\alpha)
\end{aligned}$$

где $U_\alpha\left[-\frac{3}{2};0;-\frac{3}{2}\right]$, $P_\alpha\left[-\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right]$, $V_\alpha[0;3;0]$, $Q_\alpha[0;-3;0]$.

<u>Лемма 2</u> : Пространство X_2 является гомеоморфным с пространством C'.

Доказательство: Надо лишь рассмотреть отображение

$$\begin{aligned}
\beta: X_2\to C', \ k(S[x,y],n) &\mapsto \alpha\{\varphi_1(([x,y],1))\} && \text{для } k\in A_1\\
&\mapsto \alpha\{\varphi_2(([x,y],2))\} && \text{для } k\in A_2\\
&\mapsto \alpha\{\varphi_3(([x,y],3))\} && \text{для } k\in A_3\\
&\mapsto \alpha\{\varphi_4(([x,y],4))\} && \text{для } k\in A_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^{-1}: C'\to X_2, \ [x,y,z] &\mapsto \tau_1\{\varphi_1^{-1}(([x,y],1))\} && \text{для } [x,y,z]\in(U_\alpha Q_\alpha V_\alpha)\\
&\mapsto \tau_3\{\varphi_3^{-1}(([-x,y],3))\} && \text{для } [x,y,z]\in(P_\alpha Q_\alpha V_\alpha)\\
&\mapsto \tau_2\{\varphi_2^{-1}(([z,\tfrac{\sqrt{5}}{2}y],2))\} && \text{для } [x,y,z]\in(U_\alpha P_\alpha V_\alpha)\\
&\mapsto \tau_4\{\varphi_4^{-1}(([z,-\tfrac{\sqrt{5}}{2}y],4))\} && \text{для } [x,y,z]\in(U_\alpha P_\alpha Q_\alpha)
\end{aligned}$$

Отображение β является гомеоморфизмом.

<u>Лемма 3</u> : Пространство C' является гомотопически эквивалентным пространству D, где D является тетраэдром с вершинами $U_\alpha, P_\alpha, V_\alpha, Q_\alpha$.

Доказательство: Определим отображения ν и ψ следующим образом.

$$\nu : C^1 \to D,\ [x,y,z] \mapsto \begin{array}{lll} [0;3;0] & \text{для} & y \geq 3 \\ \mapsto [0;-3;0] & \text{для} & y \leq -3 \\ \mapsto [-\tfrac{3}{2};0;\tfrac{3}{2}] & \text{для} & z \geq \tfrac{3}{2} \ \wedge\ x \leq -\tfrac{3}{2} \\ \mapsto [-\tfrac{3}{2};0;-\tfrac{3}{2}] & \text{для} & z \leq -\tfrac{3}{2} \ \wedge\ x \leq -\tfrac{3}{2} \\ \mapsto [0;y;0] & \text{для} & -3 \leq y \leq 3 \wedge x \geq 0 \\ \mapsto [-\tfrac{3}{2};0;z] & \text{для} & -\tfrac{3}{2} \leq z \leq \tfrac{3}{2} \wedge x \leq -\tfrac{3}{2} \\ \mapsto [x,y,z] & \text{для} & -\tfrac{3}{2} \leq x \leq 0 \wedge -3 \leq y \leq 3 \wedge \\ & & -\tfrac{3}{2} \leq z \leq \tfrac{3}{2} \end{array}$$

$\psi : D \to C^1,\ [x,y,z] \mapsto [x,y,z]$

$H^0 : I \times C^1 \to C^1$

$H^0(t,[x,y,z]) = (1-t)[x,y,z] = t\,\nu([x,y,z])$

Ясно, что: $H^0_0(0,[x,y,z]) = [x,y,z]$

$H^0_1(1,[x,y,z]) = \nu([x,y,z])$

Из этого мгновенно вытекает $\psi \circ \nu \approx i_C$.

$H^1 : I \times D \to D$

Ввиду $\nu . \psi = i_D$ получаем $\nu . \psi \approx i_D$.

Предложение 2 является прямым следствием леммы 2 и леммы 3.

S ú h r n

HOMOTOPICKÝ TYP PRIESTORU KRUŽNÍC

DOTÝKAJÚCICH SA DANEJ ELIPSY

Ján Kysel, Bratislava

V topologickom priestore K všetkých kružníc euklidovskej roviny uvažujeme o predpriestore x_0 tých k∈K, ktoré sa dotýkajú pevne zvolenej elipsy. Potom x_0 je homotopicky ekvivalentné priestoru $S^1 \cup S^2$.

R e s u m e

HOMOTOPICAL TYPE OF THE SPACE OF ALL CYCLES TANGENT TO A GIVEN ELLIPSE

Ján Kysel, Bratislava

Let x_0 be the subspace of the topological space K of all cycles in Euclidean plane, consisting of all $k \in K$ which tangent a given ellipse. Then x_0 is honotopically equivalent to $S^1 \cup S^2$.

Author's address: JÁN KYSEL
REICHELOVA 7
816 00 BRATISLAVA

Received: 28. 9. 1976.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

REMARKS ON TWO GENERALIZATIONS OF THE NOTION OF CONTINUITY

J. S m í t a l, T. Š a l á t, Bratislava

Let X, Y be topological spaces. A mapping $f : X \longrightarrow Y$ is said to be quasi-continuous at some point $x_0 \in X$ if for each neighbourhood $U(x_0)$ of x_0, and each neighbourhood $V(y_0)$ of $y_0 = f(x_0)$ there is some non-empty open set $G \subset U(x_0)$ such that $f(G) \subset V(y_0)$. The mapping f is said to be quasi-continuous provided it is quasi-continuous at each point of X, see e.g. [2] or [3] .

From the proof of Theorem (X) in [3] it follows that the cardinality of the set of all quasi-continuous functions f from the closed unite interval $\langle 0, 1\rangle$ to the set R of reals is 2^c, where c is the power of the continuum.

We give a somewhat stronger result:

T h e o r e m 1. The cardinality of the class $\mathcal{Q}$ of all Darboux quasi-continuous functions $f : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow R$, which are Riemann-integrable, is 2^c.

P r o o f . Let $C \subset \langle 0, 1\rangle$ be the Cantor nowhere dense perfect set. For $M \subset C$ define a function g_M as follows:

$$g_M(x) = 0 \quad \text{if} \quad x \in C \setminus M$$

$$g_M(x) = 1 \quad \text{if} \quad x \in M$$

and if x is in some interval (a, b) contiguous to C, put

$g_M(x) = \left| \sin \frac{1}{\min\{x-a,\ b-x\}} \right|$. It is easy to verify that g_M is a Darboux function since it maps each interval onto an interval (or onto a one-point set). Moreover, g_M is quasi-continuous and since the set of points of discontinity of g_M has zero Lebesgue measure, g_M is Riemann-integrable. Clearly for $M \neq M'$, $M, M' \subset C$, we have $g_M \neq g_{M'}$. If $P(C)$ denotes the class of all subsets of C then card $\mathcal{Q} \geq$ card $P(C) = 2^c$. The inequality card $\mathcal{Q} \leq 2^c$ is trivial and our theorem is proved.

A. V. Martin [4] has proved that every derivative which is locally Riemann-integrable, is quasi-continuous (the notion "nieghborly function" is equivalent with the notion "quasi-continuous function", see [3]). In connection with this the following problem arises: Let f be a locally Riemann-integrable quasicontinuous Darboux function $\langle 0, 1\rangle \to R$. Must be f a derivate? Theorem 1 gives the negative answer since the cardinality of the set of all derivatives is only c.

Let X, Y be topological spaces. A function $f : X \to Y$ is called to be somewhat continuous if for each open set $V \subset Y$ with $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ there is int $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ (see [1]). It is easy to see that the quasi-continuity of a function $f : X \to Y$ implies its somewhat continuity. The set of the points of discontinuity of every quasi-continuous function $\langle 0, 1\rangle \to R$ is a first category set (see [3]). However, a somewhat continuous function $\langle 0, 1\rangle \to R$ can be discontinuous at each point, as is shown by the following

<u>Example</u>. Let $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of all ordered pairs $\alpha_n = (r_n, s_n)$ of rational numbers with $r_n \neq s_n$ for each n. Define a function $g : \langle 0, 1\rangle \to R$ as follows: If $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right\rangle$ for some n, then $g(x) = r_n$ when x is rational, and $g(x) = s_n$ otherwise. Let $g(0) = 0$. Clearly g is discontinuous at each point

of the interval $\langle 0, 1\rangle$. If V is a non-empty open subset of R then there is some k such that r_k, $s_k \in V$, hence $\operatorname{int} g^{-1}(V) \supset (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$, and so $\operatorname{int} g^{-1}(V) \neq \emptyset$. Thus g is somewhat continuous, q.e.d.

In 1972 the following problem has been published in the Amer. Math. Monthly (see [5]):

Let f be a continuous function on the interval $(0, +\infty)$, and let for each $x \in (0, +\infty)$ and each positive integer n, $f(x) \leq f(nx)$. Prove that there exists $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

This result can be generalized in the following way:

<u>Theorem 2</u>. Let $f : (0, +\infty) \to R$ be a somewhat continuous function. Let $f(x) \leq f(nx)$, for each $x \in (0, +\infty)$, and each positive integer n. Then there exists $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

<u>Proof</u>. Assume contrary to what we wish to show that $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ does not exist. Then for $r > 0$ we have

$$M = \lim_{r\to\infty} M_r > \lim_{r\to\infty} m_r = m$$

where

$$M_r = \sup_{x \geq r} f(x), \quad m_r = \inf_{x\geq r} f(x)$$

Let k be an arbitrary real number such that

$$m < k < M \tag{1}$$

By the definition of M there is some positive a with $f(a) > k$. Choose $\varepsilon > 0$ such that

$$f(a) - \varepsilon > k \tag{2}$$

and let $V = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Then $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, and since f is somewhat continuous, there is an interval $\langle c, d\rangle$, $c < d$ such that $\langle c, d\rangle \subset f^{-1}(V)$. Hence by (2),

$$f(x) > f(a) - \varepsilon > k \tag{3}$$

for each $x \in \langle c, d\rangle$.

Let $y \geq cd/(d-c)$. Then $y/c \geq (y/d) + 1$. Therefore there is a positive integer n with $y/d \leq n \leq y/c$, hence $c \leq y/n \leq d$, so by (3) $f(y/n) > k$. But in this case by the assumption of the theorem

$$f(y) = f(n \cdot \tfrac{y}{n}) \geq f(\tfrac{y}{n}) > k$$

Hence $f(y) > k$ for each $y \geq cd/(d-c)$. Thus $m = \lim_{r \to \infty} m_r \geq k$ contrary to (1).

References

[1] Gentry, K. R. and Hoyle, H. B.: Somewhat continuous functions. Czechoslovak Math. J. 21 (96), (1971), 5 - 12.

[2] Kempisty, S.: Sur les fonctions quasicontinues. Fund. Math. 19 (1932), 184 - 197.

[3] Marcus, S.: Sur les fonctions quasicontinues au sens de S. Kempisty. Colloq. Math. 8 (1961), 47 - 53.

[4] Martin, A. V.: A note on derivatives and neighborly functions. Proc. Amer. Math. Soc. 8. (1957), 465 - 467.

[5] Problem 5833 [1972, 93]. Amer. Math Monthly 80 (1973), 442 - 443.

Author's address: Jaroslav Smítal, Tibor Šalát, Katedra algebry a teórie čísel PFUK
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 11. 10. 1976

S ú h r n

POZNÁMKY O DVOCH ZOVŠEOBECNENIACH POJMU SPOJITOSTI

J. Smítal, T. Šalát, Bratislava

V článku sú dokázané dva výsledky o kvazispojitých a trocha spojitých funkciách.

Р е з ю м е

ЗАМЕТКИ О ДВУХ ОБОБЩЕНИЯХ ПОНЯТИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Я. Смитал, Т. Шалат, Вратислава

В работе доказаны два результата, касающиеся квазинепрерывных и немножко непрерывных функций.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

A THEOREM EQUIVALENT TO THE AXIOM OF CHOICE

O t o S t r a u c h, Bratislava

According to the Axiom of Choice to an arbitrary set s /if $\emptyset \notin s$/ there exists a function /called the selection-function/ such that $f : s \to \cup s$ and $\forall x \in s(f(x) \in x)$. Probably it is not well known whether to the set s there exists also a function g such that $g : \cup s \to s$ and $\forall x \in \cup s(x \in g(x))$. / $\cup s$ denotes the union and $\cap s$ denotes the intersection of all sets $x \in s$/. Really, it can be proved:

"The Axiom of Choice is equivalent to this Theorem: To every set s there exists a function g such that $g : \cup s \to s$ and $\forall x \in \cup s(x \in g(x))$."

P r o o f . Let us assume the validity of the Axiom of Choice and let s be an arbitrary set. Let us denote

$$s' = \{\{ (x, x') \mid x \in x', x' \in s\} \mid x \in \cup s\}$$

By the Axiom of Choice to s' there exists a selection-function f'. If we denote $g = f'(s')$ then g is a function with the properties required in the Theorem.

On the other hand, let us assume the validity of the Theorem and let s be an arbitrary set /$\emptyset \notin s$/. Let us denote

$$s' = \{\{ x, \{x'\}\} \mid x' \in x, x \in s \}$$

Let g' be a function corresponding to s' by the Theorem. If we denote $f = \{(x, \cup \cap g'(x)) \mid x \in s\}$, then f is a selection-function on s. /If $s = \emptyset$ then $f = g = \emptyset$ /.

Thus, the proof is finished.

R e f e r e n c e s

[1] R u b i n, H. and R u b i n, J.: Equivalents of the Axiom of Choice, Amsterdam 1963.

[2] J e c h, Thomas J.: The Axiom of Choice, Amsterdam 1973.

Author's address: Oto Strauch, Katedra algebry a teórie čísel PFUK, Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 11. 10. 1976

S ú h r n

VETA EKVIVALENTNÁ AXIOME VÝBERU

Oto Strauch, Bratislava

V tomto článku je dokázané, že nasledujúca veta je ekvivalentná axiome výberu. "Ku každej množine s existuje taká funkcia g, že $g : \cup s \to s$ a $\forall x \in \cup s (x \in g(x))$."

Р е з ю м е

ПРЕДЛОЖЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНО АКСИОМЕ ВЫБОРА

Ото Штраух, Вратислава

В этой статье показывается что следующее предложение эквивалентно аксиоме выбора. "Для всякого множества s существует такая функция g, что $g: \cup s \to s$ и $\forall x \in \cup s (x \in g(x))$."

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

A MODIFICATION OF THE CARATHÉODORY METHOD FOR UPPER INTEGRALS

E. F u t á š, B. R i e č a n, Bratislava

0. INTRODUCTION

In the paper we start with an upper integral J^* defined on on a set S of real-valued functions. Then we study the set L of all functions $f \in S$ such that

$$J^*(f + g) = J^*(f) + J^*(g)$$

for all $g \in S$. We prove that L is a linear space and $J^*|L$ is a linear functional satisfying the Beppo Levi requirement. We are not able to prove that L is a lattice.

Similar methods in the integration theory have been studied in [1] , [3] - [6] , but witn another definition: $J^*(g) = J^*(g \wedge f) + J^*(g - g \wedge f)$ provided S consists of non-negative alements.

In the second and the third part of the article we present two methods of constructing of the upper integral.

We write $f_n \nearrow f$ /$f_n \searrow f$/, if $f_n \leq f_{n+1}$ /$f_n \geq f_{n+1}$/ for every n and $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for every x.

1. UPPER INTEGRAL

<u>A s s u m p t i o n s 1.1</u>. We suppose that there is given a non-empty set S of real-valued functions defined on a set M and satisfying the following conditions:

1. If $f, g \in S$, then $f + g \in S$, $f - g \in S$. *)

2. If $f_n \geq 0$, $f_n \in S$ and $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$, then $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in S$.

Definition 1.2. A mapping $J^*: S \to \langle -\infty, \infty \rangle$ will be called an upper integral, if the following properties are satisfied:

(i) $J^*(0) = 0$

(ii) If $f \leq g$, $f, g \in S$, then $J^*(f) \leq J^*(g)$.

(iii) $J^*(f + g) \leq J^*(f) + J^*(g)$ for every $f, g \in S$ provided the right side of the inequality has a meaning.

(iv) If $f_n \in S$, $f_n \geq 0$ /$n = 1, 2, \ldots$/ and $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$, then

$$J^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} J^*(f_n)$$

Definition 1.3. Denote by L the set of all $f \in S$ such that $|J^*(f)| < \infty$ and such that

$$J^*(f + g) = J^*(f) + J^*(g)$$

for every $g \in S$.

Lemma 1.4. If $f \in L$, then

$$J^*(g - f) = J^*(g) - J^*(f)$$

for every $g \in S$.

Proof. Put $g = -f$ in Definition 1.3. Then by (i)

$$0 = J^*(0) = J^*(f + (-f)) = J^*(f) + J^*(-f),$$

hence

$$J^*(-f) = - J^*(f)$$

Now by (iii)

$$J^*(g) - J^*(f) = J^*(g) + J^*(-f) \geq J^*(g - f)$$

---

*) It follows that $0 = f - f \in S$

On the other hand

$$J^*(g) = J^*((g - f) + f) \leq J^*(g - f) + J^*(f)$$

by (iii).

T h e o r e m 1.5. If $f_1, f_2 \in L$, then $f_1 + f_2 \in L$ and $f_1 - f_2 \in L$ and $J^*(f_1 + f_2) = J^*(f_1) + J^*(f_2)$, $J^*(f_1 - f_2) = J^*(f_1) - J^*(f_2)$.

P r o o f . Since $|J^*(f_1)| < \infty$, $|J^*(f_2)| < \infty$ and $J^*(f_1 + f_2) = J^*(f_1) + J^*(f_2)$, we have $|J^*(f_1 + f_2)| < \infty$. Further

$$J^*((f_1 + f_2) + g) = J^*(f_1 + (f_2 + g)) =$$
$$= J^*(f_1) + J^*(f_2 + g) = J^*(f_1) + J^*(f_2) + J^*(g) = J^*(f_1 + f_2) + J^*(g)$$

for every $g \in S$, hence $f_1 + f_2 \in L$. By Lemma 1.4 we have $J^*(-f_2) = - J^*(f_2)$, hence $|J^*(-f_2)| < \infty$ and

$$J^*(-f_2 + g) = J^*(g) - J^*(f_2) = J^*(g) + J^*(-f_2)$$

Therefore $-f_2 \in L$ and hence $f_1 - f_2 = f_1 + (-f_2) \in L$.

L e m m a 1.6. Let $f_n \geq 0$, $f_n \in L$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ and $\sum_{n=1}^{\infty} J^*(f_n) < \infty$. Then $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L$ and

$$J^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} J^*(f_n)$$

P r o o f . Take $g \in S$. Then by Theorem 1.5

$$J^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n + g\right) \geq J^*\left(\sum_{n=1}^{k} f_n + g\right) = \sum_{n=1}^{k} J^*(f_n) + J^*(g)$$

By a limit process $/k \to \infty/$ we get

$$J^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n + g\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} J^*(f_n) + J^*(g),$$

hence by (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L$. If we put $g = 0$, we obtain

$$J^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} J^*(f_n).$$

Theorem 1.7. Let $f_n \in L$, $f_n \nearrow f$ /resp. $f_n \searrow f$/, $f < \infty$ /resp. $f > -\infty$ / and $(J^*(f_n))_{n=1}^{\infty}$ be bounded. Then $f \in L$ and

$$J^*(f) = \lim_{n \to \infty} J^*(f_n).$$

Proof. Put $g_1 = f_1$, $g_n = f_{n+1} - f_n$ /n = 1, 2, .../. Then $g_n \in L$ by Theorem 1.5, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = f < \infty$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} J^*(g_n) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} J^*(g_n) = \lim_{k \to \infty} J^*(f_k) < \infty$$

hence by Lemma 1.6 $f \in L$ and

$$J^*(f) = J^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} J^*(g_n) = \lim_{k \to \infty} J^*(f_k)$$

The second assertion follows from the first one and Theorem 1.5.

2. CONSTRUCTION OF AN UPPER INTEGRAL

Let S be the set of all real-valued functions. We start from a subset $F_0 \subset S$ and an elementary integral $J : F_0 \to R$.

Assumptions 2.1. $\emptyset \neq F_0 \subset S$ satisfies the following properties:

1. If $f, g \in F_0$, then $f + g \in F_0$
2. If $f, g \in F_0$, then $f - g \in F_0$
3. If $f, g \in F_0$, then $\max(f, g) \in F_0$, $\min(f, g) \in F_0$

D e f i n i t i o n 2.2. A real-valued function $J : F_o \longrightarrow R$ will be called an elementary integral, if the following conditions are satisfied:

1. $J(f_1 + f_2) = J(f_1) + J(f_2)$ for every $f_1, f_2 \in F_o$.

2. If $f_n \in F_o$ /n = 0, 1, 2, .../ $f_n \leqq f_{n+1}$ (n = 1, 2, ...) and $f_o \leqq \lim_{n\to\infty} f_n$, then $J(f_o) \leqq \lim_{n\to\infty} J(f_n)$.

D e f i n i t i o n 2.3. Let $f \in S$. Then we define

$$J^*(f) = \inf \{ \lim_{n\to\infty} J(f_n);\ f_n \in F_o,\ f_n \leqq f_{n+1}\ /n = 1, 2, \ldots/\quad \lim_{n\to\infty} f_n \geqq f \}$$

T h e o r e m 2.4. J^* is an upper integral that is an extension of J_o.

P r o o f . The fact that J^* is an extension of J follows from the property 2 of Definition 2.2. Therefore $J^*(0) = J(0) = J(f) - J(f) = 0$. The properties (ii) and (iii) can be easily proved. Now we prove the following property:

(*) If $g_n \nearrow g$, then $J^*(g) = \lim_{n\to\infty} J^*(g_n)$.

Since $g_n \leqq g$, we have $J^*(g) \geqq \lim_{n\to\infty} J^*(g_n)$ and the equality holds if $\lim_{n\to\infty} J^*(g_n) = \infty$. Let $\lim_{n\to\infty} J^*(g_n) < \infty$. Then to every $\varepsilon > 0$ there is a sequence $(g_{nk})_{k=1}^{\infty}$ of functions of F_o such that

$$g_{nk} \leqq g_{n,k+1}\ ,\quad \lim_{k\to\infty} g_{n,k} \geqq g_n\ ,$$

$$J^*(g_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} > \lim_{k\to\infty} J(g_{n,k})$$

Put $h_n = \max(g_{1n}, \ldots, g_{nn})$. Then $h_n \in F_o$, $h_n \leqq h_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} h_n \geqq g$ and

$$J^*(g_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} > J(h_n)$$

The last inequality can be proved by induction. Therefore

$$\lim_{n\to\infty} J^*(g_n) + \varepsilon \geq \lim_{n\to\infty} J(h_n) \geq J^*(g)$$

and the property ($*$) is proved.

Finally, if $f_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ and $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$, then $g_n \nearrow \sum_{i=1}^{\infty} f_i = g$, hence by ($*$) and (iii)

$$J^*(\sum_{i=1}^{\infty} f_i) = \lim_{n\to\infty} J^*(g_n) = \lim_{n\to\infty} J^*(\sum_{i=1}^{n} f_i) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} J^*(f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} J^*(f_i)$$

<u>Theorem 2.5.</u> $F_0 \subset L$.

<u>Proof</u>. Let $f \in F_0$, $g_{n+1} \geq g_n \in F_0$ /n= 1,2,.../, $\lim_{n\to\infty} g_n \geq f + g$. Put $h_n = g_n - f$. Then $h_n \in F_0$, $h_n \leq h_{n+1}$ /n = 1, 2, .../ and $\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} g_n - f \geq f + g - f = g$. Therefore

$$J^*(g) + J^*(f) \leq \lim_{n\to\infty} J(h_n) + J(f) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} J(h_n + f) = \lim_{n\to\infty} J(g_n)$$

Therefore

$$J^*(g) + J^*(f) \leq \inf \{ \lim J(g_n);\ g_n \leq g_{n+1},\ \lim g_n \geq f+g \} =$$

$$= J^*(f + g)$$

and $f \in L$ according to (iii).

<u>Note 2.6.</u> In theory we did not assume linearity of J. However, if F_0 is a linear space and J is a linear mapping, then J^* is positively homogeneous, i.e. $J^*(cf) = c\, J^*(f)$ for $c > 0$. Moreover, $c \in R$, $f \in L$ implies $cf \in L$. Indeed, for $c > 0$ we have

$$J^*(cf + g) = c\, J^*(f + \frac{1}{c} g) = c\, (J^*(f) + \frac{1}{c} J^*(g)) =$$

$$c\,J^*(f) + J^*(g) = J^*(cf) + J^*(g)$$

For $c < 0$ we have $-c > 0$, hence by Lemma 1.4 $cf = -(-c)f \in L$ and

$$J^*(cf) = -J^*(-cf) = -(-c)\,J^*(f) = c\,J^*(f)$$

3. CONSTRUCTION FROM A CONTENT

The notion of a content is analogous to a similar notion studied in the measure theory.

