(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. – MATHEMATICA XXVI, 1972)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA XXVI

1972

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Austausch von Publikationen erbeten
Priére d´échanger des publications
We respectfully solicit the exchange of publications
Se Suplica el canje de publicaciónes

Acta Facultatis rerum naturalium Universitatis Comenianae. Vydáva slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, Sasinkova 5, č. tf.: 645-51. Povolilo Povereníctvo kultúry číslom 2265/56-IV-1: Tlačili Nitrianske tlačiarne, n.p., Nitra.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. - MATHEMATICA XXVI - 1972)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXVI - 1972

AN ITERATIVE ALGORITHM FOR SOLVING THE REALIZATION PROBLEM OF A BOOLEAN FUNCTION BY A SINGLE THRESHOLD ELEMENT

JOZEF ŠAJDA, Bratislava

The subject of this paper is a construction of an algorithm for solving the realization problem of a given boolean function by a single threshold element. The algorithm is suitable for computation on a computer. The basis of the algorithm is an iteration method that may be applicated in many other cases because of its general character.

1.

Throughout this paper we will denote

n	an arbitraty natural number;
E_n	an Euclidean n-dimensional space of vectors $X = (x_1, x_2, \dots$ $\dots, x_n)$;
B	a set of numbers 0, 1;
B_n	a set of vectors $X \in E_n$ with the property $x_i \in B$, $i = 1, 2, \dots$ $\dots, n$,
Q_n	a set of functions F defined on the set B_n with the property: for every $X \in B_n$ $F(X) \in B$;
N_F	a set of vectors $X \in B_n$ for which $F(X) = 0$;
T_F	a set of vectors $X \in B_n$ for which $F(X) = 1$.

Further, we denote by the symbol sign (x) a function defined for an arbitraty real x by the formula

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.0}$$

The elements F of the set Q_n we call boolean functions of n variables, for a fixed n we call them shortly boolean functions.

A logical system with n inputs and with weights w_i for binary variables x_i and with one output for variable y we call a threshold element with a weight W and a threshold t if its behavior is defined by the formula

$$y = \mathrm{sign}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i - t\right) \tag{1.1}$$

where $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ is a fixed vector of the space E_n, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is an arbitraty vector of the set B_n and t is a real number. From the formula (1.0) it follows $y \in B$.

Because the behavior of a threshold element with a weight W and the threshold t is unambiguously described by the formula (1.1) where the function y is unambiguously defined by the vector W and by real t, we shall denote such a threshold element by $[W,t]$ and state that the threshold element realizes a (W,t) - mapping of the set B_n into the set B. We denote by P_n a set of functions $F \in Q_n$ for those there exists (W,t) - mapping with the property

$$F(X) = \mathrm{sign}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i - t\right), \qquad X \in B_n \tag{1.2}$$

The elements of the set P_n we call threshold functions. Because $P_n \subset Q_n$ and elements of the set Q_n we have been called as boolean functions, therefore we state that the threshold element $[W,t]$ realizes a boolean function $F \in Q_n$ if and only if $F \in P_n$. A (W,t) - mapping defining a function $F \in P_n$ in accordance to (1.2) we denote by $(W,t)_F$.

We define in E_n a function $h(X) = h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ of n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ by the formula

$$h(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i - t, \qquad X \in E_n \tag{1.3}$$

where quantities w_i and t have got the same meaning as in the formula (1.1). From this definition it follows that by a given function $h(X)$ of the type (1.3) is defined a partition of the space E_n into half-spaces E_n^o and E_n^1, whereby

$$X \in E_n^o \Longleftrightarrow h\ (X) < 0$$

$$X \in E_n^1 \Longleftrightarrow h\ (X) \geqslant 0 \tag{1.4}$$

The main task of this paper is to solve the problem of realization of a given function F by a single threshold element. According to the definitions and designations introduced before it is possible to state this task as follows:

A function $F \in Q_n$ is given. Investigate the statement $F \in P_n$ and if it is true then construct the $(W,t)_F$ - mapping.

The realization problem of a given boolean function by a single threshold element is not sufficiently solved so far. Some criteria of realization based whether on linear programming methods [1] or on monotony [2] and cycle [3] properties of the investigated boolean function have mostly a character of necessary conditions, whereas the well-known sufficient conditions [4], [5] are too general and therefore of small utility. The common disadvantage of most of such methods is that they are rather complicated when n is rising and, thus, of small application.

The procedure described in this paper approaches to the problem in consideration from other point of view. It has been attempted to solve the problem on principle of an iterative algorithm in order to enable the use of computer to solve this problem. The construction of the algorithm implies the fact, that the formal complication with rising n does not rise too quickly. This causes a potential effectivity of the procedure namely if n is rather great when other ways are not suitable.

2.

In this part the paper we introduce some useful results of auxiliary meaning.

We denote by the symbol $\langle X_1, X_2 \rangle$ a set of vectors $X \in E_n$ defined at arbitrary fixed vectors $X_1 \in E_n$, $X_2 \in E_n$ by

$$X = (X_1 - X_2)\ \lambda + X_2, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \tag{2.1}$$

L e m m a 2.1. Let

m be an arbitrary natural number,

$X_1, X_2, \dots, X_m$ arbitrary vectors of the space E_n,

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ arbitrary reals with $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m \neq 0$,

$h(X)$ an arbitrary function of the form (1.3).