A s s u m p t i o n s 3.1. There is a given a family $C = C(Q)$ of continuous functions defined on a compact space Q and satisfying the following two conditions:

1. $0 \in C$.
2. If $f, g \in C$, then $f + g \in C$.

A real-valued function $\lambda : C \to R$ will be called a content, if the following three properties are satisfied:

(I) $\lambda(0) = 0$

(II) $\lambda(f + g) = \lambda(f) + \lambda(g)$ for every $f, g \in C$.

(III) If $f, g \in C$ and $f \leq g$, then $\lambda(f) \leq \lambda(g)$.

A content λ will be called regular, if

$$\lambda(f) = \sup \{ \lambda(g);\ g < f,\ g \in C \}$$

for every $f \in C$.

D e f i n i t i o n 3.2. Let λ be a content defined on C. Let U be the family of all functions f satisfying the following condition: There is a sequence $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ of functions of C such that

$$g_n(x) \leq g_{n+1}(x) < f(x),\quad f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

for every $x \in Q$. For every $f \in U$ we define

$$\overline{\lambda}(f) = \sup \{ \lambda(g);\ g \in C,\ g(x) < f(x)\ \ \forall x \in Q \}$$

L e m m a 3.3. The mapping $\bar{\lambda}$ has the following properties:

1. If $f, g \in U$, then $f + g \in U$ and $\bar{\lambda}(f + g) = \bar{\lambda}(f) + \bar{\lambda}(g)$.
2. If $f, g \in U$, $f \leq g$, then $\bar{\lambda}(f) \leq \bar{\lambda}(g)$.
3. If $f_n \geq 0$, $f_n \in U$ and $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$, then $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in U$ and $\bar{\lambda}(\sum_{n=1}^{\infty} f_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}(f_n)$.
4. $C \subset U$ and $\bar{\lambda}(f) \leq \lambda(f)$ for $f \in C$.

If λ is a regular content, then $\bar{\lambda}$ is an extension of λ; especially $\bar{\lambda}(0) = 0$.

P r o o f . The properties 2 and 4 are evident. Let $f, g \in U$. Then evidently $f + g \in U$ and $\bar{\lambda}(f + g) \geq \bar{\lambda}(f) + \bar{\lambda}(g)$. Let $k \in C$, $k < f + g$, $\bar{\lambda}(f + g) - \varepsilon < \lambda(k)$.
Take $f_n, g_n \in C$ such that $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow g$. Then to every $x \in Q$ there is such $n = n(x)$ that $f_n(x) + g_n(x) > k(x)$. Since $f_n + g_n$ and k arecontinuous, there is such a neighbourhood $U(x)$ of x that $f_n(y) + g_n(y) > k(y)$ for every $y \in U(x)$. Since Q is a compact set, there are such $x_1, \ldots, x_p$ that $Q \subset \bigcup_{i=1}^{p} U(x_i)$. Take $n = \max_{1 \leq i \leq p} n(x_i)$. Then $f_n(y) + g_n(y) > k(y)$ for every $y \in Q$. Therefore

$$\lambda(k) \leq \lambda(f_n) + \lambda(g_n) \leq \bar{\lambda}(f) + \bar{\lambda}(g),$$

hence

$$\bar{\lambda}(f + g) \leq \bar{\lambda}(f) + \bar{\lambda}(g)$$

and the property 1 is proved.

Now we prove 3. Let $f_n \geq 0$, $f_n \in U$. Then $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \nearrow \sum_{i=1}^{\infty} f_i = g$, $g_n \in C$. It is not difficult to prove that to every $k \in C$, $k < g$ there is such n that

$$k < \sum_{i=1}^{n} f_i .$$

Therefore

$$\lambda(k) \leq \lambda(\sum_{i=1}^{n} f_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(f_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}(f_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(f_i)$$

and hence

$$\bar{\lambda}(\sum_{i=1}^{\infty} f_i) = \bar{\lambda}(g) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(f_i)$$

Finally, the regularity condition is evidently equivalent to the equality $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f)$.

Definition 3.4. For every real-valued function f we put $J^*(f) = \inf \{ \bar{\lambda}(g); g \in U, g \geq f \}$.

Theorem 3.5. If λ is a regular content on C, then J^* is an upper integral extending λ. If C is closed under the operation $-$ (i.e. $f, g \in C$ implies $f - g \in C$), then $C \subset L$ (in the sence of Def. 1.3).

Proof. We prove only the inclusion $C \subset L$. The other assertions follow from Lemma 3.3. Let $f \in C$, $g \in S$. Evidently $J^*(g + f) \leq J^*(g) + J^*(f)$ and the equality holds, if $J^*(g + f) = \infty$. Let $J^*(g + f) < \infty$, $\varepsilon > 0$. Then there is such $h \geq g + f$, $h \in U$ that $J^*(g + f) + \varepsilon > \lambda(h)$.
The closedness of C under $-$ implies the relation $h - f \in U$, hence

$$\bar{\lambda}(h) = \bar{\lambda}(h - f) + \bar{\lambda}(f) \geq J^*(g) + \bar{\lambda}(f),$$

since $h - f \geq g$. Now the assertion is clear.

Note 3.6. If C is a linear space, then J^* is positively homogeneous and L is linear (cf. Note 2.6).

References

[1] Brehmer, S.: Verbanbtheoretische Charakterisierung des Mass- und Integralbegriffs von Carathéodory. Postdam.

Forsch. 1974, B, 3, 88-91.

[2] H a l m o s, P. R.: Measure theory. New York, 1950.

[3] P u g l i s i, M. A.: Seminorme di Beppo Levi ed integrali di Daniell sopra uno spazio die Riesz astratto. Ricerche di Matematica 13, 1969, 181-214.

[4] R i e č a n, B.: On the Carathéodory method of the extension of measures and integrals. Math. Slovaca 27, 1977, 365-374.

[5] Š i p o š, J.: Integrals on lattice-ordered groups. Math. Slovaca 27, 1977, 431-439.

[6] T o p s o e, F.: Topology and measure. In: Lecture notes in math. vol 133, 1970.

Author's address: Beloslav Riečan, E. Futáš, Katedra numerickej matematiky PFUK
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 15. 10. 1976

S ú h r n

MODIFIKÁCIA CARATHÉODORYHO METÓDY PRE HORNÉ INTEGRÁLY

B. Riečan, E. Futáš, Bratislava

V práci sa pracuje s axiomaticky zavedeným horným integrálom, pomocou ktorého sa zostrojuje funkcionál majúci niektoré vlastnosti Lebesguovho integrálu. V ďalšej časti sa uvádzajú konštrukcie horného integrálu.

Резюме

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА КАРАТЭОДОРИ ДЛЯ ВЕРХНИХ ИНТЕГРАЛОВ

Эуген Футаш, Белослав Риечан, Братислава

В работе изучается аксиоматически определённый верхний интеграл, при помощи которого построен функционал обладающий некоторыми свойствами интеграла Лебега. В последующей части приведены конструкции верхнего интеграла.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

DOMINATED SETS OF MEASURES

Tibor Neubrunn, Bratislava

A set M of measures is said to be dominated by a measure λ (usualy finite) if all measures of M are absolutely continuous with respect to λ. There are various criteria for dominancy. Some of them are formulated by means of certain metric or topological spaces, related to the given collection M of measures (See e. g. [1] [2]). The present paper deals with a question to decide, whether or not given λ dominates a given collection M. The answer is given by means of a "factor" metric space corresponding to the considered collection. Instead of a set of measures, certain class of zero sets is studies. This enables us to obtain results both for measures and submeasures. Another aspect which is different from the usual criteria is that $q-\sigma$ - rings instead of σ - rings are used.

1.

A collection $\mathcal{Q}$ of subsets of a given set X will be called $q-\sigma$ - ring if

(i) For any sequence $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ of pairwise disjoint sets belonging to $\mathcal{Q}$, the union $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ belongs to $\mathcal{Q}$.

(ii) If $E \supset F$, $E, F \in \mathcal{Q}$ then $E - F \in \mathcal{Q}$

Note that $q-\sigma$ - rings (under various names) are frequently used in connection with measure theoretical questions. They have some applications in quantum mechanics.

A collection $\mathcal{M} \subset Q$ will be called a collection of zero sets in Q if the following conditions are satisfied

(iii) For any sequence of pairwise disjoints sets from $\mathcal{M}$ the set $\bigcup_{n=1} E_n$ belongs to $\mathcal{M}$.

(iv) If $E \in \mathcal{M}$, $F \subset E$, $F \in Q$, then $F \in \mathcal{M}$.

If the condition (iv) is substituted by

(v) For any $E \in \mathcal{M}$, $F \subset E$, implies $F \in \mathcal{M}$,

then $\mathcal{M}$ is called a complete collection of zero sets.

The notion of measure means here an extended real valued nonnegative σ - additive set function defined on Q.

By a subadditive measure (submeasure) we mean an extended real valued nonnegative set function μ defined on Q such that $\mu(E) \leq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ whenever $E_n \in Q$ and $E \subset \bigcup_{n=1} E_n$.

A collection $\mathcal{E}^{\mu}$ of zero sets belonging to a (sub-)measure μ is defined as $\mathcal{E}^{\mu} = \{E : E \in Q, \ \mu(E) = 0\}$.

Note that $\mathcal{E}^{\mu}$ is a collection of zero sets in Q.

Two (sub-) measures μ, ν are said to be equivalent if the collections $\mathcal{E}^{\mu}$, $\mathcal{E}^{\nu}$ coincide.

If M^* is a system of collections of zero sets in Q and $\mathcal{L}$ a collection of zero sets in Q, then M^* is said to be dominated by $\mathcal{L}$ (notation $M^* \ll \mathcal{L}$) if $\mathcal{L} \subset \bigcap M^*$.

A collection $\mathcal{E}$ of sets is said to satisfy the countable chain condition, (shortly (CCC), provided that any subcollection of pairwise disjoint sets of $\mathcal{E}$ is at most countable.

A (sub-) measure μ on Q is said to satisfy (CCC) if $Q - \mathcal{M}$ satisfies (CCC).

Other notions related to measure theory, in case they are not defined here, are used according to [3] . The symbols E', $E - F$, $E \triangle F$ denote the complement, difference and symmetric difference, respectively.

2.

L e m m a 1. Let $\mathcal{E} \subset Q$ be a collection of sets. Let $\mathcal{E}_0$ be the smallest $q - \sigma$ - ring containing $\mathcal{E}$. Then $\mathcal{E}$ is a σ - ring if and only if $E \cap F \in \mathcal{E}_0$ for any two $E, F \in \mathcal{E}$.

A proof is the same as a proof of a similar result contained in [4] . For another proof the reader may consult [6] .

L e m m a 2. Let $\mathcal{L} \subset Q$ be a collection of zero sets. Let $\mathcal{M} \subset Q$ be a collection of zero sets such that $\mathcal{M} - \mathcal{L}$ satisfies (CCC). Then there exists a set $Z_{\mathcal{M}\mathcal{L}}$ such that

(i) $Z_{\mathcal{M}\mathcal{L}} \in \mathcal{M}$

(ii) If $E \cap Z_{\mathcal{M}\mathcal{L}} = \emptyset$, $E \in \mathcal{M}$; then $E \in \mathcal{L}$

P r o o f . Put $\tilde{\mathcal{E}} = \{\mathcal{E} : \mathcal{E}$ is a collection of pairwise disjoint sets E, such that $E \in \mathcal{M}$, $E \notin \mathcal{L}\}$. The system $\tilde{\mathcal{E}}$ is partially ordered by inclusion, satisfies the assumptions of Zorn's Lemma, hence possesses a maximal element $\mathcal{E}_0$.

Put $Z_{\mathcal{M}\mathcal{L}} = \bigcup \mathcal{E}_0$. The properties (i), (ii) are satisfied.

In what follows, we say that $Z_{\mathcal{M}\mathcal{L}}$ satisfying (i) and (ii) has a property $p_{\mathcal{M}\mathcal{L}}$. For given $\mathcal{M}$ and $\mathcal{L}$ the collection of all sets having the property $p_{\mathcal{M}\mathcal{L}}$ will be denoted $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}\mathcal{L}}$.

If $\mathcal{L}$ is fixed and no misunderstanding is possible, we shall write $Z_{\mathcal{M}}$ instead of $Z_{\mathcal{M}\mathcal{L}}$ and $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$ instead of $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}\mathcal{L}}$.

A collection $\mathcal{E} \subset Q$ wil be said to be immersible (in Q), if there exists a σ -ring $\mathcal{S}$ such that $\mathcal{E} \subset \mathcal{S} \subset Q$.

L e m m a 3. Let $\mathcal{E} \subset Q$ be a collection of sets such that for $E, F \in \mathcal{E}$ the interesection $E \cap F$ belongs to $\mathcal{E}$. Then $\mathcal{E}$ is immersible.

Proof. It follows from Lemma 1.

Lemma 4. Let $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ be two collections of zero sets in $\mathcal{Q}$. Let $\mathcal{M}$ be immersible. Then for any two $Z_{\mathcal{M}}$, $Z^*_{\mathcal{M}}$ belonging to $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$, we have $Z_{\mathcal{M}} \triangle Z^*_{\mathcal{M}} \in L$

Proof. (1) $Z^*_{\mathcal{M}} - Z_{\mathcal{M}} \subset Z^*_{\mathcal{M}}$

(2) $Z_{\mathcal{M}} - Z^*_{\mathcal{M}} \subset Z_{\mathcal{M}}$

Since $\mathcal{M}$ is immersible, the sets on the left hand side in (1) and (2) belong to $\mathcal{Q}$. Due to the inclusion, they belong also to $\mathcal{M}$. By the property $p_{\mathcal{M}}$ we have $Z^*_{\mathcal{M}} - Z_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}$, $Z_{\mathcal{M}} - Z^*_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}$. Hence $Z_{\mathcal{M}} \triangle Z^*_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}$.

If $\mathcal{Q}$ is a σ-ring, then any subcollection $\mathcal{E} \subset \mathcal{Q}$ is immersible. If $\mathcal{M}$ is a complete collection of zero sets in $\mathcal{Q}$, then it is immersible as it easly follows from Lemma 3. Thus we obtain the following two lemmas.

Lemma 5. If the q-σ-ring $\mathcal{Q}$ is a σ-ring and $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ are two collection of zero sets in $\mathcal{Q}$, then for any two sets $Z_{\mathcal{M}}$, $Z^*_{\mathcal{M}}$ belonging to $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$ it follows $Z_{\mathcal{M}} \triangle Z^*_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}$.

Lemma 6. If $\mathcal{M}$ is a complete collection of zero sets in $\mathcal{Q}$ and $\mathcal{L}$ a collection of zero sets in $\mathcal{Q}$, then the conclusion of Lemma 5 is true too.

Theorem 1. Let M^* be a system of collections of zero sets in $\mathcal{Q}$ such that $\cup M^*$ is immersible. Let $\mathcal{L} \subset \mathcal{Q}$ be a collection of zero sets in $\mathcal{Q}$ and $M^* \ll \mathcal{L}$. Then for any $\mathcal{M} \in M^*$, $\mathcal{N} \in M^*$ and any $Z_{\mathcal{M}}$, $Z_{\mathcal{N}}$, belonging to $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{N}}$ respectively the assertion $Z_{\mathcal{M}} \triangle Z_{\mathcal{N}} \in \mathcal{L}$ implies $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

P r o o f . Suppose $Z_{\mathcal{M}} \triangle Z_{\mathcal{N}} \in L$. Let $E \in \mathcal{M}$.

(3) $E = [E \cap (Z_{\mathcal{M}} \triangle Z_{\mathcal{N}})] \cup [E \cap (Z_{\mathcal{M}} \cap Z_{\mathcal{N}})] \cup [E \cap (Z_{\mathcal{M}} \cup Z_{\mathcal{N}})']$

We prove that each of the three summands in (3), and hence E, belong to $\mathcal{N}$.

Since $Z_{\mathcal{M}} \triangle Z_{\mathcal{N}} \in \mathcal{L}$ and $M^* \ll \mathcal{L}$, we heve $Z_{\mathcal{M}} \triangle Z_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}$. The assumption of immersibility gives $E \cap (Z_{\mathcal{M}} \triangle Z_{\mathcal{N}}) \in \mathcal{Q}$. Since $E \cap (Z_{\mathcal{M}} \triangle Z_{\mathcal{N}}) \subset Z_{\mathcal{M}} \triangle Z_{\mathcal{N}}$, we have $E \cap (Z_{\mathcal{M}} \triangle Z_{\mathcal{N}}) \in \mathcal{N}$. The member $E \cap Z_{\mathcal{M}} \cap Z_{\mathcal{N}}$ belongs to $\mathcal{Q}$, by immersibility of $\cup M^*$. Since it is a subset of $Z_{\mathcal{N}}$, it belongs to $\mathcal{N}$. Lastly $E \cap (Z_{\mathcal{M}} \cup Z_{\mathcal{N}})'$ belongs to $\mathcal{Q}$, again by the assumption of immersibility. Since it is a subset of E, it belongs also to $\mathcal{M}$. The inclusion $E \cap (Z_{\mathcal{M}} \cup Z_{\mathcal{N}})' \in Z'_{\mathcal{M}}$ and the property p_M gives $E \cap (Z_M \cup Z_N)' \in \mathcal{Z}$; hence, by dominancy, $E \cap (Z_{\mathcal{M}} \cup Z_{\mathcal{N}})' \in \mathcal{N}$. Thus $E \in \mathcal{N}$ and $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. The inclusion $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ may be veriffied analogically.

C o r o l l a r y 1. Let M^* be a system of complete collections of zero sets in $\mathcal{Q}$. Let $\mathcal{L}$ be a collection of zero sets in $\mathcal{Q}$ and $M^* \ll \mathcal{L}$. Then for any $\mathcal{M} \in M^*$, $\mathcal{N} \in M^*$ and any $Z_{\mathcal{M}}$, $Z_{\mathcal{N}}$, belonging to $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{N}}$, respectively from $Z_{\mathcal{M}} \triangle Z_{\mathcal{N}} \in \mathcal{L}$ it follows $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

P r o o f . It is sufficient to prove that $\cup M^*$ is immersible. If $E \in \cup M^*$, $F \in \cup M^*$ we have $E \in \mathcal{M}$ for some $\mathcal{M} \in M^*$. But $E \cap F \subset E \in \mathcal{M} \subset \cup M^*$. The completeness of $\mathcal{M}$ gives $E \cap F \in \cup M^*$. From Lemma 3, the immersibility follows.

C o r o l l a r y 2. Let $\mathcal{Q}$ be a σ - ring. Let M^* be a system of collections of zero sets in $\mathcal{Q}$, $\mathcal{L}$ a collection of zero sets in Q , and $M^* \ll \mathcal{L}$. Then for any $Z_{\mathfrak{m}}$, $Z_{\mathfrak{n}}$ belonging to $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}$, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{n}}$ respectively, the validity $Z_{\mathfrak{m}} \triangle Z_{\mathfrak{n}} \in \mathcal{L}$ for any $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in M^*$ implies $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

If M^* is not dominated by $\mathcal{L}$, then the condition $Z_{\mathfrak{m}} \triangle Z_{\mathfrak{n}} \in \mathcal{L}$ $(Z_{\mathfrak{m}} = Z_{\mathfrak{m}\mathcal{L}}$, $Z_{\mathfrak{n}} = Z_{\mathfrak{n}\mathcal{L}})$ need not imply $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

<u>Example 1</u>. Let $X = \{1, 2\}$, Q is the potence set of X. Put $\mathfrak{m} = \mathcal{L} = Q$, $\mathfrak{n} = \{\emptyset, \{1\}\}$, $M^* = \{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\}$. Then all the assumption of Theorem 1, except of $M^* \ll \mathcal{L}$ are satisfied. $Z_{\mathfrak{m}} \triangle Z_{\mathfrak{n}} \in \mathcal{L}$ for any choice of $Z_{\mathfrak{m}}$, $Z_{\mathfrak{n}}$, but $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$.

If a system M^* of collections of zero sets in Q and a collection $\mathcal{L}$ of zero sets in Q is given such that $Z_{\mathfrak{m}} \triangle Z_{\mathfrak{n}} \in \mathcal{L}$ implies $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, then M^* need not be dominated by $\mathcal{L}$. In other words, the converse of Theorem 1 need not be true.

<u>Example 2</u>. Let $X = \{1, 2, 3\}$, Q the potence set of X. Put $\mathfrak{m} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$, $\mathfrak{n} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, $\mathcal{L} = \{\emptyset, \{3\}\}$ $M^* = \{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\}$.

The set $\mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}$ consists exactly of the sets $\{1\}$ and $\{1, 3\}$. Further $\mathcal{Z}_{\mathfrak{n}} = \{\{1, 2\}\}$. Hence the collection of all sets which satisfy $p_{\mathcal{K}} = p_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ for some $\mathcal{K} \in M^*$ is $\{\{1\}; \{1, 3\}; \{1, 2\}\}$. We can easily verify that $Z_{\mathcal{K}} \triangle Z_{\mathcal{R}} \in \mathcal{L}$ implies $\mathcal{K} = \mathcal{R}$ for any $\mathcal{K}, \mathcal{R} \in M^*$. But M^* is not dominated by $\mathcal{L}$.

Consider now M^* and $\mathcal{L}$ such that the following property (P) is satisfied.

(P) For any $\mathfrak{m} \in M^*$, any $Z_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}$ and any $E \in Q$ there exists $\mathfrak{n} \in \mathfrak{m}$ and $Z_N \in \mathcal{Z}_N$ such that $Z_{\mathfrak{m}} \cup E = Z_{\mathfrak{n}}$.

<u>Theorem 2</u>. Let M^* be a system of collections of zero sets in Q such that $\bigcup M^*$ is immersible and $\mathcal{L} \subset Q$ a collection of zero sets in Q . Let $\mathfrak{m} - \mathcal{L}$ satisfy (CCC) for any $\mathfrak{m} \in M^*$. If the condition (P) is satisfied, then a necessary and sufficient condition for M^* to be dominated by $\mathcal{L}$ is the following:

(NS) $Z_{\mathfrak{m}} \triangle Z_{\mathfrak{n}} \in \mathcal{L}$ implies $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ for any $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in M^*$ and any $Z_{\mathfrak{m}}, Z_{\mathfrak{n}}$ belonging to $\mathcal{Z}_{M^*}, \mathcal{Z}_{N^*}$, respectively.

Proof.. The necessity follows from Theorem 1. To prove the sufficiency, suppose that $Z_{\mathfrak{m}} \triangle Z_{\mathfrak{n}} \in \mathcal{L}$ implies $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. Let $M^* \ll \mathcal{L}$ be not true. Then there exists $E \in \mathcal{L}$ and $\mathfrak{m} \in M^*$ such that $E \notin \mathfrak{m}$. Choose $Z_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{m}}$. By (P) there exists $Z_{\mathfrak{n}} \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{n}}$ such that $Z_{\mathfrak{m}} \cup E = Z_{\mathfrak{n}}$. According to the assumption of immersibility $Z_{\mathfrak{m}} \triangle Z_{\mathfrak{n}} \in Q$. But $Z_{\mathfrak{m}} \triangle Z_{\mathfrak{n}} = E - Z_{\mathfrak{m}} \subset E$. Hence $Z_{\mathfrak{m}} \triangle Z_{\mathfrak{n}} \in \mathcal{L}$. Since $E - Z_{\mathfrak{m}} \subset Z$ we have $E - Z_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{n}$. That set $E \cap Z_{\mathfrak{m}}$ belongs to Q, because $E \cap Z_{\mathfrak{m}} = E - (E - Z_{\mathfrak{m}})$. Since it is also a subset of $Z_{\mathfrak{m}}$ it belongs to $\mathfrak{m}$. But $E \notin \mathfrak{m}$, so $E - Z_{\mathfrak{m}} \notin M$. Thus $E - Z_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{n}$, $E - Z_{\mathfrak{m}} \notin M$. So $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$. It is a contradiction.

Corollary 3. Let M^* be a system of complete collections of zero sets in Q and $\mathcal{L} \subset Q$ a collection of zero sets in Q. Let $\mathfrak{m} - \mathcal{L}$ satisfy (CCC) for any $\mathfrak{m} \in M^*$. If (P) is satisfied, then (NS) is a necessary and sufficient condition for M^* to be dominated by $\mathcal{L}$.

Corollary 4. Let Q be a σ- ring, M^* a collection of zero sets in Q and $\mathcal{L}$ a collection of zero sets in Q such that $\mathfrak{m} - \mathcal{L}$ satisfies (CCC) for any $M \in M^*$. If (P) is satisfied, then (NS) is necessary and sufficient condition for M^* to be dominated by $\mathcal{L}$.

3.

The results of the preceeding section may be immediately applied to complete (sub-) measures defined on q - σ - rings. They may be also applied to arbitrary (sub-) measure if Q is a σ - ring.

Suppose now that M is a set of complete (sub-) measures defined on a $q-\sigma$ - ring Q. Let λ be a finite (sub-) measure on Q.