Then

$$h\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h(X_i)}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i} \tag{2.2}$$

P r o o f - is trivial and consist in the application of definition (1.3) to vector

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}:$$

$$h\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i} \cdot w_j - t =$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} w_j - t \right) \right\} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h(X_i)}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}.$$

Let us introduce some special cases of the formula (2.2). Let be

(a) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$, then

$$h\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h(X_i) \tag{2.3}$$

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m \neq 0$, then

$$h\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}\right) = \frac{h(X_1) + h(X_2) + \dots + h(X_m)}{m} \tag{2.4}$$

(c) $m = 2$, then for $X \in \langle X_1, X_2 \rangle$

$$h(X) = \left[h(X_1) - h(X_2)\right] \lambda + h(X_2), \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \tag{2.5}$$

Lemma 2.2. Let $h(X)$ be an arbitrary function of the form (1.3) and E_n^o, E_n^1 respective sets defined by the formula (1.4). Let the vectors $X_1, X_2, \dots, X_m$ be from the set E_n^o or E_n^1, respectively. Then the vector

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m} \tag{2.6}$$

is from the set E_n^o or E_n^1, respectively.

Proof. From the assumption $X_i \in E_n^o$ or $X_1 \in E_n^1$ it follows that

$$h(X_i) < 0, \quad h(X_i) \geqslant 0, \qquad i = 1,2, \dots, m$$

what implies that from the formula (2.4) for X given by (2.6) follows

$$h(X) < 0, \quad h(X) \geqslant 0$$

and this according to (1.4) means that $X \in E_n^o$, or $X \in E_n^1$, respectively.

Lemma 2.3. Let $h(X)$ be an arbitrary function of the form (1.3) and X_1, X_2 is an arbitrary pair of vectors with $X_1 \in E_n^o$,

$X_2 \in E_n^o$ or $X_1 \in E_n^1$, $X_2 \in E_n^1$, respectively. Then $X \in E_n^o$ or $X \in E_n^1$, respectively, for each $X \in \langle X_1, X_2 \rangle$.

P r o o f. At given assumptions the formula (2.5) gives

$$h(X) \begin{cases} <0 & \text{for } X_1 \in E_n^o, \quad X_2 \in E_n^o \\ \geq 0 & \text{for } X_1 \in E_n^1, \quad X_2 \in E_n^1 \end{cases}$$

what implies $X \in E_n^o$, $X \in E_n^1$, respectively.

L e m m a 2.4. Let $h(X)$ be an arbitrary function of the form (1.3). Let $X_i \in E_n^o$, $X_i \in E_n^1$, $i = 1,2,\dots, m$. Then for any vector of the form

$X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i$ the relations

$$X \in \begin{cases} E_n^o, & \text{if } X_i \in E_n^o \\ E_n^1, & \text{if } X_i \in E_n^1 \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots , m$$

and

$$h(X) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h(X_i)$$

are correct.

P r o o f is implied directly from the formula (2.3).

L e m m a 2.5. Let

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+1} \tag{2.7}$$

be arbitrary vectors of the space E_n and d be the determinant

$$d = \begin{vmatrix} y_{11}, & y_{21}, & \dots, & y_{n+1,1} \\ y_{12}, & y_{22}, & \dots, & y_{n+1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n}, & y_{2n}, & \dots, & y_{n+1,n} \\ 1, & 1, & \dots, & 1 \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

with 1's in the last row. Further, let λ be an arbitrary number of the interval $0 \leq \lambda \leq 1$ and p,q with $p \neq q$ natural numbers satisfying inequalities $1 \leq \overline{p,q} \leq n + 1$. Then the determinant d made up according to (2.8) after substitution of the vector Y_p in the sequence (2.7) by the vector Y will take the value

$$D = \begin{cases} \lambda d & \text{if } Y = (Y_p - Y_q)\lambda + Y_q , & (2.9) \\ (1 - \lambda)d & \text{if } Y = (Y_q - Y_p)\lambda + Y_p & (2.10) \end{cases}$$

<u>Proof.</u> Let d' be the determinant (2.8) in which we have replaced the elements of the column p by coordinates of the vector $(Y_p - Y_q)\lambda + Y_q$. By the partition of this determinant because of the sums in the column p we get $d' = \lambda d$. Similarly, denoting by d'' the determinant (2.8) in which the elements of the column p are replaced by the coordinates of the vector $(Y_q - Y_p)\lambda + Y_p$, we get $d'' = (1 - \lambda)\, d$.

3.

In this part of the paper an algorithm is described for solving the main task of the paper:

Let $F \in Q_n$ be a given boolean function for which is to solve the realization problem by a single threshold element, e.i.

(a) investigate the statement $F \in P_n$

(b) if $F \in P_n$ then construct the $(W,t)_F$ - mapping.

Suppose that to the function F there exists a function h(X) of the form (1.3) with the property (1.2) and thus, there exists a partition of the space E_n into the half-spaces E_n^o, E_n^1. It is obvious that if this assumption will fail then the function F will not be realizable by a single threshold element.

Let

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1} \tag{3.1}$$

be vectors of the space E_n with properties:

(1) there exists a natural $k < n+1$ such that for vectors

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \tag{3.2}$$

the relation $X_i \in E_n^o$, $i = 1, 2, \ldots, k$ and for vectors

$$X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_{n+1} \tag{3.3}$$

the relation $X_i \in E_n^1$, $i = k + 1, k + 2, \ldots, n + 1$ holds;

(2) for the determinant

$$D = \begin{vmatrix} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1}, & x_{n+1,1} \\ x_{12}, & x_{22}, & \ldots, & x_{n2}, & x_{n+1,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n}, & x_{2n}, & \ldots, & x_{nn}, & x_{n+1,n} \\ 1, & 1, & \ldots, & 1, & 1 \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

which is set up of the coordinates of the vectors (3.1) and of 1's in the last row, the relation

$$D \neq 0 \tag{3.5}$$

is true.

Choose $r \geq 1$ mutually different vectors $X_j^o \in E_n^o$, $1 \leq j \leq r$ and $s \geq 1$ mutually different vectors $X_j^1 \in E_n^1$, $1 \leq j \leq s$ and express them by a linear combination of the vectors (3.1):

$$X_j^o = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} X_i, \qquad 1 \leq j \leq r \tag{3.6}$$

and

$$X_j^1 = \sum_{i=1}^{n+1} b_{ij} X_i, \qquad 1 \leq j \leq s \tag{3.7}$$

where the coefficients a_{ij} and b_{ij} fulfil the condition

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} = 1, \qquad 1 \leq j \leq r \tag{3.8}$$

and

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_{ij} = 1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant s \tag{3.9}$$

respectively.

It is clear that such an expression of arbitrary vectors $X_j^o \in E_n^o$ and $X_j^1 \in E_n^1$ is possible and unique under the condition (3.5).

According to the lemma 2.1 and the formula (2.3) the vectors (3.6) and (3.7) at an arbitrary function $h(X)$ of the form (1.3) imply

$$h(X_j^o) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} h(X_i), \qquad 1 \leqslant j \leqslant r \tag{3.10}$$

and

$$h(X_j^1) = \sum_{i=1}^{n+1} b_{ij} h(X_i), \qquad 1 \leqslant j \leqslant s \tag{3.11}$$

of what we get r inequalities

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} h(X_i) < 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant r \tag{3.12}$$

and s inequalities

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_{ij} h(X_i) \geqslant 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant s \tag{3.13}$$

because of the relation $h(X_j^o) < 0$ and $h(X_j^1) \geqslant 0$, respectively.

Because the r and s are arbitrary it is possible to make up any number of inequalities (3.12) and (3.13) and with $r+s \geqslant n+1$ by successive elimination of the values

$$h(X_1), h(X_2), \ldots, h(X_{p-1}), h(X_{p+1}), \ldots, h(X_{q-1}), h(X_{q+1}), \ldots, h(X_{n+1})$$

to obtain from the inequalities a relation between two values $h(X_p)$ and $h(X_q)$ which we write as

$$ah(X_p) + bh(X_q) \geqslant 0 \qquad (3.14)$$

where $1 \leqslant p \leqslant k < q \leqslant n + 1$ and a,b are the coefficients remained at $h(X_p)$ and $h(X_q)$ respectively after performing the eliminations.

The analysis of the inequality (3.14) gives:

1. if $a \leqslant 0$ and $b \geqslant 0$ then (3.14) contains information of no importance,

2. if $a \geqslant 0$ and $b < 0$ or if $a > 0$ and $b \leqslant 0$ then (3.14) is false, e.i. for the given $F \in Q_n$ there is no function $h(X)$ of the form (1.3) and thus, no $(W,t)_F$.

3. if $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b$ then

$$\frac{ah(X_p) + bh(X_q)}{a + b} \begin{cases} < 0 & \text{at} \quad a < 0,\ b < 0, \\ \geqslant 0 & \text{at} \quad a > 0,\ b > 0. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Because according the formula (2.2) the equation

$$\frac{ah(X_p) + bh(X_q)}{a + b} = h\left(\frac{aX_p + bX_q}{a + b}\right)$$

is correct, from (3.15) for the vector

$$X = \frac{aX_p + bX_q}{a + b} \qquad (3.16)$$

we get the relation

$$X \in \begin{cases} E_n^o & \text{at} \quad a < 0 \quad \text{and} \quad b < 0, \\ E_n^1 & \text{at} \quad a > 0 \quad \text{and} \quad b > 0. \end{cases} \qquad (3.17)$$

after using the lemma 2.3.