Put $M^* = \{\mathcal{E}^\mu : \mu \in M\}$ $\mathcal{L} = \mathcal{E}^\lambda$.

(Recall that $\mathcal{E}^v = \{E : E \in Q, \quad v(E) = 0\}$.

In what follows we shall suppose that $\mathcal{E}^\mu - \mathcal{L}$ satisfies (CCC). This is fulfilled e.g. if λ satisfies (CCC)

Denote by $\widetilde{M}$ the set of mutualy equivalent classes of (sub-) measures belonging to M. Then to any $A \in \widetilde{M}$ there corresponds a collection $\mathcal{E}(A)$ defined as $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}^\mu$ where $\mu \in A$ is any measure belonging to A. Evidently $\mathcal{E}(A)$ is uniquelly determined.

Considering the fixed collection $\mathcal{L} = \mathcal{E}^\lambda$, we can to any $A \in \widetilde{M}$ associate a set $Z_{\mathcal{E}(A)\mathcal{L}}$ $(= Z_{\mathcal{E}(A)})$ (see Lemma 2) belonging to $\mathcal{Z}_{\mathcal{E}(A)\mathcal{L}}$ $(= \mathcal{Z}_{\mathcal{E}(A)})$

Lemma 7. Under the above notation a function ρ defined on $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$ as

$$\rho(A, B) = \lambda(Z_{\mathcal{E}(A)} \triangle Z_{\mathcal{E}(B)})$$

is unambiguously defined and is a pseudometric on $\widetilde{M}$.

Proof. Choose $Z_{\mathcal{E}(A)}, Z^*_{\mathcal{E}(A)} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{E}(A)}; Z_{\mathcal{E}(B)}, Z^*_{\mathcal{E}(B)} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{E}(B)}$.

We prove that $\lambda(Z_{\mathcal{E}(A)} \triangle Z^*_{\mathcal{E}(A)}) = \lambda(Z_{\mathcal{E}(B)}, Z^*_{\mathcal{E}(B)})$. The chosen sets belong to $\cup M$. The completness of each collection belonging to M^* guarantes that $\cup M^*$ is immersible. So the unions and symetric differences of the chosen sets belong to Q. This and the inclusion

$$Z_{\mathcal{E}(A)} \triangle Z_{\mathcal{E}(B)} \subset (Z_{\mathcal{E}(A)} \triangle Z^*_{\mathcal{E}(A)}) \cup (Z^*_{\mathcal{E}(A)} \; Z^*_{\mathcal{E}(B)}) \cup (Z^*_{\mathcal{E}(B)} \triangle Z_{\mathcal{E}(B)})$$

enables us to use subaditivity of λ. We get

$$\lambda(Z_{\mathcal{E}(A)} \triangle Z_{\mathcal{E}(B)}) \leq \lambda(Z^*_{\mathcal{E}(A)} \triangle Z^*_{\mathcal{E}(B)})$$

because $\lambda(Z_{\mathcal{E}(A)} \triangle Z^*_{\mathcal{E}(A)}) = \lambda(Z_{\mathcal{E}(B)} \triangle Z^*_{\mathcal{E}(B)}) = 0$ (See Lemma 6)

The inequality $\lambda(Z_{\mathcal{E}(B)} \triangle Z_{\mathcal{E}(B)}) \leq \lambda(Z^*_{\mathcal{E}(A)} \triangle Z^*_{\mathcal{E}(B)})$ follows in an analogical way.

Thus ρ is unambiguously defined. That ρ is a pseudometric, may be proved in the standard way as it is known for the case of metric spaces associated to finite measure spaces.

N o t e . It can be immediately verified that Lemma 7 may be proved without the assumption of completeness of the (sub-) measures, if Q is supposed to be a σ-ring. The only difference in the proof is that the immersibility of $\bigcup M^*$ becomes trivial and that Lemma 5 instead of Lemma 6 is used.

T h e o r e m 3. Let M be a set of complete (sub-) measures on a q - σ - ring and λ a finite (sub-) measure satisfying (CCC). If $M \ll \lambda$, then the pseudometric ρ on $\widetilde{M}$ is a metric.

P r o o f . Consider the system M^* of complete collections $\mathcal{E}^{\mu}$ ($\mu \in M$) and the collection $\mathcal{L} = \mathcal{E}^{\lambda}$. Since $M^* \ll \mathcal{L}$ and $\mathcal{M} - \mathcal{L}$ satisfies (CCC) for any $M \in M^*$, we may use Corollary 1 of Theorem 1 from which the assertion immediately follows.

Using Corollary 2 of Theorem 1, we obtain for (sub-) measures (not necessarily complete) defined on a σ - ring, the following result.

T h e o r e m 4. Let Q be a σ-ring. If M is a collection of (sub-) measures on Q and λ a finite (sub-) measure satisfying (CCC), then $M \ll \lambda$ implies that ρ is a metric on $\widetilde{M}$.

For the case when the considered measures satisfy (P), we can obtain the converses of Theorem 3 and Theorem 4. Note that (P) for measures is defined in an obvious way be means of the corresponding collections of zero sets.

Thus from Theorem 2 (Corollaries 3 and 4) we obtain the following two results.

<u>T h e o r e m 5</u>. Let M be a set of complete (sub-) measures on Q and λ a finite (sub-) measure on Q satisfying (CCC). Let (P) be satisfied for M and λ. Then a necessary and sufficient condition for $M \ll \lambda$ is that ρ is a metric on $\widetilde{M}$.

<u>T h e o r e m 6</u>. Let Q be a σ-ring and M a set of measures on Q. Let λ be a finite (sub-) measure on Q satisfying (CCC). If (P) is satisfied, then a necessary and sufficient condition for $M \ll \lambda$ is that ρ is a metric on $\widetilde{M}$.

4.

Note that the dominancy, as considered above, is based on the definition of absolute continuity based on zero sets. This definition, as it is well known, is equivalent with ε-δ absolute continuity in case of finite measure. In general some problems of dominancy based on ε-δ continuity deserve a special attitude. See e.g. [5], [9].

Considering the last kind of dominancy it is useful to work with generalization of measure spaces based on sets of "small measure" ([5], [7], [8]).

We inted to use method, to obtain some topological criteria of dominancy, in another paper.

References

[1] B e r g e r A.: Remark on separable spaces of probability measures, Ann. Math. Stat. 22, 1951, 119 - 120.

[2] D i v e j e v P. Ch.: Dostatočnyje statistiki, Trudy instituta matematiki, 22 Taškent 1961

[3] H a l m o s P. R: Measure Theory, New York 1950

[4] N e u b r u n n T.: A note on quantum probability spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 1970, 672 - 675

[5] N e u b r u n n T.: On abstract formulation of absolute continuity and dominancy, Mat. časop. 19, 1969, 202 - 215

[6] P e t t i s B. J.: On some theorems of Sierpinski on subalgebras of Boolean σ - rings, Bull. Acad. Pol. 20, 1972, 131 - 135

[7] R i e č a n B.: Abstract formulation of some theorems of measure theory, Math. časop, 16, 1966, 268 - 273

[8] R i e č a n B.: Abstract formulation of some theorems of measure theory II, Mat. časop. 19, 1969, 138 - 144

[9] T s u j i m o t o H.; and T a n a k a K.: On dominated sets of measures, Math. Japonicae, 3, 1955 173 - 183

Author's address: Tibor Neubrunn, Katedra matematickej analýzy PFUK,
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 15. 10. 1976

S ú h r n

DOMINOVANÉ MNOŽINY MIER

Tibor Neubrunn, Bratislava

V práci sa pojednáva o kritériach demonovanosti pre systémy mier. Kritéria sú formulované pomocou σ - ideálov nulových množín a preto ich možno použiť nielen pre miery, ale i pre submiery.

Р е з ю м е

ДОМИНИРОВАННЫЕ МНОЖЕСТВА МЕР

Тибор Нойбрун, Братислава

Даются признаки доминируемости множества мер. Признаки формулированы абстрактно, для каких-то σ-идеалов нулевых множеств. Благодаря этой формулации они могут быть применены не только к мерам, но например и к субмерам.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

ON AN EXTENSION OF LINEAR OPERATORS

R a s t i s l a v P o t o c k ý, Bratislava

In this paper the extension problem for linear operators is studied. We regard its solution satisfactory if the new operator preserves all the properties of the original one. These properties depend on type of the domain and the range. In this paper the case when both the domain and the range are partially ordered sets is discussed. We shall, therefore, extend an operator which preserves the ordering, i.e. is monotone and, at the same time, preserves limits of monotone sequences, i.e. is continuous with respect to the ordering (o-continuous). The case of the real valued linear operator is studied in [1]. If the operator takes its values in a more general space the solution is known provided a condition of regularity is satisfied (see [2] , [3]). Our paper extends the known results in two directions: the image space need not be regular and the results are applicable to the case when a topology on the image space is given, i.e. when we extend operators continuous with respect to this topology.

Listed below are definitions of notions used throughout the paper.

A vector lattice X is called

a) σ-complete if every non-empty at most countable subset of X which is bounded from above has a supremum.

b) o-separable if every non-empty subset $Y \subset X$ possessing a supremum contains an at most countable subset possessing the same supremum as Y.

c) complete if every non-empty subset of X which is bounded from above has a supremum.

Every σ-complete o-separable vector lattice is complete (see [4], p. 129).

We shall say that a sequence x_n in a σ-complete vector lattice X is order convergent to an element x in X if $\lim\sup x_n = \lim\inf x_n = x$. This will be denoted by $x_n \longrightarrow x$. If x_n is an increasing (decreasing) sequence, we shall write $x_n \uparrow x$ ($x_n \downarrow x$).

A vector lattice X is called regular if it has the diagonal property for o-convergence.

The problem can be formulated as follows: Let X be a σ-complete vector lattice, A a vector sublattice of X with the property that for every $x \in X$ there are $b, c, \in A$ such that $c \leq x \leq b$. Let S_0 be a linear monotone o-continuous operator on A with values in a σ-complete o-separable vector lattice Y, i.e.

a) $x \leq y$, $x, y \in A$ implies $S_0(x) \leq S_0(y)$

b) $S_0(\alpha x + \beta y) = \alpha S_0(x) + \beta S_0(y)$ for all $x, y \in A$

c) $a_n \uparrow a$, a_n, $a \in A$ implies $S_0(a) = \lim S_0(a_n)$

We seek an o-closed vector sublattice L of X containing A and an operator $S: L \rightarrow Y$ which extends S_0 and preserves its properties.

Put $B = \{ b \in X;\ \exists\, a_n \in A,\ a_n \uparrow b \}$

$C = \{ c \in X;\ \exists\, a_n \in A,\ a_n \downarrow c \}$

and define operators $S^+ : B \rightarrow Y$ and $S^- : C \rightarrow Y$ as follows:

$$S^+(b) = \lim S_0(a_n);\ a_n \uparrow b$$

$$S^-(c) = \lim S_0(a_n);\ a_n \downarrow c$$

Both definitions are correct.

Proposition 1. B and C are sublattices of X closed with respect to the operation +. S^+ and S^- are monotone operators with the following properties:

$$S^+(b_1 + b_2) = S^+(b_1) + S^+(b_2)$$

$$S^-(c_1 + c_2) = S^-(c_1) + S^-(c_2)$$

$b \in B$, $c \in C$, $b \geq c$ implies $S^+(b) \geq S^-(c)$

$b \in B$, $c \in C$ implies $b - c \in B$, $c - b \in C$ and

$S^+(b) = S^+(b - c) + S^-(c)$, $S^-(c) = S^-(c - b) + S^+(b)$

$b_n \in B$, $b_n \uparrow b$ implies $b \in B$ and $S^+(b) = \lim S^+(b_n)$

$c_n \in C$, $c_n \downarrow c$ implies $c \in C$ and $S^-(c) = \lim S^-(c_n)$

Proof. Follows immediately.

Consider now the set

$L = \{x \in X;\ \sup\{S^-(c);\ x \geq c \in C\} = \inf\{S^+(b);\ x \leq b \in B\}\}$

Define an operator $S : L \to Y$ by the formula

$S(x) = \sup\{S^-(c);\ x \geq c \in C\} = \inf\{S^+(b);\ x \leq b \in B\}$.

Proposition 2. L is a vector sub lattice of X and S is a monotone linear operator on L with values in Y.

Proof. Given $x, y \in L$ there exist increasing sequences b_n and b_n' in B and decreasing sequences c_n and c_n' in C such that $S(x) = \lim S^+(b_n) = \lim S^-(c_n)$ and $S(y) = \lim S^+(b_n') = \lim S^-(c_n')$, since Y is supposed to be o-separable. We have $S(x) + S(y) =$
$= \sup\{S^-(c_n + c_n');\ x + y \geq c_n + c_n'\} \leq \inf\{S^+(b_n + b_n');\ x + y \leq b_n + b_n'\}$
$= S(x) + S(y)$, i.e. $x + y \in L$ and $S(x + y) = S(x) + S(y)$.

Given a positive real number α and an elemnt $x \in L$, we have immediately $\alpha c_n \uparrow \alpha x \downarrow \alpha b_n$ and $\alpha S(x) = \sup\{S^-(\alpha c_n);$
$\alpha x \geq \alpha c_n\} \leq \inf\{S^+(\alpha b_n);\ \alpha x \leq \alpha b_n\} = \alpha S(x)$, i.e. $\alpha x \in L$

and $S(\alpha x) = \alpha S(x)$. In the opposite case the proof is evident.

In order to prove the equality of

$$\sup\{S^-(c_n \vee c_n');\ x \vee y \geq c_n \vee c_n' \in C\} \text{ and}$$

$$\inf\{S^+(b_n \vee b_n');\ x \vee y \leq b_n \vee b_n' \in B\}$$

we make use of the fact that

$(b_n \vee b_n') - (c_n \vee c_n') \leq (b_n - c_n) + (b_n' - c_n')$ which implies that

$0 \leq S^+(b_n \vee b_n') - S^-(c_n \vee c_n') \leq S(b_n) - S(c_n) + S(b_n') - S(c_n')$ for every n.

In what follows we make heavy use of properties of linear functionals on Y. We recall that a linear functional T on Y is called

a) monotone if $T x \geq 0$ for all $x \geq 0$

b) order continuous if for each sequence x_n in Y with order limit x, $T x_n$ converges to $T x$

c) o-bounded if it maps o-bounded sets into bounded sets.

In what follows the set of all o-bounded linear functionals and the set of all linear functionals continuous with respect to a topology on Y will be denoted by Y^+ and Y^+, respectively.

Theorem 1. Let X, A and S_0 be as above. If Y is a σ-complete o-separable vector lattice such that the set of all o-continuous linear functionals on Y separates points of Y then there is an o-closed vector sublattice L of X containing A and a unique monotone linear operator $S : L \to Y$ which extends S_0 with the property: $x_n \in L$, $x \in X$, $x_n \to x$ implies $x \in L$ and $S(x) = \lim S(x_n)$.

Proof. For every monotone o-continuous linear functional T on Y define an operator from A into the field of real numbers R as follows: $J_0(a) = T\, S_0(a)$.

J_0 has the following properties:

1. $a \leq b$ implies $J_0(a) \leq J_0(b)$, $\quad a, b \in A$

2. $J_0(\alpha a + \beta b) = \alpha J_0(a) + \beta J_0(b)$, $\quad a, B \in A$

3. $a_n \uparrow a$, a_n, $a \in A$ implies $J_0(a) = \lim J_0(a_n)$.

Put $J_1(b) = \lim J_0(a_n)$ for every $b \in B$ and $J_2(c) = \lim J_0(d_n)$ for every $c \in C$. We have $J_1(b) = T\, S^+(b)$ and $J_2(c) = T\, S^-(c)$.

Finally denote by L^* the set of all $x \in X$ such that $\sup \{ J_2(c);\ x \geq c \in C \} = \inf \{ J_1(b);\ x \leq b \in B \}$ and define $J(x) = \sup \{ J_2(c);\ x \geq c \in C \} = \inf \{ J_1(b);\ x \leq b \in B \}$ for every $x \in L^*$.

We will prove that $L \subset L^*$. Because of the o-separability of Y for every $x \in L$ there exists an increasing sequence c_n in C and a decreasing sequence b_n in B such that $\sup \{ S^-(c_n);\ x \geq c_n \} = \inf \{ S^+(b_n);\ x \leq b_n \}$. From this we obtain $T \sup \{ S^-(c_n);\ x \geq c_n \} = T \inf \{ S^+(b_n);\ x \leq b_n \}$ and hence $\sup \{ J_2(c_n);\ x \geq c_n \} = \inf \{ J_1(b_n);\ x \leq b_n \}$ thanks to the o-continuity of T. The last realtion implies that $x \in L^*$.

Basing on the fact of o-separability of Y we can also prove that $J(x) = T\, S(x)$ for every $x \in L$.

To finish the proof we have to show that $x_n \in L$, $x \in X$, $x_n \uparrow x$ implies $x \in L$ and $S(x) = \lim S(x_n)$. Since $L \subset L^*$ we obtain (see [1], prop. 3) that $x \in L^*$ and $J(x) = \lim J(n)$. If $\sup \{ S^-(c);\ x \geq c \} <$ $< \inf \{ S^+(b);\ x \leq b \}$ holds, then there exists a linear operator T separating these points. We find then $c_n \in C$, $c_n \uparrow x$ and $b_n \in B$, $b_n \downarrow x$ such that $\sup \{ J_2(c_n);\ x \geq c_n \} = \inf \{ J_1(b_n);\ x \leq b_n \}$ i.e. $T \sup \{ S^-(c_n);\ x \geq c_n \} = T \{ \inf\ S^+(b_n);\ x \leq b_n \}$, a contradiction.

The equality $S(x) = \lim S(x_n)$ and the uniqueness of S follow without difficulty.

<u>Corollary 1.</u> (cf. [3], th. 9). If Y is a regular σ-complete vector lattice such that Y^+ separates points of Y, then the extension theorem holds.

P r o o f . Every regular σ-complete vector lattice is o-separable and every o-bounded linear functional on such a space is o-continuous.

T h e o r e m 2. Let Y be a σ-complete o-separable locally convex space with an ordering given by a closed cone. Let $x_n \to x$ imply $T(x_n) \to T(x)$ for every $T \in Y^*$. Then S_0 has a unique extension to L.

P r o o f . Analoquous to that of theorem 1.

The second part of the paper is concerned with the case of a topology on the image space of the operator S_0. In other words we want to extend a monotone linear operator S_0 continuous with respect to this topology. The following theorems show that in some cases it can be done.

T h e o r e m 3. Let X and A be as above. Let Y be a σ-complete o-separable locally convex space ordered by a normal cone and let every continuous linear functional on Y be o-continuous. Then every monotone linear operator $S_0 : A \to Y$ such that $a_n \uparrow a$, a_n, $a \in A$ implies $S_0(a) = \lim S_0(a_n)$ in the topological sense has a monotone linear extension S to vector lattice L containing A with the property $x_n \in L$, $x_n \uparrow x$ $(x_n \downarrow x)$ implies $x \in L$ and $S(x) = \lim S(x_n)$ provided $\lim S(x_n)$ exists in the topology of Y.

P r o o f . Since the cone is closed the limit of $S_0(a_n)$ with respect to the ordering exists. If S is the extension mentioned in theorem 2, we have, thanks to the existence of the limit of $S(x_n)$ in the topological sense, that $S(x_n)$ is o-bounded. Since the cone is normal the result follows.

T h e o r e m 4. Let Y be a σ-complete o-separable complete metrisable locally convex space ordered by a closed cone and let every continuous linear functional be o-continuous. Then S_0 has an extension.

P r o o f . The above assumptions imply normality of the cone.

R e f e r e n c e s

[1] R i e č a n, B.: An extension of the Daniell integration scheme. Math. čas. 25, 1975, No. 3, 211 - 219.

[2] V u l i c h, B. Z.: Vvedenie v teoriju poluuporiadočennych prostranstv. Moskva 1961.

[3] R i e č a n, B.: O prodolženii operatorov s značenijami v linejnych poluuporiadočennych prostranstvach. Čas. Pěst. Mat. 93, 1968, 459 - 471.

[4] L u x e m b u r g, W. A. - Z a a n e n, A. C.: Riesz spaces I. Amsterdam 1971.

Author's address: Rastislav Potocký, Katedra numerickej matematiky
a matematickej štatistiky PFUK
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 16. 11. 1976

S ú h r n

O ROZŠÍRENÍ LINEÁRNYCH OPERÁTOROV

Rastislav Potocký, Bratislava

Autor v článku skúma problém rozšírenia lineárnych operátorov s hodnotami vo vektorovom zväze. Doteraz známe výsledky zovšeobecňuje v dvoch smeroch. Hodnotový priestor lineárneho operátora nemusí

byť regulárny a výsledky možno aplikovať i v prípade operátorov spojitých v topologickom zmysle.

Р е з ю м е

О ПРОДОЛЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Растислав Потоцки, Братислава

В статье изучается проблема продолжения линейных операторов с значениями в некоторой векторной решётке. До сих пор известные результаты обобщаются в двух направлениях. Пространство значений линейного оператора не должно удовлетворять условию регулярности Канторовича и результаты применимы тоже к топологически непрерывным операторам.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

OPTIMAL CONTROL OF STABILIZABLE LINEAR SYSTEMS WITH TIME DELAY

Jozef Komorník, Bratislava

In this paper we exhibit an extension of the known formula for optimal control of linear-quadratic systems with time delay on a finite time interval. We show that a simular formula is valid for the infinite interval problem, provided the system is stabilizable.

Consider the system described by the equation

$$x(t)^{\cdot} = A_o \cdot x(t) + \int_{-h}^{0} A_1(\tau) \cdot x(t+\tau)d\tau + A_2 \cdot x(t-h) + \\ + B \cdot u(t) \tag{1}$$

with the initial condition $x(\tau) = \varphi(\tau)$ for $\tau \in [-h, 0]$ where $x(t)$ is the n-dimensional state vector,

$u(t)$ is the p-dimensional control function,

A_o, A_2 and B are constant metrices of types $n \times n$, $n \times n$ and $n \times p$ respectively,

h is a positive real number. A_1 is a continuous matrix function of type $n \times n$ defined on $[-h, 0]$.

φ is an element of C_h^n, the vector space of all n-dimensional continuous vector functions on $[-h, 0]$.

Let Q_1 be nonnegative and Q_2 positive definite matrices of types $n \times n$ and $p \times p$, respectively.

It is well known (see [1], [2]) that for any $T>0$ the optimal control of the system (1) with respect to the cost function

$$C_T(u) = \int_0^T [x'(t) \cdot Q_1 \cdot x(t) + u'(t) \cdot Q_2 \cdot u(t)]\, dt = \int_0^T 1\,[x(t), u(t)]\, dt \tag{2}$$

is given by the formula

$$u(t) = - Q_2^{-1} \cdot B'[W_0(t) \cdot x(t) + \int_{-h}^{0} W_1(t,\tau)x(t+\tau)d\tau] \tag{3}$$

and the corresponding minimal cost can be written in the form

$$C(\overset{4}{u}) = \varphi'(0) \cdot W_{T,0}(0)\,\varphi(0) + \varphi'(0) \cdot \int_{-h}^{0} W_{T,1}(0,\tau) \cdot \varphi(\tau)d\tau + \int_{-h}^{0} \varphi'(\tau) \cdot W_{T,1}(0,\tau)d\tau \cdot \varphi(0) + \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \varphi'(\tau) \cdot W_{T,2}(0,\tau,\rho) \cdot$$

$$\cdot \varphi(\rho)d\tau\, d\rho = W_T(\varphi) \tag{4}$$

where the triple $W_{T,0}(t)$, $W_{T,1}(t,\tau)$, $W_{T,2}(t,\tau,\rho)$ of bounded continuous matrix functions of type $n \times n$, defined for $t \in [0, T]$, $\tau, \rho \in [-h, 0]$ is the unique solution of the Riccatti-system of equations:

$$\frac{d\, W_0(t)}{dt} + A_0' \cdot W_0(t) + W_0(t) \cdot A_0 + W_1(t, 0) + W_1'(t, 0) + Q_1 - W_0(t) \cdot B_1 \cdot W_0(t) = 0 \tag{5.1}$$

$$\frac{d\, W_1(t, s-t)}{dt} + A_0' \cdot W_1(t, s-t) + W_0(t) \cdot A_1(s-t) + W_2(t, 0, s-t) - W_0(t) \cdot B_1 \cdot W_1(t, s-t) = 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{d\,W_2(t,\ s-t,\ r-t)}{dt} + A_1'(t,\ s-t)\ .\ W_1(t,\ r-t) + W_1'(t,\ s-t)\ .$$

$$.\ A_1(t,\ r-t) - W_1'(t,\ s-t)\ .\ B_1\ .\ W_1(t,\ r-t) = 0 \qquad (5.3)$$

where $s,\ r \in [t-h,\ t]$, $B_1 = B\ .\ Q_2^{-1}\ .\ B'$

$$W_1(t,\ -h) = W_o(t)\ .\ A_2 \qquad (5.4)$$

$$W_2(t,\ -h,\tau) = A_2'\ .\ W_1(t,\tau) \qquad (5.5)$$

$$W_2(t,\tau,\rho) = W_2'(t,\rho,\tau) \qquad (5.6)$$

with initial conditions

$$W_{T,0}(T) = W_{T,1}(T,\tau) = W_{T,2}(T,\tau,\rho) = 0 \qquad (6)$$

CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF RICCATTI-TYPE SYSTEMS

D e f i n i t i o n 1. By m_o we denote a measure on the interval $[-h,\ 0]$ which has one atom $m_o(0) = 1$ and is equal to the Lebesgue measure on measurable subsets of $[-h,\ 0]$.