For any arbitrary numbers a and b with $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b \neq 0$ the relation

$$0 < \frac{a}{a + b} = \lambda = \frac{-a}{-a - b} < 1$$

is true, the vector

$$X = (X_p - X_q)\,\lambda + X_q \tag{3.18}$$

defined by (3.16) is an inside vector of the set $\langle X_p, X_q \rangle$ that was defined at the beginning of the preceeding part of this paper. According to the formula (2.5) the relation

$$h(X) = \left[h(X_p) - h(X_q)\right]\lambda + h(X_q) \tag{3.19}$$

is true for any function $h(X)$ of the form (1.3). The set $\langle X_p, X_q \rangle$ is a continuous one-dimensional linear construction in E_n limited by vectors X_p, X_q. This, with

$$h(X_p) < 0, \quad h(X_q) \geqslant 0, \qquad 1 \leqslant p \leqslant k < q \leqslant n + 1 \tag{3.20}$$

for any inside vector X and at any function $h(X)$ implies

$$h(X_p) < h(X) < h(X_q) \tag{3.21}$$

what with account (3.19) gives the existence of just one vector $Y \in \langle X_p, X_q \rangle$ with

$$h(Y) = 0 \tag{3.22}$$

That means there exists just one $\lambda = \lambda_o$ in the interval $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ such that the formula (3.19) will take the form

$$\left[h(X_p) - h(X_q)\right] \lambda_o + h(X_q) = 0$$

This λ is

$$\lambda_o = \frac{h(X_q)}{h(X_q) - h(X_p)} \tag{3.23}$$

It is obvious that if we denote by symbol $\varrho\,(A,B)$ the distance

$$\varrho\,(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

of two arbitrary vectors $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_n$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in E_n$ then for any two vectors $Y_1 \in \langle X_p, X_q \rangle$

and $Y_2 \in \langle X_p, X_q \rangle$ of which at least one represents an inside vector of the set $\langle X_p, X_q \rangle$, the relation

$$\varrho(Y_1, Y_2) < \varrho(X_p, X_q)$$

is true. Therefore, the relation

$$\varrho(X, Y) < \varrho(X_p, X_q) \tag{3.24}$$

is true too, where X denotes the vector (3.16) and Y is a vector with property (3.22).

The inequality (3.24) implies

$$X \longrightarrow Y \quad \text{if} \quad \varrho(X_p, X_q) \longrightarrow 0.$$

On this relation is based the algorithm for definition of a vector $Y \in E_n$ with the property (3.22) or more precisely speaking, its approximation by a vector X constructed according to (3.16).

If namely

$$\varrho(X_p, X_q) \longrightarrow 0, \quad X_p \in E_n^o, \quad X_q \in E_n^1 \tag{3.25}$$

then according to (3.21) obviously relations

$$h(X_p) \longrightarrow h(X), \quad h(X_q) \longrightarrow h(X)$$

are correct what is the fact according to (3.20) only if

$$h(X) \longrightarrow 0, \quad \text{e.i.} \quad X \longrightarrow Y.$$

Hence, the immediate task is to define a vector $Y \in E_n$ with the property (3.22) or to define $\lambda = \lambda_o$ for which the equation (3.23) is correct.

Make this agreement: Let the symbol $U \longmapsto V$ represent a substitution operation of a quantity V by a quantity U with a following formal change of designation U onto V (e.i. under the original designation V after this operation is U).

The substitution operation we use after obtaining the vector X by the formula (3.16) in the sequence (3.1) as follows:

$$X \longmapsto X_p \quad \text{if} \quad X \in E_n^o$$
$$X \longmapsto X_q \quad \text{if} \quad X \in E_n^1 \qquad (3.26)$$

The substitution (3.26) enables to use the iteration principle for construction of a sequence of vectors converging to a vector with the property (3.22).

Therefore, we return after realization of the substitution (3.26) to the beginning of our considerations, e.i. to the sequence (3.1) and repeat all the procedure again. Because the vector X being recently reached by (3.16) lies in the competent set $\langle X_p, X_q \rangle$ the average of which with influence of the substitution (3.26) successively diminishes in general, it is possible to reach such a sequence under the condition (3.25) by multiple repetition of the algorithm. At the same time it is obvious that every sequence of vectors (3.1) being created in the course of the iteration process owing to application of the substitution (3.26) possesses the required properties, further on, that k does not depend on the substitutions but that it is constant in all the iteration process, and further on, that the respective determinant (3.4) according to lemma 2.5 exists and its value may be easily computed by applying the formula (2.9) or (2.10). Therefore, it is possible to realize the repetition of the presented procedure any times in order to gain a sufficient approximation of a vector having the property (3.22).

In order to distinguish particular quantities creating at m-th realization of the process described we denote by the symbol

Z_m the vector X generated by the formula (3.16),

a_m, b_m the coefficients a,b in the inequality (3.14),

$$\lambda_m = \frac{a_m}{a_m + b_m}, \qquad m \geq 1.$$

As a result of the m - multiple application of the algorithm being formulated above will be a sequence of vectors

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m \qquad (3.28)$$

which we break down into two subsequences

$$Z_1^o,\ Z_2^o,\ \dots,\ Z_i^o,\ \dots \qquad (3.29)$$

with the property $Z_i^o \in E_n$ and

$$Z_1^1,\ Z_2^1,\ \dots,\ Z_j^1,\ \dots \qquad (3.30)$$

with the property $Z_j^1 \in E_n^1$, where $i + j = m$.

It is clear that the sufficient condition for existence of a vector Y with the property (3.22) is the relation

$$\lim_{i \to \infty} Z_i^o = \lim_{j \to \infty} Z_j^1 = Y \qquad (3.31)$$

T h e o r e m. Let $F \in Q_n$ be a given boolean function. Let

$$X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_{n+1}$$

represents a sequence of vectors (3.1) by means of which we create the sequences (3.29) and (3.30) by the described algorithm. Let a number $\delta > 0$ exist independently on m such that for λ_m being given by the formula (3.27) the relation

$$\lambda_m \in (\delta\ ,\ 1 - \delta), \qquad m = 1,\ 2,\ \dots \qquad (3.32)$$

is true. Then sequences (3.29) and (3.30) converge and the relation (3.31) is true.