R e m a r k 1. a) The space $L_1^n(m_o)$ containing as a subset all n-dimensional bounded measurable functions on $[-h,\ 0]$ is a pseudometric space with respect to

$$\|\varphi\|_1 = |\varphi(0)| + \int_{-h}^{o} |\varphi(\tau)|\,d\tau \qquad (7)$$

where $|x|$ is the Euclidean norm in R^n .

b) C_n^n is a dense subspace of $L_1^n(m_o)$.

c) The functionals W_T can be uniquely prolonged to continuous functionals on $L_1^n(m_o)$.

Now we give a definition of stabilizability which can be shown to be equivalent to usual ones. (See [3].)

D e f i n i t i o n 2. There exists a continuous matrix function $L_1(\tau)$ on $[-h, 0]$, a matrix L_0, both of type $p \times n$ and constant K_0 such that for the solution $x_0(t)$ of the equation (1) with the control function

$$u_0(t) = L_0 \, . \, x_0(t) + \int_{-h}^{0} L_1(\tau).x_0(t+\tau)\, d\tau \qquad (8)$$

and initial condition $\varphi \in L_1^n(m_0)$ the following inequality holds

$$\int_0^\infty |x_0(t)|^2 \, dt \le K_0 . \|\varphi\|_1^2 \qquad (9.1)$$

R e m a r k 2. If the system (1) is stabilizable and L_0, L_1 are as above, there exists a constant K_1 such that

$$\int_0^\infty 1\,[x_0(t), u_0(t)] \; dt \le K_1 . \|\varphi\|_1^2 \qquad (9.2)$$

We define the functions $W_0(t)$, $W_1(t,\tau)$, $W_2(t,\tau,\rho)$ as the unique solution of the system (5) for $t \in (-\infty, 0]$, $\tau, \rho \in [-h, 0]$ with the initial conditions

$$W_0(0) = 0, \; W_1(0,\tau) = 0, \; W_2(0,\tau,\rho) = 0 \quad \text{for } \tau, \rho \in [-h, 0]$$

R e m a r k 3. From the existence and uniqueness of the solution of the system (5) we have the following equations $t \in (-\infty, 0]$ and $T \ge -t$.

$$W_0(t) = W_{T,0}(t+T)$$

$$W_1(t,\tau) = W_{T,1}(t+T,\tau)$$

$$W_2(t,\tau,\rho) = W_{T,2}(t+T,\tau,\rho)$$

T h e o r e m 1. All the functions $W_o(t)$. $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau, \rho)$ ($\tau, \rho \in [-h, 0]$) converge for t tending to $-\infty$. The limits form a triple $(W_o, W_1(\tau), W_2(\tau, \rho); \tau, \rho \in [-h, 0])$ which is a t-independent bounded, continuous solution of the system (5).

P r o o f. 1. Let $\varphi \in L_1^n(m_o)$. Then the real function of T

$$W_T(\varphi) = \min_u \int_0^T l\,[x(s), u(s)]\, ds$$

is nondecreasing. From (9.2) we get

$$W_T(\varphi) \leq K_1 \cdot \|\varphi\|_1^2 \tag{12}$$

and hence there exists $\lim\limits_{T \to \infty} W_T(\varphi) < \infty$

We shall prove the convergence for $t \to -\infty$ of all components $W_k^{i,j}(t, \tau, \rho)$ for $\tau, \rho \in [-h, 0)$; i, j = 1,...,n; K = 0, 1, 2 by choosing special types of functions from $L_1^n(m_o)$.

a) The $\varphi_i = e_i \cdot \chi_{\{0\}}$ where e_i is the i-th member of the standard orthonormal base in R^n, χ_A is the characteristic function of a measurable set A. From (4) and (12) we get

$$W_T(\varphi_i) = W_o^{ii}(-T) \text{ converges to } V_o^{ii}.$$

b) For $\tau \in [-h, 0)$ we put

$$\varphi^k_{\tau,i} = e_i \cdot \varphi_{[\tau, \tau + 1/k)} \cdot \chi_{[-h,0)} \cdot k$$

For any fixed k the function $W_T(\varphi^k_{\tau,i})$ is nondecreasing (in T) and bounded by the constant K_1. For a fixed T the sequence $W_T(\varphi^k_{\tau,i})$ converges (in k) to $W_2^{ii}(-T, \tau, \tau)$ which therefore is nonincreasing and bounded by the constant K_1. Hence the function $W_2^{ii}(t, \tau, \tau)$ converges to the limit $V_2^{ii}(\tau, \tau)$.

c) For $\varphi^k = \varphi_i \pm \varphi^k_{\tau,j}$ and $T < T'$ the nonnegative difference $W_{T'}(\varphi^k) - W_T(\varphi^k)$ converges in k to the value

$$[W_0^{ii}(-T') \pm 2\, W_1^{ij}(-T',\tau) + W_2^{jj}(-T',\tau,\tau)] - [W_0^{ii}(-T) \pm 2\, W_1^{ij}(-T,\tau) + W_2^{jj}(-T,\tau,\tau)]$$ hence

$$|W_1^{ij}(T',\tau) - W_1^{ij}(T,\tau)| \leq 1/2 \{ [W_0^{ii}(-T') - W_0^{ii}(-T)] + [W_2^{jj}(-T',\tau,\tau) - W_2^{jj}(-T,\tau,\tau)] \}$$

The functions $W_1^{ij}(t,\tau)$ satisfy the Bolzano - Cauchy condition in t tending to $-\infty$ and converge to limits $V_1^{ij}(\tau)$ for $i,j = 1,\dots,n$; $\tau \in [-h, 0)$.

d) The convergence of the functions $W_2^{ij}(t,\tau,\rho)$; $\tau, \rho \in [-h,0)$ and $W_0^{i\,j}(t)$, $i, j = 1,\dots,n$ can be proved in a similar way putting

$$\varphi^k = \varphi^k_{\tau,i} \pm \varphi^k_{\rho,j} \quad \text{or} \quad \varphi = \varphi_i \pm \varphi_j$$

2. We have not proved yet that the functions $W_1(t,\tau)$, $W_2(t,\tau,\rho)$ converge for $\tau = 0$ or $\rho = 0$.
To show this we utilize first the equation (5.3). After its integration we get for $\tau \leq \rho$:

$$W_2(t,\tau,\rho) = A_2' \cdot W_1(t+\tau+h, \rho-\tau-h) + \int_{-h}^{\tau} \{ A_1'(\xi) \cdot W_1(t+\tau-\xi, \rho-\tau+\xi) + W_1'(t+\tau-\xi,\xi) \cdot A_1(\rho-\tau+\xi) - W_1'(t+\tau-\rho,\xi) . B_1 \cdot W_1(t+\tau-\xi,\rho-\tau+\xi)\}\, d\xi \qquad (13.1)$$

The integrand is bounded and converges for $\xi \in [-h, 0)$. The functions $W_1(t+\tau-h, \rho-\tau-h)$ converge $\rho-\tau < h$ according to the previous part of the proof. For $\rho-\tau = h$ we have $\rho = 0$, $\tau = -h$.

The functions $W_2(t, \tau, 0)$ therefore converge for $\tau \in (-h, 0)$. Integrating equation (5.2) we get

$$W_1(t, \tau) = W_0(t+\tau+h). A_2 + \int_{-h}^{\tau} \{ W_0(t+\tau-\xi). A_1(\xi) + A_0'.W_1(t+\tau-\xi,\xi) +$$

$$+ W_2(t+\tau-\xi, 0, \xi) - W_0(t+\tau-\xi) . B_1 . W_1(t+\tau-\xi, \xi) \} d\xi \quad (13.2)$$

The integrand converges for $\xi \in (-h, 0)$ and we get the equation for the limit function for all $\tau \in [-h, 0]$.

$$V_1(\tau) = V_0 . A_2 + \int_{-h}^{\tau} \{ V_0 . A_1(\xi) + A_0' . V_1(\xi) +$$

$$V_2(0, \xi) - V_0 . B_1 . V_1(\xi) \} d\xi \quad (13.3)$$

The function $V_1(\tau)$ is differentiable, hence continuous. Differentiating (13.3) we get

$$\frac{d V_1(\tau)}{d\tau} = V_0 . A_1(\tau) + A_0 . V_1(\tau) + V_2(0, \tau) - V_0 . B_1 . V_1(\tau) \quad (14.2)$$

and
$$V_1(-h) = V_0 . A_2 \quad (14.4)$$

Now we know that the right hand side of (13.1) converges for all $\tau \in [-h, 0]$; $\rho \geq \tau$ therefore

$$V_2(\tau, \rho) = A_2' . V_1(\rho-\tau-h) + \int_{-h}^{0} \{ A_1'(\xi) . V_1(\rho-\tau+\xi) +$$

$$+ V_1'(\xi) . A_1(\rho-\tau+\xi) - V_1'(\xi) . B_1 . V_1(\rho-\tau+\xi) \} d\xi \quad (13.4)$$

The integrad is uniformly continuous with respect to τ and ρ, hence the function $V_2(\tau, \rho)$ is continuous. Putting $d = \rho - \tau$ we have

$$V_2(\tau, d+\tau) = A_2' . V_1(d-h) + \int_{-h}^{\tau} \{ A_1'(\xi) . V_1(d+\xi) + V_1'(\xi) .$$

$A_1(d+\xi) - V_1(\xi) \cdot B_1 \cdot V_1(d+\xi)\} \; d\xi$

hence

$$\frac{d\, V_2(\tau, d+\tau)}{d\tau} = A_1'(\tau) \cdot V_1(d+\tau) + V_1'(\tau) \cdot A_1(d+\tau) - V_1'(\tau) \cdot$$

$$\cdot B_1 \cdot V_1(d+\tau) \tag{14.3}$$

Putting $\tau = -h$ in (1 .4) we get

$$V_2(-h, \tau) = A_2' \cdot V_1(\tau) \tag{14.5}$$

Directly from (5.6) we get

$$V_2(\tau, \rho) = V_2'(\rho, \tau) \tag{14.6}$$

Finally, from (5.1) we have

$$W_6(t) - W_0(t-1) = -\int_{-1}^{0} \{ A_0' \cdot W_0(t+\xi) + W_0'(t+\xi) \cdot A_0 + W_1(t+\xi, 0) +$$

$$W_1'(t+\xi, 0) - W_0(t+\xi) \cdot B_1 \cdot W_0(t+\xi)\} \, d\xi - Q_1 \tag{13.5}$$

The integrand is a bounded function and converges for all $\xi \in [-1,0]$. The left hand side converges to 0. So the equation

$$A_0' \cdot V_0 + V_0' \cdot A_0 + V_1(0) + V_1'(0) - V_0 \cdot B_1 \cdot V_0 + Q_1 = 0 \quad (14.1)$$

is fulfilled.

OPTIMAL CONTROL

<u>**Theorem 2.**</u> Assume that (1) is stabilisable. Then the control

$$\overset{4}{u}(t) = - Q_2^{-1} \cdot B' \cdot [V_0 \cdot x(t) + \int_{-h}^{0} V_1(\tau) . x(t+\tau) \, d\tau] \tag{15}$$

is an optimal control for (1) with the cost function

$$C(u) = \int_{0}^{\infty} l(x(t),\, u(t))\, dt \tag{16}$$

The value of the minimal cost is given by

$$C(\overset{1}{u}) = \varphi'(0) \cdot V_0 \cdot \varphi_0(0) + 2\, \varphi'(0) \cdot \int_{-h}^{0} V_1(\tau) \cdot \varphi(\tau)\, d\tau \; +$$

$$+ \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} \varphi'(\tau)\, V_2(\tau, \rho)\, \varphi(\rho)\, d\tau\, d\rho = V(\varphi) \tag{17}$$

where $\varphi \in C_h^n$ is the initial condition of the solution $\overset{1}{x}(t)$ of (1) the control $\overset{1}{u}(t)$.

P r o o f . Let $u(t)$ be an arbitrary finite measurable control function and $x(t)$ the corresponding solution of the equation (1) with the initial condition $\varphi \in C_h^n$. Then for arbitrary $T \in [0, \infty)$ we have

$$\int_{0}^{T} l(x(t),\, u(t))dt \geq W_T(\varphi) \tag{17'}$$

According to theorem 1 and the Lebesgue theorem about bounded convergence we have

$$\lim_{T \to \infty} W_T(\varphi) = V(\varphi) \tag{18}$$

hence

$$C(u) = \int_{0}^{T} l(x(t),\, u(t))dt \geq V(\varphi) \tag{19}$$

Let $\overset{1}{x}(t)$ be the solution of (1) with the initial condition φ and the control $\overset{1}{u}(t)$. Then we have

$$\frac{d\, \overset{1}{x}(t)}{dt} = (A_0 - B_1 \cdot V_0) \cdot \overset{1}{x}(t) + \int_{-h}^{0} [A_1(\tau) - B_1 \cdot V_1(\tau)] \cdot$$

$$\cdot\, \overset{1}{x}(t+\tau)d\tau + A_2 \cdot \overset{1}{x}(t-h) \tag{20}$$

We put

$$\varphi_t(\tau) = \overset{4}{x}(t+\tau) \quad \text{for } t \in [0,\infty) \quad \tau \in [-h,\ 0] \tag{21}$$

and calculate

$$\frac{d\,V(\varphi_t)}{dt} = \frac{d}{dt}\Big[(\overset{4}{x}(t))' \cdot V_o \cdot \overset{4}{x}(t) + 2\overset{4}{x}'(t) \cdot \int_{t-h}^{t} V_1(s-t) \cdot$$

$$\cdot\, \overset{4}{x}(s)ds + 2 \int_{t-h}^{t} \int_{o}^{s-t} \overset{4}{x}'(s) \cdot V_2(s-t,\ s+\delta-t) .\ x(s+\delta)d\delta\ ds)\Big] =$$

$$= \overset{4}{x}'(t) \cdot (A_o' V_o + V_o \cdot A_o' - 2V_o \cdot B_1 \cdot V_o + V_1(0) + V_1'(0)) .\ \overset{4}{x}(t) +$$

$$+ 2\overset{4}{x}(t) \cdot \int_{t-h}^{t} \Big[- \frac{d\ \ V_1(s-t)}{ds} + V_o \cdot A_1(s-t) + A_o' \cdot V_1(s-t) -$$

$$- 2V_o' \cdot B_1 \cdot V_1(s-t) \quad + V_2(0,s-t)\Big] \cdot \overset{4}{x}(s)ds + 2\overset{4}{x}'(t) \cdot (V_o \cdot A_2 -$$

$$- V_1(-h)) \cdot \overset{4}{x}(t-h) + 2 \int_{t-h}^{t} \int_{o}^{t-s} \overset{4}{x}'(s) \cdot \Big[- \frac{d\ V_2(s-t,s+\delta-t)}{ds} +$$

$$+ A_1'(s-t) \cdot V_1(s+\delta-t) + V_1'(s-t) \cdot A_1(s+\delta-t) -$$

$$- 2V_1'(s-t) \cdot B_1 \cdot V_1(s+\delta-t)\Big] .\ \overset{4}{x}(s+\delta)d\delta\ \ ds + 2 .\ \overset{4}{x}'(t-h) .$$

$$\cdot \int_{t-h}^{t} (A_2' \cdot V_1(s-t) - V_2(0,s-t)\ \ \overset{4}{x}(s)ds$$

From the equations (14.1) - (14.6) we get

$$\frac{d\ V(\varphi_t)}{dt} = - \{ \overset{4}{x}'(t) . [\ Q_o + V_o B_1 V_o\ ] \cdot \overset{4}{x}(t) + \overset{4}{x}'(t) \cdot V_o \cdot B_1 \cdot$$

$$\cdot \int_{-h}^{o} V_1(\tau) \cdot \overset{4}{x}(t+\tau)d\tau + \int_{-h}^{o} x'(t+\tau)\ V_1'(\tau)d\tau \cdot B_1 \cdot V_o \cdot$$

$$\cdot\, \overset{4}{x}(t) + \int_{-h}^{o} \int_{-h}^{o} \overset{4}{x}'(t+\tau) \cdot V_1'(\tau) \cdot B_1 \cdot V_1(\rho) \cdot \overset{4}{x}(t+\rho)d\rho\ d\tau \} =$$

$$= -[\overset{1}{x}'(t)Q_1\overset{1}{x}(t) + \overset{1}{u}'(t)Q_2\overset{1}{u}(t)] = -1(\overset{1}{x}(t),\ \overset{1}{u}(t))$$

For any fixed $T \in [0,\infty)$ we have

$$\int_0^T 1(\overset{1}{x}(t),\ \overset{1}{u}(t))dt = V(\varphi) - V(\varphi_T) \leq V(\varphi)$$

hence

$$C(\overset{1}{u}) = \int_0^\infty 1(x(t),\ u(t))dt \leq V(\varphi) \tag{22}$$

From (13) and (22) we get that (17) is valid.

R e m a r k 3. Let us note that the condition $Q_1 > 0$ which is usually assumed for the synthesis of the optimal control on the infinite interval has not been needed in the proof.

R e f e r e n c e s

[1] A l e k a l, Y. - B r u n o v s k ý, P. - C h y u n g, D. H.- - L e e, D. H.: The Quadratic Problem for Systems with Time Delays, IEEE Trans.Vol.AC 16, No 6, December 1971.

[2] K o l o m a n o v s k i j, V. B. - M a j z e n b e r g, T. L.: Optimalnoje upravlenije stochastičeskimi sistemami s posledejstvijem. Avtomatika i telemechanika, 1973, T. 34, No 1.

[3] P a n d o l f i, L.: On Feedback Stabilisation of Functional Differential Equations, Technical report No 1974/75/8, Instituto matematico "U.Dini". Universitá di Firenze

[4] Z u b o v, J.: Lekciji po teoriji upravlenija, "Nauka" Moskva 1975

Author's address: Jozef Komorník, Katedra numerickej matematiky
a matematickej štatistiky PFUK
Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 22. 11. 1976

S ú h r n

OPTIMÁLNE RIADENIE STABILIZOVATEĽNÝCH LINEÁRNYCH SYSTÉMOV S ONESKORENÍM

Jozef Komorník Bratislava

V práci je ukázané, že pre stabilizovateľný systém

$$\dot{x}(t) = A_0 . x(t) + \int_{-h}^{0} A_1(\tau).x(t+\tau)d\tau + A_2.x(t-h) + B.u(t)$$

so stratovou funkciou $C(u) = \int_{0}^{\infty} [x'(t).Q_1.x(t) + u'(t).Q_2.u(t)]\, dt$
existuje optimálne riadenie typu

$$u(t) = - Q_2^{-1} . B'[V_0.x(t) + \int_{-h}^{0} V_1(\tau).x(t+\tau)d\tau]$$

pričom minimálna strata je

$$x'(0).V_0.x(0) + 2x'(0). \int_{-h}^{0} V_1(\tau).x(\tau)d\tau + \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} x'(\tau).V_2(\tau,\rho).$$

$$. x(\rho)d\rho\, d\tau .$$

Matica V_0 a spojité maticové funkcie $V_1(\tau)$, $V_2(\tau,\rho)$ sú limitným riešením systému rovníc Riccattiho typu.

Р е з ю м е

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЕМЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВЕМ

Йозеф Коморник, Вратислава

В этой статье доказано, что для стабилизируемой системы $x(t) = A \, . \, x(t) + \int_{-h}^{0} A_1(\tau) \, . \, x(t+\tau)d\tau + A_2 . x(t-h) + B . u(t)$ с критерием качества $x'(t) \, . Q_1 . x(t) + u'(t) Q_2 . u(t)$ существует оптимальное управление типа $u(t) = -Q_2^{-1} \, . B'[V_0 \, . x(t) + \int_{-h}^{0} V_1(\tau) \, x(t+\tau) d\tau]$ и минимум целевой функции равно $x'(0) V_0 . x(0) + 2x'(0) \int_{-h}^{0} V_1(\tau) x(\tau) d\tau + \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} x'(\tau) V_2(\tau, \rho) \, x(\rho) d\rho d\tau$. Матрица V_0 и непрерывные матричные функции $V_1(\tau)$, $V_2(\tau, \rho)$ являются предельным решением системы уравнений типа Рисати.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

THE MEASURE EXTENSION PROBLEM ON ORTHOLATTICES

Peter Volauf, Bratislava

In his papers [3],[4] B. Riečan considered the measure extension problem on modular orthocompemented and modular complemented lattices. In these papers the notion of the measurability has not been used. The present note deals with the problem of extension of measures on ortholattices using measurability of its elements.

There are several ways in which this notion can be defined in lattices. We have chosen the formulation which had been used for measurability of sets in [2].

NOTATIONS AND NOTIONS

Throughout this paper $\mathcal{X}$ will denote a σ-complete, σ-continuous ortholattice with the least element o and the greatest element u . A non-empty sublattice $\mathcal{A}$ of the lattice $\mathcal{X}$ is called a lattice subalgebra of $\mathcal{X}$ if $a^{\perp} \in \mathcal{A}$ for every $a \in \mathcal{A}$.
If $\mathcal{B}$ is a lattice subalgebra of $\mathcal{X}$, and if the supremum (in $\mathcal{X}$) of every countable subset of $\mathcal{B}$ belongs to $\mathcal{B}$, we say that $\mathcal{B}$ is a σ-subalgebra of $\mathcal{X}$. $\mathcal{S}\mathcal{A}$ will denote the smallest lattice σ-subalgebra of $\mathcal{X}$ over $\mathcal{A}$.

We shall write $a_n \nearrow a$ to denote that $a_n \le a_{n+1}$, n=1,2,.. and $a = \bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$. $a_n \searrow a$ will be interpreted analogously.

Let $\mathcal{B}$ be a lattice subalgebra of a lattice $\mathcal{X}$. A function $\mu: \mathcal{B} \to \langle 0,1\rangle$ is a probability measure if

(i) $\mu(o) = 0$, $\mu(u) = 1$

(ii) $\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b)$ for all $a,b \in \mathcal{B}$

(iii) If $a_n \nearrow a$, $a_n \in \mathcal{B}$, $n=1,2,\dots$, $a \in \mathcal{B}$ then $\mu(a_n) \nearrow \mu(a)$

All others definitions will be used according to [1].

CONSTRUCTION

<u>Definition 1.</u> Let $\mathcal{A}$ be a lattice subalgebra of the lattice $\mathcal{X}$. Then $\mathcal{A}_\nearrow = \{b \in \mathcal{X} : \exists \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n \in \mathcal{A}, a_n \nearrow b\}$. Let $\mu: \mathcal{A} \to \langle 0,1\rangle$ be a probability measure. We define $\mu_1: \mathcal{A}_\nearrow \to \langle 0,1\rangle$ by $\mu_1(b) = \lim \mu(a_n)$, where $a_n \in \mathcal{A}$, $a_n \nearrow b$, $b \in \mathcal{A}_\nearrow$.

<u>Lemma 1.</u> A system $\mathcal{A}_\nearrow$ and a function μ_1 have the following properties :

(a) μ_1 is unambiguously defined.

(b) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\nearrow$, $\mu_1(o) = 0$, $\mu_1(u) = 1$, $\mu_1(a) \in \langle 0,1\rangle$ for all $a \in \mathcal{A}_\nearrow$.

(c) If $a,b \in \mathcal{A}_\nearrow$ then $a \vee b$, $a \wedge b \in \mathcal{A}_\nearrow$ and
$\mu_1(a \vee b) + \mu_1(a \wedge b) = \mu_1(a) + \mu_1(b)$

(d) If $a \leq b$, $a,b \in \mathcal{A}_\nearrow$, then $\mu_1(a) \leq \mu_1(b)$

(e) If $b_n \nearrow b$, $b_n \in \mathcal{A}_\nearrow$, then $b \in \mathcal{A}_\nearrow$ and $\mu_1(b) = \lim \mu_1(b_n)$

<u>Proof.</u> (a) Let $a_n \nearrow b$, $c_n \nearrow b$ where $a_n \in \mathcal{A}$, $c_n \in \mathcal{A}$, $n=1,2,\dots$, $b \in \mathcal{A}_\nearrow$. We have $a_n = \bigvee_m (a_n \wedge c_m) \leq \bigvee_m c_m$ and $\mu(a_n) = \lim_m \mu(a_n \wedge c_m) \leq \lim \mu(c_m)$, hence $\lim \mu(a_n) \leq \lim \mu(c_m)$. We can reverse the roles of $\{a_n\}_{n=1}$ and $\{c_n\}_{n=1}$ in the argument and show that $\lim \mu(a_n) \leq \lim \mu(c_n)$.