P r o o f. The condition (3.32) easily implies for arbitrary $m \geq 1$

$$\operatorname{sgn} a_m = \operatorname{sgn} b_m \neq 0$$

and that is the fundamental assumption of the algorithm derived above. Hence, it is possible to construct sequences of vectors (3.29) and (3.30) and investigate their convergence.

If $Z_i^o \in E_n^o$ and $Z_j^1 \in E_n^1$ are arbitrary elements of the sequence (3.29) or (3,30) respectively, then it is easy to find out that for every vector $Z \in \langle Z_i^o,\ Z_j^1 \rangle$ being given by formula

$$Z = \left[Z_i^o - Z_j^1 \right] \lambda_Z + Z_j^1$$

with

$$\rho(Z_i^o, Z_j^1) = \rho_{ij} = \sqrt{\sum_{m=1}^{n} (Z_{im}^o - Z_{jm}^1)^2}$$

the equation

$$\rho(Z_i^o, Z) = (1 - \lambda_Z)\, \rho_{ij} \tag{3.33}$$

is correct. Similarly, the equation

$$\rho(Z, Z_j^1) = \lambda_Z\, \rho_{ij} \tag{3.34}$$

is correct. Therefore, from (3.34) at $Z = Z_{i+1}^o$ after designation $\lambda_Z = \lambda_{i+1}^o$ we get the relation

$$\rho_{i+1,j} = \lambda_{i+1}^o\, \rho_{ij} \tag{3.35}$$

and similarly at $Z = Z_{j+1}^1$ and designation $\lambda_Z = \lambda_{j+1}^1$ we get from the relation (3.33)

$$\rho_{i,j+1} = (1 - \lambda_{j+1}^1)\, \rho_{ij} \tag{3.36}$$

It is possible to derive inductively from the relations (3.35) and (3.36) a general formula

$$\rho_{i+r,j+s} = \rho(Z_{i+r}^o, Z_{j+s}^1) = \lambda_1^o \lambda_2^o \dots \lambda_r^o (1-\lambda_1^1)(1-\lambda_2^1) \dots$$
$$\dots (1 - \lambda_s^1)\, \rho_{ij} \tag{3.37}$$

where i,j are arbitrary natural numbers and r,s are arbitrary non--negative integers. At the same time naturally

$$0 < \lambda_m^o < 1, \qquad m = 1, 2, \dots, r$$

and similarly

$$0 < \lambda_m^1 < 1, \qquad m = 1, 2, \dots, s$$

what from (3.37) implies

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ s \to \infty}} \rho(Z_{i+r}^o, Z_{j+s}^1) = 0$$

That means that an arbitrary $\varepsilon > 0$ there are natural numbers r_o, s_o such that for an arbitrary vector $Y \in E_n$ with the property $Y \in \langle Z^o_{r_o}, Z^1_{s_o} \rangle$ at an arbitrary function $h(X)$ of the form (1.3) the relation

$$|h(Y)| < \varepsilon$$

is true.

That means that the sequence (3.28)converges and thus, the sequence (3.29) does the same as well. Therefore

$$\lim_{m \to \infty} Z_m = \lim_{i \to \infty} Z^o_i = \lim_{j \to \infty} Z^1_j = Y$$

with

$$h(Y) = 0$$

what completes the proof of the theorem.

The theorem has been proved at a constant p and q. If after getting the first vector $Y = Y_1$ with the property (3.22) we change the values p and q, so we can find out by the same algorithm another vector $Y = Y_2$ with the property (3.22). In this way we can obtain in general an arbitrary number of vectors

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_m \tag{3.38}$$

with the property

$$h(Y_m) = 0, \qquad m = 1, 2, \dots \tag{3.39}$$

by means which it is possible to calculate in the case $m = n + 1$ from the linear algebraic system

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} w_j - T = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n + 1$$

the values $w_1, w_2, \dots, w_n$; T and, thus, the competent function $h(X)$ of the form (1.3) as well.

As a checking relation how far the vectors (3.38) have been satisfied the formula (3.39) is the condition

$$\begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12}, & \dots, & y_{1n}, & 1 \\ y_{21}, & y_{22}, & \dots, & y_{2n}, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \dots, & y_{nn}, & 1 \\ y_{n+1,1}, & y_{n+1,2}, & \dots, & y_{n+1,n}, & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.40}$$

It is obvious that the relation (3.40) is still only a necessary condition of existence of the $(W,t)_F$ at a given boolean function F. If this $F \in Q_n$ is to be realizable by a single threshold element $[W,t]$ then, moreover, the relations

$$N_F \subset E_n^o, \quad T_F \subset E_n^1 ,$$

or their equivalences

$$h(X) \begin{cases} <0 & \text{for} \quad X \in N_F \\ \geqq 0 & \text{for} \quad X \in T_F \end{cases} \tag{3.41}$$

must be correct.