According to the proof of (a) we prove only (e). The third part of the lemma is as trivial as the second.

Let $a_{ni} \nearrow b_n$, $(i \nearrow \infty)$, $a_{ni} \in \mathcal{A}$, $b_n \in \mathcal{A}_f$, $n=1,2,\dots$, $b_n \nearrow b$. Denote $c_k = \bigvee_{n=1}^{k} a_{nk}$. Then $c_k \in \mathcal{A}$, for all k and $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ is monotone sequence. We have $a_{mn} \le c_n \le b_n$ for $m \le n$, hence $\mu(a_{mn}) \le \mu(c_n) \le \mu(b_n)$ for $m \le n$ and $\mu_1(b_m) \le \lim \mu(c_n) \le \le \lim \mu_1(b_n)$. Hence we have $\lim \mu_1(b_m) = \lim \mu(c_n) = \lim \mu_1(b_n)$ and $\bigvee_n c_n = \bigvee_n b_n$.

D e f i n i t i o n 2. Let the symbols $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_f$, μ, μ_1 denote the same as above. We define a function $\mu^*: \mathcal{X} \to \langle 0,1 \rangle$ by

$$\mu^*(c) = \inf \{ \mu_1(b) : c \le b \in \mathcal{A}_f \}$$

T h e o r e m 1. The function μ^* has the following properties :

(a) $\mu^*/\mathcal{A}_f = \mu_1$, $0 \le \mu^*(c) \le 1$ for all $c \in \mathcal{X}$.

(b) $\mu^*(a \vee b) + \mu^*(a \wedge b) \le \mu^*(a) + \mu^*(b)$ for all $a,b \in \mathcal{X}$.

(c) If $a,b \in \mathcal{X}$ and $a \le b$ then $\mu^*(a) \le \mu^*(b)$.

(d) If $a_n \in \mathcal{X}$, $n=1,2,\dots$, $a_n \nearrow a$, then $\mu^*(a_n) \nearrow \mu^*(a)$.

P r o o f. (a) The second part of (a) is trivial. μ^* is an extension of μ_1 because μ_1 is a monotone function.

(b) Let δ be an arbitrary, positive number. Then there exist elements $c,d \in \mathcal{A}_f$ such, that $\mu^*(a) + \frac{\delta}{2} \ge \mu_1(c)$ and $\mu^*(b) + \frac{\delta}{2} \ge \mu_1(d)$. We have $\mu^*(a) + \mu^*(b) + \delta \ge \mu_1(c) + \mu_1(d) = \mu_1(c \vee d) + \mu_1(c \wedge d) \ge \mu^*(a \vee b) + \mu^*(a \wedge b)$.

(d) Let δ be an arbitrary, positive number. Let $b_k \in \mathcal{A}_f$, $b_k \ge a_k$, such, that $\mu^*(a_k) + \frac{\delta}{2^k} \ge \mu_1(b_k)$. Put $c_k = \bigvee_{i=1}^{k} b_i$.

Then $\{c_k\}_{k=1}$ is increasing, $c_k \in \mathcal{A}_1$, $a_k \leq c_k$ for all k and $\mu^*(a_k) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\delta}{2^i} \geq \mu_1(c_k)$ for $k=1,2,3,\dots$. (The last inequality may be verified using the mathematical induction.) We have $\lim \mu^*(a_k) + \delta \geq \mu_1(\bigvee_k c_k) \geq \mu^*(a)$, but the reverse inequality is evident from (c).

T h e o r e m 2. Let a function $\vartheta : \mathcal{X} \to \langle 0,1 \rangle$ have the properties (a),(b),(c),(d) from Theorem 1. Denote $\mathcal{C} = \{a \in \mathcal{X} : \vartheta(a) + \vartheta(a^\perp) = 1\}$. Then $\mathcal{C}$ is a lattice σ-subalgebra of $\mathcal{X}$ and $\vartheta/\mathcal{C}$ is a probability measure on $\mathcal{C}$. If $b \in \mathcal{X}$, $b \leq a$, $a \in \mathcal{C}$ and $\vartheta(a) = 0$, then $b \in \mathcal{C}$ (ϑ is complete on $\mathcal{C}$).

P r o o f . Let $a,b \in \mathcal{C}$. We have $\vartheta(a \vee b) + \vartheta(a \wedge b) \leq$ $= \vartheta(a) + \vartheta(b)$ and $\vartheta((a \vee b)^\perp) + \vartheta((a \wedge b)^\perp) \leq \vartheta(a^\perp) + \vartheta(b^\perp)$. The sum of the right hand sides is equal to 2. On the other hand

$\vartheta(a \vee b) + \vartheta((a \vee b)^\perp) \geq 1$ and

$\vartheta(a \wedge b) + \vartheta((a \wedge b)^\perp) \geq 1$ by (b) from Theorem 1.

Hence there is the equality in each of these inequalities and $\mathcal{C}$ is a lattice subalgebra of $\mathcal{X}$ and $\vartheta/\mathcal{C}$ is additive.

Let $a_n \in \mathcal{C}$, $n=1,2,\dots$ and $a_n \nearrow a$. We have $\vartheta(a) = \lim \vartheta(a_n)$ and $\vartheta((\vee a_n)^\perp) \leq \vartheta(a_n^\perp)$ for all n. But $\vartheta(a_n) + \vartheta((\vee a_n)^\perp) \leq 1$ for all n and hence $\vartheta(\vee a_n) + \vartheta((\vee a_n)^\perp) \leq 1$ and $\mathcal{C}$ is a lattice σ-subalgebra of $\mathcal{X}$. If $b \in \mathcal{X}$, $b \leq a$, $a \in \mathcal{C}$ and $\vartheta(a) = 0$, then $\vartheta(b) = 0$ and $\vartheta(b) + \vartheta(b^\perp) = \vartheta(b^\perp) \leq 1$.

T h e o r e m 3. Let $\mathcal{A}$ be a lattice subalgebra of $\mathcal{X}$, μ be a probability measure on $\mathcal{A}$. Then there exists a lattice σ-subalgebra $\mathcal{B}$ of $\mathcal{X}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ and a probability measure $\bar{\mu}$ on $\mathcal{B}$ that $\bar{\mu}$ is an extension of μ . The extension $\bar{\mu}$ is uniquely determined on the smallest lattice σ-subalgebra of $\mathcal{X}$ over $\mathcal{A}$.

P r o o f . We can extend the probability measure μ to a function μ_1 on a sublattice $\mathcal{A}_1$ of $\mathcal{H}$. According to Definition 2 and Theorem 1 we can induce the outer measure μ^*. With respect to Theorem 2 $\mathcal{B} = \{a \in \mathcal{H} : \mu^*(a) + \mu^*(a^\perp) = 1\}$ is a lattice σ-subalgebra of $\mathcal{H}$. Denote $\bar{\mu}$ the restriction $\mu^*/\mathcal{B}$. Then $\bar{\mu}$ is a probability measure on $\mathcal{B}$.
Clearly $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ and $\mathcal{B} \supset \mathcal{S}\mathcal{A}$. Let γ be a measure on $\mathcal{S}\mathcal{A}$ such that $\gamma/\mathcal{A} = \mu$. With respect to the definition of μ^*, $\gamma \leq \mu^*$ on $\mathcal{S}\mathcal{A}$ (observe that $\gamma = \mu_1$ on $\mathcal{A}_1$). Let $a_0 \in \mathcal{S}\mathcal{A}$ be such that $\gamma(a_0) < \mu^*(a_0)$. With respect to the last inequality we have $\gamma(u) = \gamma(a_0) + \gamma(a_0^\perp) < \mu^*(a_0) + \mu^*(a_0^\perp) = \mu(u)$ which is impossible, since $\gamma = \mu$ on $\mathcal{A}$.

In his paper [5], B.Riečan presented a construction of the completion $\tilde{\mu}$ of a probability measure μ, which was defined on a lattice algebra (σ-algebra) $\mathcal{K}$ of an orthomodular lattice $\mathcal{H}$. He proved that $\tilde{\mu}$ is an extension of μ and its domain $\tilde{\mathcal{K}}$ is a lattice algebra (σ-algebra) of $\mathcal{H}$. If $\mathcal{K}$ is a lattice σ-algebra of an orthomodular lattice $\mathcal{H}$, μ is a measure on $\mathcal{K}$ and we induce the outer measure μ^* on $\mathcal{H}$ by
$\mu^*(a) = \inf\{\mu(b) : a \leq b \in \mathcal{K}\}$ and denote by $\mathcal{C}$ the system of measurable elements (by Theorem 2), then $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{K}}$ and
$\tilde{\mu} = \mu^*/\mathcal{C}$.

R e f e r e n c e s

[1] B i r k h o f f , G. : Lattice Theory, New York 1948

[2] N e v e u , J. : Bases Mathématiques du calcul des probabilités, Masson, Paris 1964

[3] R i e č a n , B. : On the extension of measures on lattices, Mat. časopis 19, 1969, 44-49 .

[4] R i e č a n , B. : A note on the extension of measures on lattices, Mat. časopis 20,1970,239-244.

[5] R i e č a n , B. : Abstract construction of a Lebesgue measure from a Borel measure, Mat. časopis 25, 1975, 49-58.

Authoŕs address : Hronská 26, 839 00 Bratislava

Received : 25.11.1976

S ú h r n

PROBLÉM ROZŠÍRENIA MIERY V ORTHOZVÄZOCH

Peter Volauf, Bratislava

V práci je vyriešený problém rozšírenia pravdepodobnostnej miery μ z podalgebry $\mathcal{A}$ orthozväzu $\mathcal{H}$ na σ-podalgebru $\mathcal{B}$ zväzu $\mathcal{H}$ za predpokladu, že μ na $\mathcal{A}$ spĺňa $\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b)$. Je ukázané, že rozšírenie $\bar{\mu}$ je úplnou pravdepodobnostnou mierou na $\mathcal{B}$ a že rozšírenie na $\mathcal{S}\mathcal{A}$ je jediné.

Р е з ю м е

ПРОБЛЕМА ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕРЫ НА СТРУКТУРЕ С ОРТОДОПОЛНЕНИЕМ

Петр Волауф

Целью заметки является проблема продолжения вероятностной меры μ определенной на некоторой альгебре $\mathcal{A}$ структуры с орто-

дополнением $\mathcal{H}$. Проблема решена для вероятностных мер являющихся оценкой, $\mu(a)+\mu(b)=\mu(a\vee b)+\mu(a\wedge b)$.
Продолжение $\bar{\mu}$ является полной мерой на σ-альгебре $\mathcal{B}$ и продолжение на наименьшую σ-альгебру $\mathcal{S}\mathcal{A}$ содержащую $\mathcal{A}$ единственно.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ БУЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ

Иван Хаверлик, Братислава

1. ЗАДАЧА СИНТЕЗА УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Одной из задач дискретной математики, которая требует свой собственный подход, является задача о синтезе управляющих систем. Особенностью этой задачи является то, что здесь сталкиваемся с отысканием экстремума дискретной функции, которая обладает большим числом относительных екстремумов.

С развитием кибернетических исследований многие объекты стали рассматриваться как управляющие системы, как например: нервная ткань, осуществляющая то или иное воздействие на органы; релейно-контактные схемы, выполняющие управляющие функции; система геосферы сохраняющая свое состояние на основе переноса информации; цифровая вычислительная машина, осуществляющая процес решения задачи и т.п.

Уже в 1955 году была С.В.Яблонским [9] сделана попытка выявить смысл управляющих систем. С математической точки зрения выше упомятые системы характеризуются тем, что они обладают некоторой структурой, схемой S и реализуют определенную функцию f. Именно единство (S, f) схемы и функции составляет главную сущность управляющей системы. В дальнейшем будем говорить, что схема S в управляющей системе (S, f) реализует функцию f , или, что функция f реализуется схемой S.

Особенно важную роль для рассмотрения основных задач об управляющих системах играют следующие модельные объекты: дизъюнктивные нормальные формы, реализующие функции алгебры логики /булевские функции/; формулы, реализующие функции алгебры логики; схемы из функциональных элементов; контактные схемы; автоматы построенные из некоторого набора элементов и осуществляющие переработку входных последовательностей в выходные; те или иные формы алгоритмов, реализующие вычислимые функции. В дальнейшем под функцией f будем понимать некоторую булевскую функцию, под схемой S схему из функциональных элементов над некоторым базисом, реализующую эту функцию f [4].

Обозначим через Σ множество всех схем S и через F - множество всех функций f, где (S, f) пробегает некоторый класс управляющих систем. Возникает задача /задача о синтезе управляющих систем/, как по функции f найти схему S, реализующую f. Эта задача, как правило, решается неоднозначно, поэтому вводят меру сложности схем $L(S)$ /$S \in \Sigma$/, являющуюся функционалом /или оператором/ и удовлетворяющую некоторым естественным условиям. Далее формулируется принцип предпочтения, который обычно связан с теми или иными экстремальными свойствами функции $L(S)$. После этого задача о синтезе может быть уточнена следующим образом: для любой функции $f \in F$ найти схему S, для которой $L(S)$ обладает экстремальными свойствами. Для большинства задач требуется, чтобы $L(S)$ было минимальным. В частности, для схем из функциональных элементов задача синтеза сводится к задаче о построении схемы, содержащей минимальное число элементов. Естественно обозначить это минимальное значение $L(S)$ через $L(f)$.

В большинстве случаев, для которых задача синтеза - задача о построении минимальных схем, существуют алгоритмы для построения этих минимальных схем. Однако трудоемкость этих алгоритмов весьма велика, поскольку они основаны на переборах всех схем, например схем из функциональных элементов. В силу этого даже при использовании быстродействующих вычислительных машин мы лишены возможности находить таким способом минимальные схемы даже для сравнительно простых функций /от небольшого числа переменных - 5 ÷ 10/ [8].

Существуют два подхода в решении задачи о синтезе. Подход Шеннона характеризуется отказом от рассмотрения задачи синтеза минимальной схемы для индивидуальных функций $f(x_1, x_2, ., x_n)$. Вместо этого рассматривают задачу оптимального синтеза для некоторого класса функций от n-переменных. Кроме того условие минимальности схем заменяется условием асимптотической минимальности. Второй подход основан на ограничении на средства решения [7, 8, 9] .

Работы К.Шеннона, С.В.Яблонского, О.В.Лупанова, Ю.И.Журавлева, Э.И.Нечипорука, Е.П.Липатова и др. привели в частности к одному из фундаментальных результатов в теории синтеза управляющих систем - было установлено, что почти все функции допускают лишь весьма сложную схемную реализацию, что фактически значит, что практически недоступны. Поэтому исследования направлены на выделение классов функций, допускающих более простую схемную реализацию, чем большинство, а также на нахождение методов их синтеза. В 1965 году О.В.Лупанов [5] сформулировал принцип локального кодирования, который не только позволил для почти всех известных классов функций получить асимптотически наилучшие методы синтеза, но и стимулировал исследования в направлении отыскания специальных классов и описания методов их оптимального синтеза.

2. ПРИНЦИП ЛОКАЛЬНОГО КОДИРОВАНИЯ О.В.ЛУПАНОВА

Суть принципа локального кодирования, предложенного О.В.Лупановым [5] состоит в следующем. Пусть $\mathcal{F}$ - некоторый класс функций. Каждой функции из $\mathcal{F}$ поставим в соответствие ее код - последовательность из нулей и единиц - разбитый на куски /куски могут быть разной длины и даже пересекаться/. Каждый кусок кода содержит информацию о значении функции на некотором множестве входных наборов. Требование локальности кодирования есть требование того, чтобы куски кода были небольшими.

Реализация функции из рассматреваемого класса происходит на основе следующего алгоритма:

1. По входному набору /значению переменных/ определяются "координаты" соответствующего куска кода /например, координаты его начала во всем коде и его длина/. Схема, которая "вычисляет" эти координаты должна быть в определенном смысле простой.

2. По координатам куска кода выдается сам соответствующий кусок кода. Как правило, это основная по сложности часть схемы реализующей данную функцию.

3. По входному набору переменных, координатам куска кода и самого куска кода вычисляется значение функции на заданном наборе переменных. Эта часть схемы реализующей данную функцию, тоже должна быть простой по сложности.

В главе П работы [5] исследуются три частных случая принципа локального кодирования:

1. принцип равномерного кодирования - куски кода не пересекаются и имеют одинаковую длину;

2. принцип неравномерного кодирования - куски кода могут иметь различную длину и могут пересекаться;

3. принцип параметризации - куски кода состоят из одного разряда.

Для следующего нам понадобиться еще один частный случай принципа локального кодирования предложенный Е.П.Липатовым [3] , когда куски кода могут иметь различную длину, но не пересекаются.

Пусть $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ - (n, m)-оператор отображающий набор из нулей и единиц длины n на набор из нулей и единиц длины m , и пусть ему поставлены в соответствие следующие объекты:

1. Последовательность из нулей и единиц $\tilde{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{h-1})$ длины h (код оператора), разбитая на непересекающиеся куски, вообще говоря, различной длины. Обозначим через Q максимальную длину куска кода.

2. Вспомогательные операторы $A_N^{(1)}$, $A_N^{(2)}$, которые по входному набору переменных определяют соответственно номер куска и его длину.

3. Оператор $A_N^{(3)}$-декодер, который по входному набору переменных, номеру куска кода, его длине, самому куску и некоторым другим вспомогательным операторам выдает значение оператора $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ на этом входном наборе.

В [3] на основе теоремы 2.3 в [5] - теоремы неравномерного локального кодирования доказана следующая теорема неравномерного локального кодирования для непересекающихся кусков кода.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $\mathcal{F}^{n,m}$-класс (n, m)-операторов, M - число операторов в классе, $J(\mathcal{F}^{n,m}) = \dfrac{\log M}{\log\log M}$ и операторы из $\mathcal{F}^{n,m}$ допускают неровномерное кодирование с соблюдением условий :

1. $h \sim \log M$

2. $L(A_N^{(i)}) = \bar{o}(J(\mathcal{F}^{n,m}))$; $i = 1,2,3$;

3. $\dfrac{Q \log h}{h} \to 0$;

4. куски кода не пересекаются.

Тогда [1/] [2/]

$$L(\mathcal{F}^{n,m}) \sim \varrho J(\mathcal{F}^{n,m}).$$

1/ Параметр ϱ зависит от базиса.

2/ Всюду в этой статье используются следующие обозначения:

3. ПРОБЛЕМА РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ И КЛАССЫ БУЛЕВСКИХ МАТРИЦ С ДАННЫМ ЧИСЛОМ УГЛОВЫХ КЛЕТОК

В теории распознавания образов рассматриваются и проблемы восприятия и обработки зрительной информации, в частности плоских объектов. В связи с обработкой зрительной информации F. Attneave [10] высказал предположение, что в распознавании формы наиболее важную роль играют те точки, в которых контурные линии меняют свое направление или обрываются. Исходя из этого тезиса введем понятие их дискретного аналога в том частном случае, когда имеется дело с булевскими матрицами.

В картографии при автоматическом строении карт решается проблема разного типа изолиний [10, 13, 14]. При этом можно использовать некоторое геометрическое представление булевских матриц. Геометрическая постановка задачи рассматриваемой в настоящей работе состоит в следующем.

Имеется решетка размера $N \times N$ т.е. N строк и в каждой строке N клеток (или $N+1$ строк и в каждой строке $N+1$ узлов). Строки и столбцы клеток решетки занумерованы в естественном порядке

$a(n) \to b$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a(n) = b$

$a(n) \lesssim b(n)$ - $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a(n)}{b(n)} \leqslant 1$

$a(n) \sim b(n)$ - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 1$

$a(n) = O(b(n))$ или $a(n) \precsim b(n)$ - отношение ограничено (сверху);

$a(n) \asymp b(n)$ - $a(n) = O(b(n))$ и $b(n) = O(a(n))$

Символ $\bar{o}(a)$ обозначает некоторую функцию b, удовлетворяющую условию $b/a \to 0$. /В частности $\bar{o}(1)$ обозначает функцию, стремящуюся к 0./

числами от 0 до $N-1$. Каждой клетке решетки приписаны координаты: номер строки и номер столбца решетки, в которых она находится.

В естественном порядке занумерованы и строки и столбцы узлов решетки числами от 0 до N. Узлу решетки приписаны координаты: номер строки и номер столбца /в нумерации строк и столбцов/, в которых он находится.

Пусть клеткам решетки приписаны значения из $\{0,1\}$. Значения клеток тогда образуют некоторую квадратную булевскую матрицу порядка N. Класс всех булевских квадратных матриц порядка N обозначим через $\mathcal{H}_N$.

Булевская матрица представляет таблицу значений /часть таблицы/ некоторой /некоторых/ функции алгебры логики от $2\lceil \log N \rceil$ переменных[1/]. В случае, когда $N = 2^n$, $n = 1,2,3, \ldots$, матрицей $A \in \mathcal{H}_N$, $A = (a_{i,j})$, $/i,j = 0,1,2,\ldots,N-1/$, определена в точности одна функция алгебры логики[2/]. Очевидно, что в случае, когда $2^{n-1} < N < 2^n$, можно определить функцию следующим образом: матрице $A \in \mathcal{H}_N$ соответствует функция алгебры логики $f(\tilde{x}) \in P_2^{2n}$, /где P_2^{2n} - класс всех функций алгебры логики от $2n$ переменных/, которая на наборах $\tilde{\sigma}$, для которых $|\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n| = j < N$, $|\sigma_{n+1}, \sigma_{n+2}, \ldots, \sigma_{2n}| = i < N$ принимает значения клеток (i,j) матрицы A и на остальных наборах неопределена /или может быть определена произвольным образом/.

В [6,5] рассматривались классы $\mathcal{R}_{n,k}$ - классы функций алгебры логики $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ принимающих значение 1 ровно на k значений аргументов. Аналогичным образом определяются классы $\hat{\mathcal{R}}_{N,k}$

[1/] Символ $\lceil a \rceil$ означает наименьшее целое число, не меньше a и всюду в этой работе символ $\log$ означает логарифм по основанию 2.

[2/] В работе [7] называются такие функции картовыми.

- классы квадратных булевских матриц порядка N, содержащих ровно k клеток принимающих значение 1.

<u>Определение 1.</u> Пусть $A \in \mathcal{N}_N$, $A = (a_{i,j})$, $/i,j = 0, 1,\ldots, N-1/$. Число клеток матрицы A принимающих значение 1 обозначим $|A|$. Множество всех матриц $A \in \mathcal{N}_N$ таких, что $|A| = k$, будем обозначать через $\hat{\mathcal{R}}_{N,k}$. Наглядно, что класс $\hat{\mathcal{R}}_{N,k}$ содержит $C^k_{N^2}$ матриц.

Классы $\mathcal{R}_{n,k}$ при малых значениях k изучались В.И.Финиковым [6]. Из его результатов следует, что если $k = O(\log n)$, то

$$L(\mathcal{R}_{n,k}) \asymp n. \qquad /1/$$

Отсюда следует, что в случае, когда k очень велико, функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ из $\mathcal{R}_{n,k}$ также реализуются просто, ибо если $f \in \mathcal{R}_{n,k}$, то $\bar{f} \in \mathcal{R}_{n,2^n-k}$. Поэтому если $2^{n-k} = O(\log n)$ то

$$L(\mathcal{R}_{n,k}) \asymp n.$$

Остальные классы $\mathcal{R}_{n,k}$ были изучены О.В.Лупановым [5]. Обозначим через $l(n,k) = \min(k, 2^n - k)$. О.В.Лупанов доказал / [5], теорема 3.4/, что для последовательности k_n такой, что

$$\frac{l(n, k_n)}{\log n} \to \infty,$$

имеет место[1/]

$$L(\mathcal{R}_{n,k}) \sim \varrho \frac{\log C^{k_n}_{2^n}}{\log\log C^{k_n}_{2^n}} \qquad /2/$$

В дальнейшем будет показана тесная связь между классами $\mathcal{R}_{n,k}$, $\hat{\mathcal{R}}_{N,k}$ и классами с данным числом угловых клеток.

<u>Определение 2.</u> Пусть (i,j) - клетка матрицы $A \in \mathcal{N}_N$, принимающая значение $a_{i,j} \in \{0,1\}$, находящаяся в i-ой строке и

[1/] См. сноску на стр. 183

j-ом столбце матрицы А. Соседними клетками клетки (i , j) будем называть клетки (i-1, j),(i+1, j),(i , j-1),(i , j+1), если они существуют. Окресностью $O((i, j))$ клетки (i , j) будем называть совокупность всех ее соседних клеток.

Окресность узла матрицы $A \in \mathcal{H}_N$ определим следующим способом.

<u>Определение 3.</u> Пусть $(i, j)^*$ узел решетки размера $N \times N$ (i, j = 0,1,...,), находящийся в i-ой строке узлов и j-ом столбце узлов решетки. Окресностью $\hat{O}((i, j))^*$ узла $(i, j)^*$ будем называть совокупность всех клеток (i, j),(i-1, j-1), (i-1, j),(i , j-1) - если они существуют.