Let us comment that for checking the relation (3.41) is to use the auxiliary procedures being derived in the second part of this paper.

At the end we should like to add several comments.

1. If M is the number of vectors (3.1) then from the algorithm described above follows the using $M > n + 1$ within it namely if it is useful in order to speed up silving all the task.

2. It is useful to choose the vectors (3.1) directly from the sets N_F and T_F.

3. It is useful to choose the numbers p and q in such a way that the quantity

$$\rho(X_p, X_q), \; X_p \in E_n^o, \quad X_q \in E_n^1$$

is as small as possible at the very first application.

4. The algorithm can be generalized in a way that at its repetition we change the quantities p and q. This way creates an algorithm more flexible on one hand but generally more pretentious on the other from the time point of view.

5. The assumption $1 \leq k < M$ means an elimination of the boolean functions

$$F(X) = \text{const}, \quad X \in B_n$$

6. It is obvious that to a given threshold function $F \in P_n$ there exist in general infinite number of $(W,t)_F$- mappings which solve the respective realization problem by a single threshold element. Thus, the approximation character of the algorithm has got also the advantage that even rough approximations of the vectors (3.38) by vectors X of the type (3.16) can lead to defining one of the $(W,t)_F$- mappings.

R E F E R E N C E S

[1] MINNICK R. C.: Linear Imput Logic. IRE Trans. EC-10, march 1961.

[2] WINDER R. O.: Bounds on Threshold Gate Realizability. IEEE Trans. EC-12, 1963

[3] ELGOT C. C.: Truth Function Realizable by a Single Threshold Organ. Proceeding of NEC, 16, 1960.

[4] VARŠAVSKIJ V. I.: Nekotoryje voprosy teorii logičeskich setej postrojennych iz porogovich elementov. Voprosy teorii matematičeskich mašin, Fizmatgiz, Moskva 1962.

[5] BOGOLJUBOV I. N., OVSIJEVIČ B. L., ROZENBLJUM L. J.: Sintez schem iz porogovich i mažoritarnych elementov. Seti peredači informacii i ich avtomatizacija, "Nauka", Moskva 1965.

Author's address: Výskumné výpočtové stredisko OSN, Bratislava

Received: May 13, 1970

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. - MATHEMATICA XXVI - 1972)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXVI - 1972

REPRESENTATION OF THE BIVARIATE POISSON FUNCTION BY CHARLIER SERIES

AUGUSTÍN NIŽŇANSKÝ, Bratislava

For various purposes it is often desired to expand a frequency function f(x) in a series

$$f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} C_k \vartheta_k(x) \qquad (1)$$

where the ϑ_k x are a given set of the standard functions and the C_k for k = 0,1,2,... are coefficients. Charlier [3], [4] suggested that it would be useful to take the $\vartheta_k(x)$ in (1) to be either the successive derivatives or the successive differences of some fixed function. In this connection the considered cases are often reffered to as type A series (or Gram - Charlier series) and type B series (or Poisson-Charlier series), respectively. Charlier gave formulas for determining the coefficients in the two cases, but the question of whether the formal series represents the given function in any reasonable sense has to be investigated separately for each particular choice of the function generating the series. Only one special cace of each type has been much used: for the A series, $\vartheta_o(x)$ is the normal density function $(2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$; for the B series, $\vartheta_o(x)$ is the Poisson function $e^{-\lambda}\lambda^x/x!$ (when x is restricted to take only non-negative integral values).

A question of the expanded form of the type A series for one or more random variables have been studied extensively from theoretical and practical applications point of view. The review of the achieved results where summarized by Boas [2], Kendall [8], Plackett [10] and others. Haight [6] gives an exhausting report including the bibliographic data (more than 700 titles) for the Poisson distribution, Poisson processes and as their modification as generalization.

The papers in this field likewise recent autors deal with expansion of the function (1) of the type B series for one random variable only. The present paper is concerned with the extension of the type B series to bivariate Poisson function.

1. The Charlier type B series for one random variable

Suppose we have an expansion of the function $f(x)$ expressed in terms of Poisson differences

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \nabla^j p_x(\lambda) \tag{2}$$

where

$$\nabla^r p_x(\lambda) = \sum_{i=o}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} p_{x-i}(\lambda) \quad * \tag{3}$$

and $p_x(\lambda)$ is the Poisson function of one random variable defined by

$$p_x(\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \tag{4}$$

then

$$c_r = \frac{1}{r!} \sum_{i=o}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \lambda^{r-i} m_{[i]} \tag{5}$$

where $m_{[i]}$ is the factorial moment of the function (2).

- - -

The moments about the origin and incomplete moments ** of the Poisson function (4) and their relationship defined by Aroian [1],

---

* In literature there may be found two types of operators for Poisson differences and through ∇ or Δ where the latter is used exclusively for denoting the forward differences. Seen for example in: Kendall and Stuart [7], Haight [6], etc. Therefore it seems to be right to use the operator for denotig the backwards differences.

** When the sums determining the moments begin with an index of more than zero and for end before infinite these charakteristic expressions are called "incomplete moments".