Как уже было сказано, основную информацию о форме образа, возникшего в решетке, например закрашиванием клеток принимающих значение 1, имеют узлы решетки, в которых линии контура возникшей фигуры изменяют свое направление (случай типа + не является изменением направления). (Фигура может быть и не связной.) Очевидно, что совокупность таких узлов и значение одной клетки однозначно определяют фигуру.

Пусть в решетке $N \times N$ имеется t отмеченных узлов ($0 \leq t \leq (N+1)^2$) так, что в каждой строке и в каждом столбце решетки находится четное число таких узлов (если t - четное, то $t \leq N^2$). Но тем самым можно на последную строку и последний столбец узлов решетки не обращать внимание - они определены остальными строками и столбцами. Отмеченному узлу $(i, j)^*$ решетки припишем следующее значение: он "изменяет" значение всех клеток (p, q) решетки (матрицы), для которых $p \geq i$, $q \geq j$, причем "изменение" понимается так: если число отмеченных узлов $(i, j)^*$ решетки (матрицы) для которых $i \leq p$, $j \leq q$ нечетное, то клетка (p,q) принимает значение 1, в остальных случаях (число отмеченных узлов 0 или четное), клетка (p ,q) принимает значение 0.

Из сказанного следует, что это отображение фигур и отмеченных узлов одно-однозначное. Определим теперь формально это отображение.

<u>Определение 4.</u> Пусть $A, B \in \mathcal{N}_N$, $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ такие, что если $\hat{O}((i,j))^*$, $(i, j = 0,1,\ldots, N-1)$ содержит нечетное число клеток матрицы A принимающие значение 1, то $b_{i,j} = 1$. В остальных случаях $b_{i,j} = 0$. Это отображение будем обозначать $G(A) = B$. Клетку (i,j) матрицы A, для которой при этом отображении $b_{i,j} = 1$, будем называть угловой клеткой матрицы A и отображение $G(A) = B$ - заданием матрицы A угловыми клетками. Множество всех матриц $A \in \mathcal{N}_N$, для которых $G(A) = B$, где $B \in \hat{\mathcal{R}}_{N,k}$, будем называть классом булевских матриц порядка N с k угловыми клетками и обозначать $\mathcal{N}_{N,k}$.

Из матрицы B восстанавливается соответствующая матрица A следующим способом: если число единичных клеток (i,j) матрицы B $(b_{i,j} = 1)$, $i \leq p$, $j \leq p$, нечетное, то $a_{p,q} = 1$, в противоположном случае $a_{p,q} = 0$.

Обозначим через $\varphi(\mathfrak{M})$ - мощность класса $\mathfrak{M}$ булевских матриц. Отображение G является одно-однозначным и $\varphi(\hat{\mathcal{R}}_{N,k}) = C^k_{N^2}$. Отсюда и $\varphi(\mathcal{N}_{N,k}) = C^k_{N^2}$.

Будем рассматривать реализацию матриц $A \in \mathcal{N}_N$ схемами из функциональных элементов над произвольным конечным базисом $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_b\}$. Напомним некоторые определения. Каждый элемент E_i базиса B с m_i входами реализует некоторую полностью определенную булеву функцию, существенно зависящую от m_i аргументов, и ему приписан некоторый положительный вес P_i. Под сложностью $L(S)$ схемы S над заданным базисом понимается сумма весов входящих в нее элементов. При оценках сложности существенную роль играет параметр ρ (приведенный вес базиса)

$$\ell = \min \frac{p_i}{m_i - 1},$$

где минимум берется по тем элементам E_i базиса B, для которых $m_i \geq 2$.

Пусть $L(A)$ наименьшая из сложностей схем над данным базисом B реализующих матрицу A (т.е. по координатам i, j определяющих значение $a_{i,j}$ клетки (i, j)). Пусть $L(\mathcal{A}_N) = \max L(A)$, где максимум берется по всем $A \in \mathcal{A}_N$. Функция $L(N) = L(\mathcal{A}_N)$ называется функцией Шеннона для класса $\mathcal{A}_N$. Аналогично и $L(\mathcal{A}_{N,k})$.

Пусть $2^{n-1} < N < 2^n$. Очевидно $\varphi(\mathcal{A}_N) = 2^{N^2}$. Из известных фактов ([5] теоремы Д.1.,Д.8) следует

$$L(\mathcal{A}_N) \sim \ell \frac{N^2}{2 \log N}. \qquad /3/$$

Тесная связь между классами $\mathcal{A}_{N,k}$ и $\hat{\mathcal{A}}_{N,k}$ дает возможность использовать некоторые свойства классов $\hat{\mathcal{A}}_{N,k}$ при изучении классов $\mathcal{A}_{N,k}$, именно определить асимптотическое поведение (порядок) функции Шеннона для этих классов.

Обозначим через I' множество всех номеров строк и через J' множество всех номеров столбцов, в которых находятся угловые клетки матрицы $A \in \mathcal{A}_{N,k}$, т.е. $I' = \{i_1, i_2, \ldots, i_{k_1'}\}$; $J' = \{j_1, j_2, \ldots, j_{k_2'}\}$. Если эти множества не содержат 0, добавим этот элемент:

$$I = I' \cup 0; \quad J = J' \cup 0. \qquad /4/$$

Очевидно, что $\varphi(I) = k_1 \leq k_1' + 1$; $\varphi(J) = k_2 \leq k_2' + 1$;

$$k < k_1' + k_2' \leq 2k. \qquad /5/$$

<u>Определение 5.</u> Клетки (i, j) матрицы $A \in \mathcal{A}_{N,k}$, для которых $i \in I$, $j \in J$, будем называть обобщенными угловыми клетками матрицы A и узлы $(i, j)^*$ соответствующей решетки обобщенными угловыми узлами.

Обобщенные угловые узлы решетки матрицы A индуцируют однозначно разложение решетки на непересекающиеся подрешетки, которым соответствуют подматрицы $A_{r,s}$ матрицы A. Очевидно, что такие подматрицы состоят сплошь из единиц или сплошь из нулей.

Расположим элементы множества I и аналогичного множества J в порядке возрастания и занумеруем числами от 0 до k_1, и соответственно от 0 до k_2. Таким образом каждому обобщенному угловому узлу $(i,j)^*$ решетки матрицы A (обобщенной угловой клетке (i,j) матрицы A) соответствует пара чисел (r,s), где $r = 0,1,\dots, k_1$; $s = 0,1,\dots,k_2$. Та же пара будет принадлежат и подматрице $A_{r,s}$ определенной узлом (i,j). Пару (r,s) будем называть координатами подматрицы $A_{r,s} = (a_{i,j})$, где $i = i_r, i_r + 1,\dots, i_{r+1} - 1$; $j = j_s, j_s + 1, \dots, j_{s+1} - 1$.

Пусть $A \in \mathcal{H}_{N,k}$. На основе выше сказанного можно матрицу A однозначно определить множествами I, J и матрицей $B \in \mathcal{H}_{k+1,k}$, $B = (b_{r,s})$, $(r,s = 0,1,\dots,k)$, такой, что $b_{r,s}$ -значение клетки (r,s) матрицы B совпадает со значениями клеток подматрицы $A_{r,s}$ матрицы A (все клетки подматрицы $A_{r,s}$ принимают значение 0 или значение 1). И так, реализацию матрицы $A \in \mathcal{H}_{N,k}$ можно свести на реализацию двух булевских монотонных операторов [5] отображающих наборы длины $\log N$ на наборы длины $\log k_1$ и соответственно наборы длины $\log N$ на наборы длины $\log k_2$ и реализацию матрицы $B \in \mathcal{H}_{k+1,k}$.

<u>З а м е ч а н и е .</u> Достаточно рассматривать только матрицы, у которых клетка (0,0) не является угловой. Если клетка (0,0) является в матрице $A \in \mathcal{H}_{N,k}$, $A = (a_{i,j})$, угловой, то можно реализовать матрицу $\bar{A} \in \mathcal{H}_{N,k-1}$, $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})$, для которой клетка (0,0) не является угловой и добавить один инвертор.

4. ПОРЯДОК АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИИ ШЕННОНА ДЛЯ КЛАССОВ БУЛЕВСКИХ МАТРИЦ С ДАННЫМ ЧИСЛОМ УГЛОВЫХ КЛЕТОК

Рассмотрим сначала классы $\mathcal{H}_{k+1,k}$, т.е. классы всех квадратных булевских матриц порядка $k+1$ с k угловыми клетками. Докажем следующее уравнение

<u>Лемма 1.</u>

$$L(\mathcal{H}_{k+1,k}) \asymp k .$$

<u>Доказательство.</u> Построим схему для реализации любой матрицы (см. замечание) $A \in \mathcal{H}_{k+1,k}$, $A = (a_{i,j})$. Строки матрицы A разделим на два подмножества A_0, A_1 в зависимости от того, сколько они содержат угловых клеток. Множеству A_0 принадлежат все строки матрицы A, содержащие больше чем l угловых клеток, где параметр l будет определен позже. Таких строк будет не больше k/l. Множество A_1 содержит все остальные строки матрицы A. Строки из A_0 определяют разбиение остальных строк матрицы A на группы (может быть и пустые) так, что в одну группу входят строки из A_1 находящиеся между двумя "соседними" строками из A_0. Каждую такую группу строк разобьем на массивы подряд стоящих строк матрицы A так, чтобы в каждом массиве было не больше l угловых клеток. Всех таких массивов будет не больше $2k/l$.

Аналогичным способом разобьем и столбцы матрицы A и построим массивы столбцов. "Самостоятельных" столбцов будет не больше k/l и массивов столбцов будет не больше $2k/l$.

Массивы столбцов и "самостоятельные" столбцы образуют некоторое разбиение строк из A_0 на части, которые содержат не больше l угловых клеток (сам массив содержит не больше угловых клеток). Обозначим

$$m = \lceil \frac{k}{l} \rceil \leq \frac{k}{l} + 1 . \qquad /6/$$

частей строк из A_0 определенных массивами столбцов и "самостоятельными" столбцами, будет не больше $m.3m = 3\ m^2$. Множество всех частей строк и массивов строк обозначим через T' и его элементы через t'_r, ($r = 1,2,\dots,n'; n' \leqslant 3m^2 + 2m \leqslant 5\ m^2$). Упорядочим элементы $t'_r \in T'$ так, чтобы сначала были (в естественном порядке) все массивы и после них все части строк (строки в естественном порядке и части их тоже) и занумеруем их наборами длины $\lceil \log 5\ m^2 \rceil$. К номеру массива добавим еще один нулевой разряд и к номеру части строки один единичный разряд.

Аналогичным способом (с помощью множеств A_0, A_1) определим множество T'' массивов столбцов и занумеруем элементы $t''_s \in T''$, ($s = 1,2,\dots,n''; n'' \leqslant 5m^2$). Аналогично как у строк, к номеру массива добавим еще один нулевой разряд и к номеру части столбца один единичный разряд.

Множество клеток $t_{r,s}$ содержит те клетки матрицы A, которые одновременно принадлежат t'_r и t''_s , ($t_{r,s} = t'_r \cap t''_s$). Множество всех $t_{r,s}$ обозначим через T. Очевидно, что мощность множества T не больше $25\ m^4$. Занумеруем подряд все элементы $t_{r,s} \in T$.

Каждому элементу $t'_r \in T'$ сопоставим параметр u'_r, определенный следующим образом:

1^0 если t'_r часть строки и $j_r > 0$, причем $j_r = \min j$, где минимум берется по всем клеткам (i, j) из t'_r , то $u'_r = a_{i,j_r-1}$;

2^0 в остальных случаях $u'_r = 0$.

Параметр u'_r определяет четность числа угловых клеток "до начала" части строки в данной строке из A_0.

Аналогичным способом сопоставим каждому элементу $t_s \in T''$ параметр u''_s , определенный следующим образом:

1^0 если t''_s часть столбца и $i_s > 0$, причем $i_s = \min i$, где минимум берется по всем клеткам (i, j) из t''_s , то $u''_s = a_{i_s-1,j}$;

2^{0} в остальных случаях $u''_{s} = 0$.

Каждому элементу $t_{r,s} \in T$ сопоставим параметр $u_{r,s}$ -четность числа угловых клеток (i, j) матрицы A, для которых $i < i_{r,s}$, $j < j_{r,s}$ и $i_{r,s} = \min p$, $j_{r,s} = \min q$, где минимум берется по всем клеткам (p, q) из $t_{r,s}$.

Пусть (i, j) клетка матрицы A. Значение $a_{i,j}$ этой клетки определяется в соответствии со следующим алгоритмом:

1^{0} По координатам i, j (наборам длины $\lceil \log(k+1) \rceil$) определяются номера соответствующих элементов $t'_{r} \in T'$, $t''_{s} \in T''$ и $t_{r,s} \in T$.

2^{0} По этим номерам выделяются координаты угловых клеток в соответствующих элементах t'_{r}, t''_{s}, $t_{r,s}$, которые сравниваются с координатами клетки (i, j) в соответствующих элементах t'_{r}, t''_{s}, $t_{r,s}$.

3^{0} Выделяются значения соответствующих параметров u'_{r}, u''_{s}, $u_{r,s}$.

4^{0} Значение $a_{i,j}$ клетки (i, j) матрицы A определено суммой по $(\mathrm{mod}\ 2)$ ее значений в соответствующих элементах t'_{r}, t''_{s}, $t_{r,s}$ и параметров u'_{r}, u''_{s}, $u_{r,s}$.

В соответствии с этим алгоритмом строится схема реализующая матрицу A. Функциональную блочную запись этой схемы можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
a_{i,j} = {} & C'(A'(i,j)) \oplus D'(A'(i,j), i, j) \oplus \\
& \oplus C''(A''(i,j)) \oplus D''(A''(i,j), i, j) \oplus \\
& \oplus C_0(A_0(A'(i,j), A''(i,j)) \oplus \\
& \oplus D_0(A_0(A'(i,j), A''(i,j)),
\end{aligned}
\qquad /I/
$$

где знак $\oplus$ представляет сумму по модулю 2.

Опишем блоки схемы реализующей матрицу $A \in \mathcal{R}_{k+1,k}$. Блоки

A', A'', A_0 определяют номера соответствующих элементов t'_r, t''_s, $t_{r,s}$. Блоки C', C'', C_0 определяют значения параметров u'_r, u''_s, $u_{r,s}$ соответственно. Блоки D', D'', D_0 определяют значения клетки (i, j) матрицы A "в рамках" соответственных элементов t'_r, t''_s, $t_{r,s}$.

Опишем более подробно блоки схемы для реализации матрицы $A \in$ $\in \mathcal{A}_{k+1,k}$ и оценим их сложность. Блок A' строится из пяти блоков и его функциональная блочная запись имеет вид

$$A'(i,j) = E_5(E_1(i),\ E_4(E_3(E_2(i,j)))). \qquad /11/$$

Блок E_1 по координате i определяет номер массива (если (i, j) не принадлежит ни одному массиву, то выдается нулевой набор (см. замечание)). Это оператор, отображающий набор длины $\lceil \log (k+1) \rceil$ на набор длины $\lceil \log 5m^2 \rceil$. Сложность этого блока (по теореме 1 в [4]) удовлетворяет неравенству

$$L(E_1) \leqslant c_1 \log m \cdot \frac{k}{\log k}. \qquad /7/$$

Блок E_2 по координате i определяет номер строки (содержащей более 1 угловых клеток - занумерованных подряд), и если клетка (i, j) не принадлежит ни одной такой строке, то выдается нулевой набор. Это оператор, отображающий набор длины $\lceil \log (k+1) \rceil$ на набор длины $\lceil \log m \rceil$. Сложность этого блока (по теореме 1 в [4]) удовлетворяет неравенству

$$L(E_2) \leqslant c_2 \log m \cdot \frac{k}{\log k}. \qquad /8/$$

Блок E_3 - это дешифратор. Поэтому (лемма 2.1 в [5])

$$L(E_3) \leqslant c_3\, m. \qquad /9/$$

Блок E_4 представляет m монотонных операторов (один для каждой строки из A_0), отображающих наборы длины $\lceil \log m \rceil$ + $+ \lceil \log(k+1) \rceil$ в наборы длины $\lceil \log 5m^2 \rceil$. Этот оператор определяет номер соответственной части строки, содержащей клетку (i,j). В силу леммы 3.7 в [5]

$$L(E_4) \leq c_4(\log m + \log k)m^2 . \qquad /10/$$

Блок E_5 - это система $\lceil \log 5m^2 \rceil$ дизъюнкторов. Этот блок выдает номер элемента t'_r, содержащего клетку (i,j) и

$$L(E_5) \leq c_5 \log m . \qquad /11/$$

Из /7/ - /11/ следует, что

$$L(A') \leq (c_1+c_2)\log m \frac{k}{\log k} + c_3 m + \qquad /12/$$
$$+ c_4(\log m + \log k)m^2 + c_5 \log m .$$

Блок A'' построен аналогично. Он определяет номер соответствующего элемента $t''_s \in T''$, содержащего клетку (i,j).

Блок A_0 по номерам элементов t'_r и t''_s определяет номер элемента $t_{r,s} \in T$, содержащего клетку (i,j). Это оператор, отображающий два набора длины $\lceil \log 5m^2 \rceil$ в набор длины $\lceil \log 25m^4 \rceil$. Его сложность удовлетворяет соотношению (теорема 1 в [4])

$$L(A_0) \leq c_6 \log m \cdot \frac{m^2}{\log m} \leq c_6 \cdot m^2 . \qquad /13/$$

Блок C' выделяет значение параметра u'_r. Это оператор выделения разряда. Поэтому (лемма 2.2 в [5])

$$L(C') \leq c_7 m^2 . \qquad /14/$$

Аналогично и блок C'' выделяет значение параметра u''_s.

Блок C_0 выделяет значение параметра $u_{r,s}$. Это тоже оператор выделения разряда и

$$L(C_o) \leq c_8\, m^4. \qquad /15/$$

Блок D' определяет значение клетки $(i\ ,j\ )$ "в рамках" элемента t_r' , т.е. значение соответствующей клетки в соответствующей подматрице, определенной элементом t_r'. Раньше, чем его описать, укажем кодирование матрицы $A \in \mathcal{H}_{k+1,k}$. Код матрицы представляют три списка координат угловых клеток - один для каждого разбиения /покрытия/ T', T'', T. Координаты угловых клеток выписаны подряд для каждого элемента t_r', t_s'' , $t_{r,s}$ соответственно, а затем в порядке номеров этих элементов. Длина одного такого списка

$$h_1 = 2k\lceil \log (k+1)\rceil. \qquad /16/$$

Блок D' строится на основе принципа локального кодирования О.В.Лупанова [5]. Куском кода будем считать набор координат угловых клеток соответствующего элемента t_r'. Максимальная длина куска кода Q будет не больше $2\,l\lceil\log(k+1)\rceil$. Сложности соответствующих операторов выбора куска кода $A_N^{(1)}$, $A_N^{(2)}$ /это $(\lceil\log\ 5\,m^2\rceil\ ,\ p\ )$ и $(\lceil\log\ 5\,m^2\rceil\ ,\ q\ )$ - операторы соответственно; сдесь $p=\lceil\log h_1\rceil$; $q=\lceil\log Q\ \rceil$ / удовлетворяют неравенствам /теорема 1 в [4] /

$$L(A_N^{(1)}) \leq c_9 \log k \cdot \frac{m^2}{\log m} \qquad /17/$$

и

$$L(A_N^{(2)}) \leq c_{10}(\log l + \log\log k)\frac{m^2}{\log m}. \qquad /18/$$

Блок декодирования $A_N^{(3)}$ состоит из l операторов сравнения наборов длины $2\lceil\log\ (k+1)\rceil$ и сумматора по (mod 2) l - разрядов. Поэтому /лемма 3.1 в [5] /

$$L(A_N^{(3)}) \leq c_{11}\log k + c_{12}\, l. \qquad /19/$$

Пусть $l = \left\lceil \frac{k}{\log k} \right\rceil$, тогда $m \leqslant \log k$. Отсюда следует, что выполнены условия теоремы неравномерного локального кодирования для непересекающихся кусков кода (теорема 1) - соотношения /16/ - - /19/, и

$$L(D') \sim \varrho \frac{2k\lceil\log(k+1)\rceil}{\log(2k\lceil\log(k+1)\rceil)} = O(k) . \qquad /20/$$

Аналогичным способом строятся и блоки D'', D_0. Сложность последнего блока - сумматора по (mod 2) - очевидно имеет порядок $O(1) = \bar{o}(k)$. Тогда для сложности всей схемы, реализующей произвольную матрицу $A \in \mathcal{K}_{k+1,k}$, имеем

$$L(\mathcal{K}_{k+1,k}) \lesssim 3\,O(k) + \bar{o}(k) \lesssim O(k) . \qquad /21/$$

Тем самым получена верхняя оценка функции Шеннона для класса $\mathcal{K}_{k+1,k}$. Из мощности класса $\mathcal{K}_{k+1,k}$ и теоремы Д.1 в [5], следует нижняя оценка функции Шеннона для этого класса

$$L(\mathcal{K}_{k+1,k}) \geqslant \varrho(k+1) . \qquad /22/$$

Из /21/ и /22/ следует

$$L(\mathcal{K}_{k+1,k}) \asymp k .$$

Лемма доказана.

Порядок функции Шеннона для классов $\mathcal{K}_{N,k}$ оценивает следующая теорема

<u>Т е о р е м а 2.</u> Пусть $\mathcal{K}_{N,k}$ класс квадратных булевских матриц порядка N с k угловыми клетками, и пусть последовательность k_N такова, что

$$(\log\log N)^2 \leqslant k_N \leqslant \frac{N^2}{2} .$$

Тогда

$$L(\mathcal{H}_{N,k}) \asymp \frac{\log C_{N^2}^{k_N}}{\log\log C_{N^2}^{k_N}} .$$

Для доказательства этой теоремы рассмотрим три основных случая

1^o $(\log\log N)^2 \leq k \leq N$;

2^o $N \leq k \leq N^{7/4}(\log N)^{1/2}$;

3^o $N^{7/4}(\log N)^{1/2} \leq k \leq N^2/2$;

В случае 1^o схема для реализации матрицы $A \in \mathcal{H}_{N,k}$ строится на основе следующего алгоритма:

1. По координате i клетки (i,j) определяется число элементов множества I матрицы A "влияющих" на клетку (i,j), т.е. координата i'.

2. Аналогично, по координате j клетки (i,j) определяется число элементов множества J матрицы A "влияющих" на клетку (i,j), т.е. координата j'.

3. По координатам i', j' определяется значение клетки (i', j') матрицы [1/] $B_A \in \mathcal{H}_{k+1,k}$, соответствующей матрице A. Значение клетки (i', j') матрицы B_A совпадает со значением клетки (i,j) матрицы A.

Функциональная блочная запись этого алгоритма (схемы) имеет вид

$$a_{i,j} = b_{i',j'} = C(A_I(i), A_J(j)). \qquad /III/$$

[1/] Из того, что $k_1', k_2' \leq k$ следует, что число элементов множеств I,J можно формально дополнить до k+1.

Разобьем элементы множества I на группы, содержащие ровно 2^{λ} элементов, кроме может быть последней, содержащей меньше чем 2^{λ} элементов. (Параметр λ будет определен позже). Кодирование и декодирование оператора F_I , определяющего[1/] число"влияющих" элементов множества I на клетку (i,j) матрицы A проводится аналогично тому, как это делалось для классов функций алгебры логики с данным числом единиц в случае П в [5]. Блок A_I строится по функциональной блочной схеме

$$i' = D_3(D_2(D_1(i)), D_1(i), i) . \qquad /IV/$$

Кодом оператора F_I служит список разностей между координатами элементов множества I для матрицы A в каждой группе самостоятельно, причем у разностей стираются все нулевые старшие разряды. При вычислении значения оператора F_I для клетки (i,j) определяется номер соответствующей группы элементов множества I и выделяются первые координаты соответствующих обобщенных угловых клеток, которые сравниваются с координатой i клетки (i,j). К числу "влияющих" обобщенных угловых клеток матрицы A прибавляется число элементов множества I во всех предыдущих группах этих элементов (по (mod 2)). Опишем более подробно блоки схемы для оператора F_I функциональная блочная запись которого имеет вид /IV/ и оценим их сложности.

Блок D_1 определяет номер соответствующей группы элементов из множества I. Это монотонный оператор, отображающий набор длины $\lceil \log N \rceil$ в наборы длины $\lceil \log d \rceil$, где

$$d = \left\lceil \frac{k}{2^{\lambda}} \right\rceil \leqslant \frac{k}{2^{\lambda}} + 1 .$$

[1/] Оператор F_I реализуется блоком A_I , блок A_J реализует оператор F_J.

По лемме 3.7 в [5], имеет место

$$L(D_1) \leq c_{13}\, d \log N . \qquad /23/$$

Из кодирования оператора F_I и леммы 3.9 в [5] следует, что логарифм длины кода h_I этого оператора асимптотически не больше $k \log N$. Схема для оператора F_I строится на основе принципа неравномерного локального кодирования О.Б.Лупанова.

Пусть [1/] $\lambda = \lfloor \frac{1}{2} \log k \rfloor$. Тогда

$$\frac{\log (2^{\lambda} \log N)}{k/2^{\lambda}} \to 0 . \qquad /24/$$

Куском кода является список разниц первых координат элементов из множества I в одной группе. Длина максимального куска код Q (лемма 3.9 в [5]) не превосходит $2^{\lambda}(2 + \log (N / 2^{\lambda}))$. Отсюда следует, что

$$\frac{Q \log h_I}{h_I} \longrightarrow 0. \qquad /25/$$

Блок D_2 состоит из оператора E_6 - выделяющего номер начального разряда куска кода по его номеру (номеру группы элементов из множества I), оператора E_7 - вычисляющего длину куска кода и оператора E_8 - выделяющего данный кусок кода. Оператор E_6 отображает наборы длины $\lceil \log d \rceil$ в наборы длины $\lceil \log (k \log k) \rceil$. Поэтому (теорема Д.5 в [5])

$$L(E_6) \lesssim \frac{d \log k}{\log (d \log k)} + c_{14} \log k. \qquad /26/$$

Оператор E_7 отображает наборы длины $\lceil \log d \rceil$ в наборы длины $\lceil \log Q \rceil$ Поэтому (теорема Д.5 в [5])

1/ Символ $\lfloor a \rfloor$ означает наибольшее целое число, не больше a.

$$L(E_7) \lesssim \frac{d(\lambda + \log\log k)}{\log(d(\lambda + \log\log k))} + \lambda + \log\log k\ . \qquad /27/$$

Сложность оператора E_8 будет оценена на основе теоремы неровномерного локального кодирования (теорема 2.3 в [5]).

Блок D_3 представляет основной оператор декодирования. Он по координате i клетки (i,j) вычисляет координату этой клетки (набор длины λ) в рамках данной группы (оператор из $\mathcal{F}^{\lceil \log N\rceil, \lambda}$) и по этой координате, номеру куска кода и самого куска кода вычисляет число "внешних" элементов множества I на клетку (i,j). Схема для этого блока строится в соответствии со следующим алгоритмом:

1. По номеру группы (куска кода) вычисляются наборы, являющиеся длинами всех наборов составляющих данный кусок кода. Это делает некоторый $(\lceil \log d\rceil, \lceil \log k+2\lceil \log\log k\rceil\rceil)$ - оператор E_9.

2. Образуются координаты элементов множества I в рамках группы. Делает это система $2^\lambda - 1$ штук $(\lambda + \lceil \log\log k\rceil)$-разрядных сумматоров, соединенных надлежащим образом со схемой оператора E_9 и между собой, и система 2^λ штук $(\lceil \log k\rceil)$-разрядных сумматоров.

3. Координата i' клетки (i,j) сравнивается с координатами элементов данной группы. Это делает система $2^\lambda \lceil \log k\rceil$ операторов сравнения.

4. Суммируется число всех "влияющих" элементов множества I и к нему добавляется число всех элементов в предыдущих группах. Это делает один 2^λ - разрядный сумматор, монотонный оператор, отображающий наборы длины $\lceil \log d\rceil$ в наборы длины $\lceil \log k\rceil$ и один $(\lceil \log k\rceil)$-разрядный сумматор.

Из определения параметров d и λ не трудно убедиться в том, что сложность блока D_3 удовлетворяет соотношению (теорема Д.5, лемма 3.2, лемма 2.3 в [5])

$$L(D_3) \leq O\left(\frac{k \log N}{\log(k \log N)}\right). \qquad /28/$$

Вернемся теперь к блоку D_2. Из /24/ - /28/ следует, что условия теоремы неравномерного локального кодирования (теорема 2.3 в [5]) выполнены, и тогда

$$L(D_2) \leq c_{15} \frac{k \log N}{\log k}. \qquad /29/$$

Аналогичным способом строится и оценивается и блок A_J, определяющий координату j' клетки (i,j) матрицы $A \in \mathcal{H}_{N,k}$, представляющую число "влияющих" элементов множества J матрицы A.

Блок C строится на основе леммы 1. И так сложность всей схемы реализующей матрицу $A \in \mathcal{H}_{N,k}$ в случае 1^0 удовлетворяет соотношению (см. /23/,/28/,/29/)

$$L(A) \leq c_{16} \frac{k \log N}{\log(k \log N)} + c_{17} k. \qquad /30/$$

Нижняя оценка функции Шеннона в этом случае получается из теоремы Д.1 в [5]

$$L(\mathcal{H}_{N,k}) \geq c_{18} \frac{k \log N}{\log(k \log N)} - c_{19} k. \qquad /31/$$

В этом случае $k/N \to 0$ и $\frac{\log N}{\log k} \leq c_{20}$, поэтому из /30/ и /31/ следует утверждение теоремы.

<u>Случай 2^0</u>

В этом случае $N \leq k \leq N^{7/4} \log N^{1/2}$. Схема для матрицы $A \in \mathcal{H}_{N,k}$ строится аналогично тому, как это было сделано в доказательстве леммы 1. Матрица A разбивается на полосы строк, содержащих не более l угловых клеток (параметр l будет определен в зависимости на k). Определяется значение соответствующей клетки в соответствующей полосе. Таким же способом разбивается матрица A на полосы столбцов и определяется значение клетки в соответствующей полосе. Полосы строк и столбцов определяют разбиение матрицы A на непересекающиеся подматрицы. Определяется значение соответствующей клетки в рамках соответствующей подматрицы и четность числа угловых клеток"до начала" этой подматрицы. Значение клетки матрицы A получается суммированием по $(\bmod 2)$ значений этой клетки в полосе строк и полосе столбцов, в подматрице и в четности числа угловых клеток "до начала" соответствующей подматрицы.

Из того, что в этом случае $\log C_N^k 2 \sim k \log \left(\frac{2}{k}\right) \asymp k \log N$, кодом матрицы $A \in \mathcal{H}_{N,k}$ служит список координат угловых клеток матрицы. (Код матрицы представляют фактически три списка координат угловых клеток (в общем случае разных) - для полос строк, полос столбцов и подматриц). Схема для реализации матрицы A строится из трех аналогичных частей (см. лемму 1).

Рассмотрим два подслучая

A. $N \leq k < N^{3/2}$;

B. $k > N^{3/2}$.

В случае A, в отличие от схемы для реализации матриц из классов $\mathcal{H}_{k+1,k}$ не вводятся параметры u'_r, u''_s потому, что все элементы покрытий T',T'' одинаковой природы - полосы строк или полосы столбцов. При определении параметра l в зависимости от k

$$l = \left\lceil \frac{k}{\log k} \right\rceil, \qquad /32/$$

выполнены условия теоремы неравномерного локального кодирования для непересекающихся кусков кода, и сложность блока, выделяющего соответствующий кусок кода /например, для полосы строк/ асимптотически не превосходит

$$c_{21}\,\frac{h_1}{\log h_1} \leq c_{22}\,\frac{k\log N}{\log(k\log N)} \leq c_{23}\,\frac{k\log\frac{N^2}{k}}{\log(k\log\frac{N^2}{k})}\,. \qquad /33/$$

Такая-же оценка имеет место и для блоков, выделяющих соответствующие куски кода для полосы столбцов и подматриц /операторы D', D_e /. Сложность всей схемы для матрицы $A \in \mathcal{K}_{N,k}$ удовлетворяет неравенству

$$L(A) \lesssim 3c_{24}\cdot\frac{k\log\frac{N^2}{k}}{\log(k\log\frac{N^2}{k})} \sim c_{25}\,\frac{\log C^k_{N^2}}{\log\log C^k_{N^2}}\,. \qquad /34/$$

В случае В. объединяются элементы покрытий T', T'', T, т.е. полосы строк, полосы столбцов и подматрицы разбиения матрицы определенного полосами строк и полосами столбцов, на группы таким способом, чтобы длина кода для одной была асимптотически равной некоторому параметру p, которой будет определен позже. Схема для реализации матрицы состоит из трех основных блоков A', A'', A_o вычисляющих значение соответствующей клетки в рамках полосы строк, полосы столбцов и подматрицы соответственно. Блок C определяет четность угловых клеток матрицы "до начала" данной подматрицы. Последний блок, это сумматор по (mod 2) с четырьмя входами. Функциональная блочная запись имеет вид

$$\begin{aligned} a_{i,j} = {} & A_o(A_2'(i,j),\ A''(i,j)) \oplus \\ & \oplus C(A_3'(i,j),\ A''(i,j)) \oplus \\ & \oplus A_1'(i,j) \oplus A''(i,j)\ ; \end{aligned} \qquad /V/$$

где[1/]

$$A'(i,j) = \overline{A_1'(i,j)\ A_2'(i,j)\ A_3'(i,j)}\ ;$$

1/ Через $\overline{AB}$ обозначается набор состоящий из наборов A, B .

$$A''(i,j) = \overline{A_1''(i,j)\ A_2''(i,j)\ A_3''(i,j)}$$

Волее подробно опишем действие блока A' /блоки A'', A_0 аналогичны/. По координате i клетки (i , j) матрицы A определяются номер группы полос строк а длина кода этой группы. По номеру группы и координате i клетки (i , j) определяются номер полосы данной группы и длина ее кода. По номеру группы выделяется код соответствующей группы. По номеру полосы и длины ее кода выделяется из кода группы код соответствующей полосы. Из-за того, что кодирование тривиальное, можно координаты угловых клеток в данной полосе прямо сравнивать с координатами клетки (i , j) и определить так число "влияющих" угловых клеток в данной полосе на клетку (i , j), т.е. значение клетки (i , j) в данной полосе. Влок A' строится в соответствии с выше сказанным и функциональная блочная запись имеет вид

$$A'(i,j) = H_7(H_6(H_5(H_1(i),H_2(i)), H_4(H_1(i),i),H_3(H_1(i),i)),i,j)) \qquad /VI/$$

Опишем более подробно блоки H_1 - H_7 и оценим их сложности. Влок H_1 определяет номер соответствующей группы. Групп асимптотически не больше $h_1/p = q + \omega(N)$, где h_1 - длина кода матрицы для полос строк и $\omega(N) \to 0$ с ростом N. Из этого следует, что блок H_1 - это монотонный ($\lceil \log N \rceil$, $\lceil \log q + \omega(N) \rceil$) - - оператор, его сложность удовлетворяет неравенству /лемма 3.7 в [5] /

$$L(H_1) \lesssim c_{26}\, q \log N. \qquad /35/$$

Влок H_2 определяет длину кода соответствующей группы. Это ($\lceil \log N \rceil$, $\lceil \log h_1 \rceil$) - оператор и /теорема 1 в [4] / имеет место

$$L(H_2) \leq c_{27} \log h_1 \cdot \frac{N}{\log N} . \qquad /36/$$

Блок H_3 определяет длину кода полосы, которая не превосходит $2l \lceil \log N \rceil$ /содержит не больше l угловых клеток/. Это делает некоторый $(\lceil \log N \rceil , \lceil \log (2l \lceil \log N \rceil) \rceil)$ - оператор, сложность которого удовлетворяет неравенству

$$L(H_3) \leq c_{28} \log(2l \log N) . \frac{N}{\log N} . \qquad /37/$$

Блок H_4 определяет номер полосы в данной группе. Это один монотонный $(\lceil \log N \rceil , \lceil \log \frac{k}{l} \rceil)$ - оператор /число всех полос не превосходит k/l /, один монотонный $(\lceil \log N \rceil , \lceil \log (q + \omega (N))\rceil)$ - оператор /число групп не больше $q + \omega (N)$, где $\omega (N) \to 0$ с ростом N /, один монотонный $(\lceil \log (q + \omega (N))\rceil , \lceil \log \frac{k}{l} \rceil)$ - оператор вычитания / $\lceil \frac{k}{l} \rceil$ -разрядный/. На основе леммы 3.7 и леммы 3.3 в [5] сложность блока H_4 удовлетворяет неравенству

$$L(H_4) \lesssim c_{29} \frac{k}{l} \log N + c_{30}\, q \log N + c_{31} \frac{k}{l} \log q + c_{32} \frac{k}{l} . \qquad /38/$$

Блок H_6 выделяет из кода группы кусок кода - код соответствующей полосы. Он состоит из схемы для $(\lceil \log (q + \omega (N))\rceil + \lceil \log \frac{k}{l} \rceil , \lceil \log p \rceil)$ - оператора, определяющего начало кода данной полосы в соответствующей группе и схемы для оператора выделения части набора. Из того, что длина кода группы асимптотически равна p, по теореме 1 в [4] и лемме 2.3 в [5] следует

$$L(H_6) \lesssim c_{33} \log p \cdot \frac{qk}{l} + c_{34}\, p \log p . \qquad /39/$$

Блок H_7 сравнивает координаты угловых клеток в данной полосе и вычисляет значение клетки (i ,j) в рамках этой полосы. Это делает l $(2\lceil \log N\rceil)$ -разрядных схем сравнения, сумматор по(mod 2) с l входами. Сложность этого блока удовлетворяет неравенству /лемма 3.1 в [5] /

$$L(H_7) \le c_{35}\, l \log N + c_{36} l + 1 \qquad /40/$$

Выберем параметры l и p следующим образом

$$l = \left\lfloor \frac{k^{2/3}}{\log N} \right\rfloor, \qquad p = \left\lfloor \frac{k \log N}{(\log k)^3} \right\rfloor. \qquad /41/$$

Нетрудно убедиться в том, что при этом определении параметров l и p имеет место[1/] /см. /35/ - /40/ /

$$L(H_s) = \bar{o}\ \frac{k \log N}{\log k} \quad ; \quad s = 1, 2, 3, 4, 6, 7. \qquad /42/$$

Из /41/ следует

$$\frac{p \log h_1}{h_1} \to 0 . \qquad /43/$$

Соотношения /42/, /43/ означают, что выполнены условия теоремы локального кодирования для непересекающихся кусков кода и

$$L(A') \lesssim c_{37} \frac{h}{\log h} \lesssim c_{38} \frac{\log C^k_{N^2}}{\log \log C^k_{N^2}}. \qquad /44/$$

Из-за того, что блок A'' строится совсем аналогично, как блок A', имеет место

$$L(A'') \lesssim c_{39} \frac{\log C^k_{N^2}}{\log \log C^k_{N^2}}. \qquad /45/$$

Схема блока A_0 строится на основе того-же алгоритма, как и схемы блоков A', A''. Из-за того, что число подматриц не превос-

---

[1/] Сложность блока H_5 оценивается теоремой локального кодирования.

ходит $(k/l)^2$ и число групп подматриц не превосходит $q^2 + \omega'(N)$ где $\omega'(N) \to 0$ с ростом N, сложность блока H_4' соответствующего блоку H_4 в схеме A', удовлетворяет условию

$$L(H_4') \lesssim c_{40}(k/l)^2 \log N + c_{41} q^2 \log N + c_{42}(k/l)^2 \log q + c_{43}(k/l)^2. \qquad /46/$$

Аналогично, сложность блока H_6', соответствующего блоку H_6 в схеме A', удовлетворяет неравенству

$$L(H_6') \lesssim c_{44} \log p \left(\frac{qk}{l}\right)^2 + c_{45}\, p \log p. \qquad /47/$$

Из определения параметров l и p /41/ следует, что

$$L(H_s') = \bar{o}\left(\frac{k \log N}{\log k}\right); \quad s = 4,6. \qquad /48/$$

Отсюда следует, что /теорема локального кодирования/

$$L(A_e) \lesssim c_{46} \frac{\log C^k_{N^2}}{\log \log C^k_{N^2}}. \qquad /49/$$

Блок C определяет четность числа угловых клеток до начала соответствующей подаматрицы. Это оператор выделения разряда и его сложность удовлетворяет неравенству /лемма 2.2 в [5] /

$$L(C) \lesssim c_{47}\left(\frac{k}{l}\right)^2 = \bar{o}\left(\frac{k \log N}{\log k}\right). \qquad /50/$$

Из /44/, /45/,/49/, /50/ следует, что сложность схемы реализующей матрицу $A \in \mathcal{H}_{N,k}$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$L(A) \lesssim c_{48} \frac{\log C^k_{N^2}}{\log \log C^k_{N^2}}. \qquad /51/$$

Нижняя оценка функции Шеннона удовлетворяет в этом случае условию /теорема Д.1 в [5] /

$$L(\mathcal{H}_{N,k}) \gtrsim c_{49} \frac{\log C^k_{N^2}}{\log \log C^k_{N^2}}. \qquad /52/$$

Из /51/ и /52/ следует утверждение теоремы 2 в подслучае В/ случая 2^{0}.

Случай 3^{0}

В этом случае $N^{7/4} (\log N)^{1/2} \leq k \leq \frac{N^2}{2}$.

Кодирование и декодирование в этом случае подобны кодированию и декодированию для ненулевых инвариантных классов, но являются неравномерными. Для кодирования выбирается четный параметр d. Для каждого l, $0 \leq l \leq 2^d$ все булевские матрицы из класса $\hat{\mathcal{R}}_{2^{d/2},l}$ нумеруются наборами длины $\lceil \log C^{l}_{2^d} \rceil$ /их $C^{l}_{2^d}$ штук/. Кодом матрицы является список номеров $2^{2\log N - d}$ матриц из классов $\hat{\mathcal{R}}_{2^{d/2},l}$ и некоторая дополнительная информация. Таким способом матрица $A \in \mathcal{H}_{N,k}$ фактически разбивается на подматрицы порядка $2^{d/2}$, кроме, может быть "крайних", меньшего размера. К каждому номеру подматрицы из $\hat{\mathcal{R}}_{2^{d/2},l}$ прибавляются значения крайних /извне сверху и слева относительно подматрицы/ клеток соседних подматриц /если таких нет, то добавляется 0/. Ко всему этому добавляется еще один разряд - четность числа угловых клеток "до начала" подматрицы. Вычисление значения клетки (i,j) матрицы $A \in \mathcal{H}_{N,k}$ происходит так. Из последних разрядов /кроме первых $d/2$/ координаты i и последних разрядов /кроме первых $d/2$/ координаты j определяется число единиц и номер матрицы из класса $\hat{\mathcal{R}}_{2^{d/2},l}$. По этим характеристикам и дополнительной информации в куске кода вычисляется значение соответствующей клетки в подматрице. Оно суммируется по $(\bmod 2)$ с четностью числа угловых клеток "до начала" подматрицы /из дополнительной информации в конце кода/.

Опишем подробнее кодирование и декодирование, которые в начале совпадают[1/] с кодированием и декодированием функций алгебры ло-

---

[1/] Как уже было сказано, матрицей $A \in \mathcal{H}_{N,k}$ определена одна $/N = 2^n/$

гики из $\mathcal{R}_{n,k}$ в [5] , в случае П. доказательства теоремы 3.4.

<u>Кодирование:</u> Пусть d - целое четное число, заключенное между 0 и $2 \log N$ /его более точное определение будет дано позже/. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2\lceil \log N \rceil})$ функция алгебры логики из $\mathcal{R}_{2\lceil \log N\rceil, k}$ определенная матрицей $A \in \mathcal{H}_{N,k}$ / $f(\tilde{x})$ можно доопределить нулями - см. сноску 1/. Рассмотрим функции

$$f_{\tilde{\sigma}'}(y_1,\ldots,y_d) = f(x_1,\ldots,x_{d/2};\ \sigma_{d/2+1},\ldots,\sigma_{\lceil \log N\rceil}, x_{\lceil \log N\rceil+1},\ldots,x_{\lceil \log N\rceil + d/2}, \sigma_{\lceil \log N\rceil + d/2+1},\ldots,\sigma_{2\lceil \log N\rceil}),$$

где

$$\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)\ (|\tilde{\sigma}_1| = i,\ |\tilde{\sigma}_2| = j \ \text{ и } \ \tilde{\sigma}' = (\sigma_{d/2+1},\ldots,\sigma_{\lceil \log N\rceil}, \sigma_{\lceil \log N\rceil + d/2+1},\ldots,\sigma_{2\lceil \log N\rceil}).$$

Это $2^{2\lceil \log N\rceil - d}$ функций. Пусть $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}'} = (f_{\tilde{\sigma}'}(0,\ldots,0),\ldots,f_{\tilde{\sigma}'}(1,\ldots,1))$ - набор 2^d значений функции $f_{\tilde{\sigma}'}$ на всех наборах значений ее аргументов в естественном порядке. Пусть $l_{\tilde{\sigma}'}$ - число единиц в $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}'}$. Очевидно, что "единичные наборы" f распределяются по функциям $f_{\tilde{\sigma}}$: каждый единичный набор функции f определяет в точности один единичный набор в точности одной функции $f_{\tilde{\sigma}}$. Поэтому

$$k = \sum_{\tilde{\sigma}'} l_{\tilde{\sigma}'}.$$

Набор $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}'}$ принадлежит множеству $B_{2^d, l_{\tilde{\sigma}}}$ /множество $B_{n,l}$ содержит наборы с l единицами длины n - всего C_n^l наборов, которые занумерованы в порядке возрастания их значений/. Согласно нумерации наборов из $B_{2^d, l_{\tilde{\sigma}}}$, набору $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}}$ соответствует некоторый набор $\tilde{\nu}_{\tilde{\sigma}}$ длины 2^d , причем единицы в наборе $\tilde{\nu}_{\tilde{\sigma}}$, могут встречаться лишь на первых $\lceil \log C_{2^d}^{l_{\tilde{\sigma}}} \rceil$ местах [5] . Пусть $\tilde{\mu}_{\tilde{\sigma}'}$

или несколько функций алгебры логики от $2\lceil \log N\rceil$ переменных (одна функция определена на наборах $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$, где $|\tilde{\sigma}_1| < N$, $|\tilde{\sigma}_2| < N$).