Riordan [11], Philipson [9], Hardley and Whitin [5] are expressed with respect to their possible use. General form of the k-th moment about the origin is expressed

$$m(k,\lambda) = \sum_{i=o}^{k} \lambda^i S(i,k); \qquad \text{for } k = 0,1,2, \ldots \tag{6}$$

where $S(i,k) = \frac{1}{i!}\sum_{j=o}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j} j^k = \frac{1}{i!}\sum_{j=o}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j+1}(j+1)^k$

are the Stirling numbers of the second kind. Similarly in the case of incomplete moments the ordinary form of the k-th moment of ℓ-th Poisson difference is

$$m(k, \lambda, \nabla^{\ell}) = \sum_{i=o}^{k-\ell} \lambda^i S^{(\ell)}(i,k); \qquad \text{for } k = 0,1,2,\ldots \tag{7}$$

where $S^{(\ell)}(i,k) = \frac{1}{i!}\sum_{j=o}^{i-\ell+1}(-1)^{i-j}\binom{i+\ell}{j+1}(j+1)^k =$

$$= (-1)^{\ell}\frac{(k+\ell-1)}{(k-1)!} S\,(i,k+\ell-1)!$$

are the incomplete Stirling numbers of second kind ***.

The coefficients C_i in (2) are obtained by one after the other substitution of (7) into (2) and summing up through all $x = 0,1,2,\ldots$ Hence expressed in terms of ordinary moments we have

$$C_r = \frac{1}{r!}\sum_{i=o}^{r}\sum_{j=o}^{i}(-1)^i\binom{r}{i}\lambda^{r-i} S'(i,j)\, m_j \tag{8}$$

*** Evidently $S^{\ell}(i,k)$ is a simple function of Stirling numbers of second kind where the desired numbers are obtained by means of multiplying the corresponding original numbers by the transfer of $(\ell-1)$ end terms of the index "k".

where $S'(i,j)$ are the Stirling numbers of the first kind and m_j are the ordinary moments. The expression (8) may be simplified by substituting the ordinary moments by factorial moments using the Frisch formula

$$m_{[k]} = \sum_{j=o}^{k} S'(k,j)\, m_j ; \quad \text{for } k = 0,1,2,\ldots \tag{9}$$

Using this we find that

$$C_r = \frac{1}{r!} \sum_{i=o}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \lambda^{r-i}\, m_{[i]} ; \quad \text{for } r = 0,1,2,\ldots \tag{10}$$

Relation (10) may be found with great brevity by the symbolic operations as

$$C_r = \frac{1}{r!} (\lambda - m)^r ; \quad m^r \equiv m'_r \tag{11}$$

where $m_{[r]}$ is the r-th factorial moment of the function (2). If we indicate $P = \lambda - m$ and $D = d/dP$ then

$$\begin{aligned} D\, C_{r+1} &= D\, P^{r+1}/(r+1)! \\ &= P^r/r! \\ &= C_r ; \qquad \text{for } r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

2. The Charlier type B series for two variables

Let us have an expansion of the bivariate function f(x,y) expressed by means of Poisson differences

$$f(x,y) = \sum_{i=o}^{\infty} \sum_{j=o}^{\infty} C_{ij}\, \nabla^{ij}\, p_{xy}\, (\lambda, \mu, \nu) \tag{13}$$

where $\nabla^{rs}\, p_{xy}(\lambda, \mu, \nu) = \sum_{i=o}^{r} \sum_{j=o}^{s} (-1)^{i+j} \binom{r}{i}\binom{s}{j} p_{x-i,y-j}(\lambda, \mu, \nu)$

and $p_{xy}(\lambda, \mu, \nu)$ is the Poisson function of two dependent random variables used by Teicher [12] in the form

$$p_{xy}(\lambda, \mu, \nu) = \exp(-\lambda-\mu+\nu) \sum_{u=o}^{\min(x,y)} \frac{(\lambda-\nu)^{x-u} (\mu-\nu)^{y-u} \nu^{u}}{(x-u)!(y-u)!\ u!} \qquad (14)$$

for $x,y = 0,1,2,\ldots$, where $p_x(\lambda)$ and $p_y(\mu)$ are marginal Poisson distributions of the parameters λ and μ , ν is covariance. If $\nu = 0$ relation (13) go through the form

$$p_{xy}(\lambda,\mu) = p_x(\lambda)\ p_y(\mu) \qquad (15)$$

then we have

$$C_{rs} = \frac{1}{r!\ s!} \sum_{i=o}^{r} \sum_{j=o}^{s} \sum_{k=o}^{s-j} (-1)^{i+j} \binom{r}{i}\binom{s}{j}\binom{s-j}{k} (i)_k\ \lambda^{r-i} \mu^{s-j-k} \nu^{k}\ m_{[i-k,j]} \qquad (16)$$

where $m_{[i,j]}$ are bivariate factorial moments of the function (12) and

$(i)_k = \prod_{t=o}^{k-1} (i-t)$ is decreasing factorial.