набор, состоящий из первых $\lceil \log C_{2^d}^{1\tilde{\sigma}'} \rceil$ разрядов набора $\tilde{\nu}_{\tilde{\sigma}'}$. Кодом функции f объявим набор $(\tilde{\mu}(0,\dots,0),\dots, \tilde{\mu}(1,\dots,1))$, составленный из всех наборов $\tilde{\mu}_{\tilde{\sigma}}$, расположенных в естественном порядке. Очевидно, что длина этого кода равна

$$\sum_{\tilde{\sigma}} \lceil \log C_{2^d}^{1\tilde{\sigma}'} \rceil$$

/всего $2^{2\lceil \log N \rceil - d}$ слагаемых/. Кусками кода являются наборы $\tilde{\mu}_{\tilde{\sigma}}$ плюс значения клеток матрицы A на краях подматрицы /"извне сверху и слева - если таких нет, то считаются нулевыми/ так, что максимальная длина куска кода Q удовлетворяет условию

$$Q \leq 2^d + 2.2^{d/2} + 1 = 2^{d/2}(2^{d/2} + 2) + 1. \qquad /53/$$

Из леммы 3.11 в [5] следует, что максимальная длина кода матрицы A в этом случае не превосходит

$$h_A \leq 2^{2\lceil \log N \rceil - d} + \log C_{N^2}^k + 2^{2\lceil \log N \rceil - d}(2^{d/2} + 1),$$

где последний член суммы - дополнительная информация. Будем считать, что для всякой матрицы $A \in \mathcal{U}_{N,k}$ длина кода равна

$$h_A = \lceil 2^{2\lceil \log N \rceil - d}(2^{d/2} + 2) + \log C_{N^2}^k \rceil. \qquad /54/$$

<u>Декодирование:</u> Опишем операторы $A_N^{(1)}, A_N^{(2)}, A_N^{(3)}$. Оператор $A_N^{(1)}$ по $\tilde{\sigma}' = (\sigma_{d/2+1},\dots,\sigma_{\lceil \log N \rceil}, \sigma_{\lceil \log N \rceil + d/2 + 1},\dots,\sigma_{2\lceil \log N \rceil})$ т.е. по $2\lceil \log N \rceil - d$ разрядам набора $\tilde{\sigma}$, вычисляет номер начального разряда соответствующего куска кода - набор длины $p = \lceil \log h_A \rceil$. Это $(2\lceil \log N \rceil - d,\ p)$ - оператор и его сложность удовлетворяет неравенству /теорема Д.5 в [5] /

$$L(A_N^{(1)}) \lesssim \frac{p\, 2^{2\lceil \log N \rceil - d}}{\log(p\, 2^{2\lceil \log N \rceil - d})} + p. \qquad /55/$$

Оператор $A_N^{(2)}$ вычисляет по $\tilde{\sigma}'$ длину соответствующего куска кода - точнее, ее двоичную запись - набор длины d . Это $(2\lceil \log N\rceil - d, d)$ - оператор и по теореме Д.5 в [5] имеет место

$$L(A_N^{(2)}) \lesssim \frac{d\, 2^{2\lceil \log N\rceil - d}}{\log(d\, 2^{2\lceil \log N\rceil - d})} + d. \qquad /56/$$

Оператор $A_N^{(3)}$ является основным оператором декодирования. Он по набору $\tilde{\sigma}$ и куску кода вычисляет значение клетки (i, j) в рамках соответствующей подматрицы. Схема для $A_N^{(3)}$ строится в соответствии со следующим алгоритмом:

1/ По набору $\tilde{\sigma}'$ вычисляется набор $\tilde{\varkappa}_{\tilde{\sigma}}$, длины d - двоичная запись числа $l_{\tilde{\sigma}'}$ единиц у функции $f_{\tilde{\sigma}'}$, т.е. число угловых клеток в соответствующей подматрице. Это делает оператор $A_\varkappa$ - $(2\lceil \log N\rceil - d, d)$ - оператор, сложность которого удовлетворяет неравенству /теорема Д.5 в [5] /

$$L(A_\varkappa) \leqslant c_{50} \frac{d\, 2^{2\lceil \log N\rceil - d}}{\log(d\, 2^{2\lceil \log N\rceil - d})} + c_{51} d. \qquad /57/$$

2/ По набору $\tilde{\varkappa}_{\tilde{\sigma}'}$ и куску кода $\tilde{\mu}_{\tilde{\sigma}}$ вычисляется набор $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}'}$ значений функции $f_{\tilde{\sigma}'}$. Это делает оператор D_{2^d} , сложность которого по лемме 3.10 в [5] удовлетворяет неравенству

$$L(D_{2^d}) \leqslant c_{52} \frac{2^{3d}}{d} . \qquad /58/$$

3/ Оператор C вычисляет сумму по (mod 2) единиц в $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}}$ до клетки с координатами определенными набором $\tilde{\sigma}'' = (\tilde{\sigma}_1'', \tilde{\sigma}_2'')$ $\tilde{\sigma}_1'' = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{d/2})$, $\tilde{\sigma}_2'' = (\sigma_{\lceil \log N\rceil+1}, \sigma_{\lceil \log N\rceil+2}, \ldots, \sigma_{\lceil \log N\rceil+d/2})$. Это два дешифратора /для каждой координаты $\tilde{\sigma}_1''$, $\tilde{\sigma}_2''$ один/ наборов длины 2^d , два оператора K_{2^d} , отображающие набор длины 2^d с одной единицей на s -том месте / $s = 1, 2, .., 2^d$/ на набор длины 2^d , где на первых s местах стоят единицы и на остальных нули, система 2^d конъюнкторов, оставляющих единицы в наборе $\tilde{\pi}_{\tilde{\sigma}'}$ /матрица порядка $2^{d/2}$ / только до клетки с координатами, определенными набором $\tilde{\sigma}'$, и сумматором по (mod 2) с 2^d входами. Сложность этого оператора удовлетворяет неравенству /лемма 2.1 в [5] /

$$L(C) \leqslant c_{53}\, 2^d. \qquad /59/$$

4/ По дополнительной информации вычисляется сумма по (mod 2) крайних клеток соседних подматриц /сверху и слева/ до клетки с координатами $|\tilde{\sigma}_1''|$, $|\tilde{\sigma}_2''|$. Это делает блок C_1 представляющий два $2^{d/2}$ - дешифратора, два оператора $K_2^{d/2}$ и сумматор по (mod 2) с $2^{d/2+1}$ входами. Сложность этого блока удовлетворяет неравенству

$$L(C_1) \leqslant c_{54}\, 2^{d/2}. \qquad /60/$$

5/ По (mod 2) суммируется значение соответствующей клетки в данной подматрице, результат обработки дополнительной информации и четности числа единиц /угловых клеток/ до начала подматрицы. Это делает сумматор по (mod 2) с тремя входами. Очевидно, что его сложность не больше некоторой константы.

Из /57/ - /60/ следует, что

$$L(A_N^{(3)}) \lesssim \frac{d\, 2^{2\lceil \log N\rceil - d}}{\log(d\, 2^{2\lceil \log N\rceil - d})} + \frac{2^{3d}}{d}. \qquad /61/$$

Положим

$$d = 2\left\lfloor \frac{1}{6}\log k - \frac{1}{5}\log\log k \right\rfloor. \qquad /62/$$

Тогда можно убедиться, что таким образом выполнены условия теоремы неравномерного кодирования для непересекающихся кусков кода /теорема 1/ и в этом случае имеет место

$$L(\mathcal{H}_{N,k}) \lesssim \varrho \frac{\log C^k_{N^2}}{\log\log C^k_{N^2}} \qquad /63/$$

Нижняя оценка функции Шеннона получается по теореме Д.1 в [5].

$$L(\mathcal{H}_{N,k}) \gtrsim \varrho \frac{\log C^k_{N^2}}{\log\log C^k_{N^2}} \qquad /64/$$

Из /63/ и /64/ следует утверждение теоремы 2 в случае 3^0. Теорема 2 доказана.

Добавление. В случае 1^0 можно при некоторых ограничениях, конкретно

$$\frac{k_N}{(\log\log N)^2} \longrightarrow \infty \; ; \qquad \frac{\log k_N}{\log N} \longrightarrow 0$$

изменить без усложнения конструкции О.Б.Лупанова для доказательства теоремы 3.4 в [5] и получить асимптотику функции Шеннона. В случае 3^0 фактически доказана асимптотика функции Шеннона.

Литература

[1] Журавлев, Ю.И.: Теоретико-множественные методы в алгебре логики, Сб. Проблемы кибернетики, вып.8, Москва, 1962.

[2] Журавлев, Ю.И.: Оценки сложности алгоритмов построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики, Сб. Дискретный анализ 3, Новосибирск, 1964.

[3] Липатов, Е.П.: Об одном случае неравномерного локального кодирования, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 26, Москва, 1973.

[4] Лупанов, О.Б.: О синтезе некоторых классов управля-

ющих систем, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 10, Москва, 1963.

[5] Л у п а н о в , О.Б.: Об одном подходе к синтезу управляющих систем - принципе локального кодирования, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 14, Москва, 1965.

[6] Ф и н и к о в , Б.И.: Об одном семействе классов функций алгебры логики и их реализации в классе П-схем, ДАН СССР 115, 2, Москва, 1957.

[7] Я б л о н с к и й , С.В.: О классах функций алгебры логики, допускающих простую схемную реализацию, Успехи математ. наук 12, вып. 6, Москва, 1957.

[8] Я б л о н с к и й , С.В.: ДАН СССР 124, 6, 44 - 47, Москва, 1959.

[9] Я б л о н с к и й , С.В.: Основные понятия кибернетики, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 2, Москва, 1959.

[10] A t t n e a v e , F.: Informational Aspects of Visual Perception, Psych. Rev., 61, N.Y. 1954.

[11] H a v e r l í k , I.: Matematický náčrt automatizácie spracovania dát z hľadiska tvorby tématických máp, Zb. Automatizácia tvorby kartografických diel, Bratislava, 1971.

[12] H a v e r l í k , I.: Asymptotika zložitosti realizácie mapových booleovských funkcií, Zb. O aplikáciách teoretických princípov kybernetiky, Bratislava, 1976.

[13] H a v e r l í k, I., K r c h o , J.: Theoretical Problems of Isoline Maps Construction by Means of Computers, "ICA Commision III", Budapest, 1974.

[14] H a v e r l í k , I., K r c h o , J.: The use of Computers in the Morphometric Analysis of Relief Insolation with an Elaborating Program in Algol for Maps Construction, Acta

Geologica et Geographica Univ. Comenianae, Geograph. Physica 1, Bratislava, 1973.

author´s adress: Haverlík Ivan
Katedra teoretickej kybernetiky
Prírodovedecká fakulta UK
Mlynská dolina
816 31 Bratislava

recieved 20.12.1976

S ú h r n

O ZLOŽITOSTI REALIZÁCIE NIEKTORÝCH TRIED BOOLEOVSKÝCH MATÍC

Ivan Haverlík, Bratislava

Vychádzajúc z možností využitia Booleovských matíc /0,1 - matíc/ ako modelačného prostriedku pri riešení niektorých problémov rozpoznávania obrazcov, sú definované triedy týchto matíc počtom "zakrivení" hranice obrazca určeného prvkami matice s rovnakou hodnotou. Na základe definície týchto tried Booleovských matíc sa v práci rieši úloha asymptotického ohodnotenia funkcie Shannona, určujucej zložitosť realizácie ľubovoľnej matice z danej triedy /určenie hodnoty prvku z jeho súradníc/.

R e s u m e

ON REALIZATION COMPLEXITY OF SOME CLASSES OF BOOLEAN MATRICES

Ivan Haverlík, Bratislava

Boolean matrices /0,1 - matrices/ can be used as a modelling tool to solve some problems of pattern recognition. Classes of such matrices are defined in terms of the number of "curvatures" of the boundary of the pattern determined by the matrix entries of the same value. Using the definition of those classes of Boolean matrices, the problem of asymptotic evaluation of Shannon function, determining the realization complexity of any matrix in the given class /finding the value of an entry from its co-ordinates/, is solved in the paper.

UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXVI — 1980

DENSITIES OF FIRST ORDER THEORIES

I v a n K o r e c, Bratislava

A. R. Meyer [4] stated a problem concerning possible densities of creative subsets of the set N. His problem was motivated by the idea that a creative set can be considered as the set of all Gödel numbers of an undecidable and effectively axiomatisable theory, e.g. the formal arithmetic. Some authors solved this problem in [6]; briefly speaking, the results are that the densities of creative sets can be changed almost arbitrarily. In the present paper related but a little less abstract problems are solved

1. RECURSIVE PSEUDONUMBERS

In the whole paper we only deal with nonnegative numbers, hence "real" means "a nonnegative real", and analogously for "integer" and "rational number". The term "recursive pseudonumber" was used e.g. in [1] and [7] (written in Russian); some results of this section are contained in [1] . Most of statements of Theorem 1 are not new in essential.

D e f i n i t i o n 1. (i) A sequence of rational numbers $(r_0, r_1, r_2, \ldots)$ is said to be recursive if there are recursive functions f, g such that $r_i = \frac{f(i)}{g(i)}$ for all $i \in N$.

(ii) A real r is said to be recursive if its dyadic expansion is recursive (i.e., if the function $f(i) = [2^{i+1}.r] - 2.[2^i . r]$ is recursive).

(iii) A real r is said to be a recursive pseudonumber if there is a recursive sequence of rational numbers which converges to r (in the classical sense).

(iv) A real r is said to be an increasing (or decreasing) recursive pseudonumber if there is an increasing (or decreasing) recursive sequence of rational numbers which converges to r.

(v) A real r is said to be a binary recursive pseudonumber if there is a recursively enumerable set $M \subseteq N$ such that

$$r - [r] = \sum_{i \in M} \frac{1}{2^i}$$

R e m a r k. For $r \leq 1$ we may write r instead of $r - [r]$ in (v). If the set M in (v) is infinite and the set $N - M$ is also infinite then the set M is uniquely determined by r. These statements will often be used implicitely in Section 2.

T h e o r e m 1. (i) A real r is recursive if and only if there are recursive functions f, g such that for all $n \in N - \{0\}$

$$\left| r - \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \frac{1}{n}$$

(ii) Every recursive real is a binary recursive pseudonumber.

(iii) Every binary recursive pseudonumber is an increasing recursive pseudonumber.

(iv) A real r is recursive if and only if it is both decreasind recursive pseudonumber and increasing recursive pseudonumber.

(v) There is a binary recursive pseudonumber which is not a recursive real.

(vi) There is an increasing recursive pseudonumber which is not a binary recursive pseudenumber.

(vii) There is a recursive pseudonumber which is neither increasing nor decreasing recursive pseudonumber.

P r o o f . The statements (i), (ii), (iii), and (iv) easily follow from the definition. To prove (v) and (vi), consider a creative set $C \subseteq N_2$ where N_2 is the set of positive even integers and define

$$r_1 = \sum_{i \in C} \frac{1}{2^i}, \quad r_2 = r_1 + \sum_{i \in N_2} \frac{1}{2^i} \qquad (= r_1 + \tfrac{1}{3})$$

Then r_1 is a binary recursive pseudonumber. If r_1 is recursive then we have an algorithm for recognizing the set C. This contradiction proves (v). The number r_2 is obviously an increasing recursive pseudonumber. Let

$$r_2 = \sum_{j \in D} \frac{1}{2^j}$$

It suffices to show that the set D is not recursively enumerable. Clearly $N - C = (N - N_2) \cup (N_2 \cap D)$. Thus if D is recursively enumerable then N - C is recursively enumerable, which is a contradiction. The statement (vii) is proved in [1] .

2. DENSITIES OF FIRST ORDER THEORIES

Let $\mathcal{P}$ be a nonempty finite set of predicate symbols and $\mathcal{L}$ be the set of all first order formulae over $\mathcal{P}$. (The formulae are formed by usual rules of inference from the elements of $\mathcal{P}$, variables x_1, x_2, x_3,..., logical symbols $\rightarrow$, $\equiv$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, and parentheses.) Let $\mathcal{L}_c$ be the set of all closed formulae belonging to $\mathcal{L}$. A set $T \subseteq \mathcal{L}_c$ is called a (first order) theory if it contains the axioms of first order predicate calculus belonging to $\mathcal{L}$ and it is closed under the modus ponens rule. Note that our notion of a theory, in essential, is taken from [2]. However, our results can be extended e.g. to (generalized) first order theories in the sense of [4], where open formulae can be provable and belong to theories. Moreover, the finite set $\mathcal{P}$ can be replaced by an infinite recursive set of predicate symbols and functional symbols and constants may occur in the formulae from $\mathcal{L}$, without any change of the results bellow. Recursiveness of sets (and sequences) of formulae is understood in the obvious sense; analogical notions are considered e.g. in [3].

Definition 2. Let

$$\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots) \tag{2.1}$$

be a sequence of formulae of $\mathcal{L}_c$ and let $M \subseteq \mathcal{L}_c$. The numbers

$$\underline{\mathrm{dens}}(M, \mathcal{A}) = \lim_{n \to \infty} \inf \frac{\mathrm{card}\ \{ i \leq n \mid A_i \in M \}}{n}$$

$$\overline{\mathrm{dens}}(M, \mathcal{A}) = \lim_{n \to \infty} \sup \frac{\mathrm{card}\ \{ i \leq n \mid A_i \in M \}}{n}$$

$$\mathrm{dens}(M, \mathcal{A}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{card}\ \{ i \leq n \mid A_i \in M \}}{n}$$

are said to be the lower density, the upper density and the density of the set M relative to the sequence $\mathcal{A}$, respectively.

Remark. Of course, Definition 2 can be used for arbitrary sequence $\mathcal{A}$ and for arbitrary set M but we shall use it only in the case quoted above. The density dens $(M, \mathcal{A})$ exists if and only if $\underline{\mathrm{dens}}(M, \mathcal{A}) = \overline{\mathrm{dens}}(M, \mathcal{A})$. The lower and the upper densities always exist and clearly $0 \leq \underline{\mathrm{dens}}(M, \mathcal{A}) \leq \overline{\mathrm{dens}}(M, \mathcal{A}) \leq 1$.

In general, we shall not suppose $\mathcal{A}$ to be one-to-one and $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\} = \mathcal{L}_c$. However, Definition 2 is most edequate under these assumptions. A further convenient property of $\mathcal{A}$ is recursiveness.

<u>Theorem 2</u>. There is a one-to-one recursive sequence (2.1) containing all members of $\mathcal{L}_c$ such that for every theory T in the language $\mathcal{L}$ we have:

(i) dens$(T, \mathcal{A})$ exists;

(ii) T is inconsistent if and only if dens$(T, \mathcal{A}) = 1$;

(iii) T is complete and consistent if and only if dens$(T, \mathcal{A}) = \frac{1}{2}$;

(iv) T is incomplete and decidable if and only if dens$(T, \mathcal{A}) \leq \frac{1}{2}$ and dens $(T, \mathcal{A})$ is a recursive real;

(v) T is incomplete and effectively axiomatisable if and only if dens$(T, \mathcal{A}) < \frac{1}{2}$ and dens$(T, \mathcal{A})$ is a binary recursive pseudonumber.

<u>Proof</u>. Let $(B_0, B_1, B_2, \ldots)$ be a one-to-one recursive sequence containing all formulae of $\mathcal{L}_c$ which do not begin by the negation $\neg$.

Let

$$A_{2^k \cdot (2k+1)} = \underset{(i\text{-times})}{\neg\neg\ldots\neg} B_k \tag{2.2}$$

Then the sequence $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ is recursive, one-to-one, and it contains all the formulae from $\mathcal{L}_c$ (its first ten numbers are $B_0, B_1, \neg B_0, B_2, \neg\neg B_0, \neg B_1, \neg\neg\neg B_0, B_3, \neg\neg\neg\neg B_0, \neg\neg B_1, \ldots$).

For every set $M \subseteq \mathcal{L}_c$ satisfying

$$\text{for every } X \in \mathcal{L}_c \;, \quad X \in M \longleftrightarrow (\neg\neg X) \in M \tag{2.3}$$

the density dens$(M, \mathcal{A})$ exists, and it is easy to show that

$$\text{dens}(M, \mathcal{A}) = \sum_{k \in U(M)} \frac{1}{2^{k+2}} + \sum_{k \in V(M)} \frac{1}{2^{k+2}} \tag{2.4}$$

where $U(M) = \{k \in N \mid B_k \in M\}$, $V(M) = \{k \in N \mid (\neg B_k) \in M\}$, and N is the set of integers. Every theory T in $\mathscr{L}$ satisfies (2.3), hence dens $(T, \mathfrak{a})$ exists. If T is inconsistent then $U(T) = V(T) = N$ and hence dens $(T, \mathfrak{a}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. If T is consistent and complete then $\{U(T), V(T)\}$ is a partition of the set N and thus set N and thus $\text{dens}(T, \mathfrak{a}) = \sum_{k \in N} \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{2}$. The converses of (ii) and (iii) can proved similarly. To prove (iv), assume T to be incomplete and decidable. The function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } B_x \notin T \text{ and } \neg B_x \notin T \\ 1 & \text{if } B_x \in T \text{ or } \neg B_x \in T \end{cases} \tag{2.5}$$

is recursive and $f(x) = 0$ for at least one $x \in N$. Since

$$\text{dens}(T, \mathfrak{a}) = \sum_{x \in N} \frac{f(x)}{2^{x+2}} \tag{2.6}$$

dens $(T, \mathfrak{a})$ is a recursive real, and dens $(T, \mathfrak{a}) < \frac{1}{2}$.
Conversely, let dens $(T, \mathfrak{a}) < \frac{1}{2}$ be a recursive real. Since for every $X \in \mathscr{L}_c$ a logically equivalent formula B_x can be found, we may only consider the formulae B_x, $x \in N$. Let f be the (recursive) function satisfing (2.6), and thus (2.5). T is clearly incomplete. Choose k such that $f(k) = 0$ and consider the (recursive) function g such that $B_{g(x)} = (B_k \vee B_x)$. If $B_x \in T$ then $f(x) = 1$ and $f(g(x)) = 1$. Conversely, let $f(x) = 1$ and $f(g(x)) = 1$. We have $B_{g(x)} \in T$ or $\neg B_{g(x)} \in T$; however, $\neg B_{g(x)} \in T$ is impossible and thus $B_{g(x)} = (B_k \vee B_x) \in T$. It is clear now that $\neg B_x \in T$ is impossible and hence $B_x \in T$. Thus we have for every $x \in N$

$$B_x \in T \longleftrightarrow f(x) = 1 \text{ and } f(g(x)) = 1$$

and hence T is decidable.
It remains to prove (v). The theory T is effectively axiomatisable

if and only if the set $M_1 = \{x \in M \mid B_x \in T\}$ is recursively enumerable. Then $M_2 = \{x \in N \mid \neg B_x \in T\}$ and $M = M_1 \cup M_2$ are also recursively enumerable and $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Thus

$$\mathrm{dens}(T, \mathcal{A}) = \sum_{x \in M} \frac{1}{2^{x+2}} \tag{2.7}$$

is a binary recursive pseudonumber, and since T is incomplete, $\mathrm{dens}(T, \mathcal{A}) < \frac{1}{2}$. Conversely, let $\mathrm{dens}(T, \mathcal{A}) < \frac{1}{2}$ be a binary recursive pseudonumber. There exists unique set $M \subseteq N$ such that (2.7) holds; M is recursively enumerable. It is easy to see that $M = \{x \in N \mid B_x \in T \text{ or } \neg B_x \in T\}$. Let $k \in N - M$ and let g be defined as above. We have

$$\{x \in N \mid B_x \in T\} = M \cap \{x \in N \mid g(x) \in M\}$$

The sets on the right-hand side are recursively anumerable and hence the left-hand side also is recursively enumerable, q.e.d.

The statements (iv) and (v) of Theorem 2 characterize decidability and effective axiomatisability of the incomplete theories in $\mathcal{L}$ by their densities relative to a sequence $\mathcal{A}$. The next theorem gives analogous characterization also for complete theories; of course, the statement (iii) of Theorem 2 cannot be preserved.

<u>Theorem 3</u>. There is a one-to-one recursive sequence (2.1) containing all members of $\mathcal{L}_c$ such that for every theory T in the language $\mathcal{L}$ we have:

(i) $\mathrm{dens}(T, \mathcal{A})$ exists;

(ii) T is inconsistent if and only if $\mathrm{dens}(T, \mathcal{A}) = 1$;

(iv′) T is decidable if and only if $\mathrm{dens}(T, \mathcal{A})$ is a recursive real;

(v′) T is effectively axiomatisable if and only if $\mathrm{dens}(T, \mathcal{A})$ is a binary recursive pseudonumber.

<u>Proof</u>. Let $(B_0, B_1, B_2, \ldots)$ be a one-to-one recursive

sequence of all formulae from $\mathscr{L}_c$ beginning with at most one negation. Define

$$A_{2^k.(2i+1)} = \underbrace{\neg\neg\neg\ldots\neg\neg}_{2i\text{-times}} B_k$$

Then the sequence $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ is a recursive one-to-one sequence of all formulae from $\mathscr{L}$. If T is a theory in $\mathscr{L}$ and $M = \{x \in N \mid B_x \in T\}$ then $\mathrm{dens}(T, \mathcal{a}) = \sum_{x \in M} \frac{1}{2^{x+1}}$. The parts (i) and (ii) are almost obvious. It is easy to see that T is decidable (resp. effectively axiomatizable) if and only if the set M is recursive (recursively enumerable). Moreover, M is recursive (resp. recursively enumerable) if and only if $\sum_{x \in M} \frac{1}{2^{x+1}}$ is a recursive real (resp. a binary recursive pseudonumber). This completes the proof.

References

[1] C e i t i n, G. S.: Psevdofundamentalnaja posledovatelnosť, ne ekvivalentnaja monotonnoj, Zap. nauč. seminarov LOMI AN SSSR, 1971, 20 263 - 271

[2] G r e g o r c z y k, A.: Zarys logiki matematicznej, PWN, Warszawa 1961

[3] M a l c e v, A. I.: Algoritmy i rekursivnyje funkciji, Moskva 1965

[4] M e n d e l s o n, E.: Vvedenije v matematičeskuju logiku, Moskva 1971

[5] M e y e r, A. R.: An Open Problem on Creative Sets, Rec. Function Theory Newsletter, Item 60, No 4 (January 1973)

[6] Items relating to A. Meyer's problem, Rec. Function Theory Newsletter, No. 5 (April 1973)

[7] P e t r i, N. V.: Effektivnaja neperečislimosť psevdočisel, Teorija algorifmov i mat. logika, Vc AN SSSR, Moskva 1974

Author's address: Ivan Korec, Katedra algebry a teórie čísel PFUK, Matematický pavilón - Mlynská dolina
816 31 Bratislava

Received: 22. 12. 1976

S ú h r n

HUSTOTY TEÓRIÍ PRVÉHO RÁDU

Ivan Korec, Bratislava

V práci sa definuje hustota množiny uzavretých formúl jazyka J prvého rádu vzhľadom na prostú postupnosť A všetkých uzavretých formúl tohoto jazyka. Ďalej sa zostrojuje taká postupnosť A formúl jazyka J, že každá teória v jazyku J má hustotu a existuje úzky vzťah medzi vlastnosťami teórií a vlastnosťami ich hustôt vzhľadom na postupnosť A.

Р е з ю м е

ПЛОТНОСТИ ТЕОРИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Иван Корец, Братислава

В статье стандердным способом определяется плотность множества замкнутых формул некоторого языка первого порядка относительно данной последовательности замкнутых формул этого языка. Затем строится такая одно-однозначная последовательность замкнутых формул языка, что все теории в этом языке имеют плотность и существует близкая связь между свойствами теорий и свойствами их плотностей относительно построенной последовательности.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA XXXVI

Vydala Univerzita Komenského v Bratislave ako účelovú
publikáciu pre Prírodovedeckú fakultu UK

Technická redaktorka: Darina Földešová

Tematická skupina 03/2, prvé vydanie, rozsah 228 strán, 8,90 AH, 9,33 VH, náklad 650, formát B/5, zadané do tlače 14.8.1980, vyšlo v decembri 1980, vytlačilo Polygrafické stredisko UK v Bratislave, schválené výmerom SÚKK č. 1854/I-79.

2/0-80 85 - 554 - 80