\- - -

In order to determine the coefficients C_{ij} in (13) (similarly as for the case of. one variable) it is necessary to find the moments about the origin and the incomplete moments of the Poisson bivariate function and their relationship. General form of the mixed (p,q)-th moment about the origin is given by formula

$$m(p,\lambda;q,\mu) = \sum_{i=o}^{\min(p,q)} m(p,\lambda,\nabla^{i})\ m(q,\mu,\nabla^{i}) \frac{\nu^{i}}{i!} \qquad (17)$$

where $m(p,\lambda,\nabla^{i})$ and $m(q,\mu,\nabla^{i})$ are incomplete moments of the p-th and q-th order of the variables x,y of the i-th Poisson difference defined by (7) respectively. The general form of the sequence of the incomplete mixed moments may be written as:

$$m(p,\lambda;q,\mu;\nabla^{10}) = \sum_{i=o}^{\min(p-1,q)} m(p,\lambda,\nabla^{i+1})m(q,\mu,\nabla^{i})\frac{\nu^i}{i!} \tag{18}$$

$$m(p,\lambda;q,\mu;\nabla^{01}) = \sum_{i=0}^{\min(p,q-1)} m(p,\lambda,\nabla^{i})\ m\ (q,\mu,\nabla^{i+1})\frac{\nu^i}{i!} \tag{19}$$

$$m(p,\lambda;q,\mu;\nabla^{20}) = \sum_{i=o}^{\min(p-2,q)} m(p,\lambda,\nabla^{i+2})\ m(q,\mu,\nabla^{i})\frac{\nu^i}{i!} \tag{20}$$

$$m(p,\lambda;q,\mu;\nabla^{11}) = \sum_{i=o}^{\min(p-1,q-1)} m(p,\lambda,\nabla^{i+1})m(q,\mu,\nabla^{i+1})\frac{\nu^i}{i!} \tag{21}$$

$$m(p,\lambda;q,\mu;\nabla^{02}) = \sum_{i=o}^{\min(p,q-2)} m(p,\lambda,\nabla^{i})\ m(q,\mu,\nabla^{i+2})\frac{\nu^i}{i!} \tag{22}$$

$$\begin{matrix} \cdots & & & & \cdots \\ \cdots & & & & \cdots \\ \cdots & & & & \cdots \end{matrix}$$

and the general form of the mixed (r,s)-th Poisson difference is

$$m(p,\lambda;q,\mu;\nabla^{rs}) = \sum_{i=o}^{\min(p-r,q-s)} m(p,\lambda,\nabla^{i+r})m(q,\mu,\nabla^{i+s})\frac{\nu^i}{i!} \tag{23}$$

where $m(p,\lambda;\nabla^{i+r})$ and $m(q,\mu,\nabla^{i+s})$ are the incomplete moments of the p-th and q-th order of variables x,y of the (i+r)-th and (i+s)-th difference respectively, defined by (7), whereby $m(p,\lambda;q,\mu;\nabla^{rs}) = 0$ for $p<r$ and $q<s$. For ilustration let us show an example:

$$m(5,\lambda;4,\mu;\nabla^{21}) = \sum_{i=o}^{3} m(5,\lambda,\nabla^{i+2})m(4,\mu,\nabla^{i+1})\frac{\nu^i}{i!}$$

$$= m(5,\lambda,\nabla^2)m(4,\mu,\nabla)+m(5,\lambda,\nabla^3)m(4,\mu,\nabla^2)\nu$$

$$+ m(5,\lambda,\nabla^4)m(4,\mu,\nabla^3)\nu^2/2!$$

$$+ m(5,\lambda,\nabla^5)\, m(4,\mu,\nabla^4)\, \nu^3/3!$$

$$= -(30+150\lambda+120\lambda^2+20\lambda^3)(1+14\mu+18\mu^2+4\mu^3)$$

$$-(150+240\lambda+60\lambda^2)(14+36\mu+12\mu^2)\nu$$

$$-(240+120\lambda)(36+24\mu)\,\nu^2/2!$$

$$-120 \times 24\, \nu^3/3!$$

The coefficients C_{ij} are obtained by one after the other substitution of (23) into (13) and summing up through all $x,y = 0,1,2,\ldots$. This expression is received in terms of ordinary moments m_{ij} which becomes too large and difficult to orient in for higher coefficients. Therefore bivariate factorial moments are introduced using the extended Frisch formula

$$m_{[r,s]} = \sum_{i=o}^{r} \sum_{j=o}^{s} S'(r,i)\, S'(s,j)\, m_{ij} \tag{24}$$

for $r,s = 0,1,2,\ldots$, where $S'(r,i)$ and $S'(s,j)$ are Stirling numbers of the first kind and m_{ij} are bivariate ordinary moments. Consequently the generalized forms of coefficients we have

$$C_{ro} = \frac{1}{r!\ o!} \sum_{i=o}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \lambda^{r-i}\, m_{[i,o]} \tag{25}$$

$$C_{r1} = \frac{1}{r!\ 1!} \sum_{i=o}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \lambda^{r-i} \Big[\mu m_{[i,o]} + i\nu\, m_{[i-1,o]} - m_{[i,1]}\Big] \tag{26}$$

$$C_{r2} = \frac{1}{r!\ 2!} \sum_{i=o}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \lambda^{r-i} \Big[\mu^2 m_{[i,o]} + 2i\mu\nu\, m_{[i-1,o]}$$
$$+ i(i-1)\nu^2 m_{[i-2,o]} - 2\mu m_{[i,1]} - 2\nu m_{[i-1,1]} + m_{[i,2]}\Big] \tag{27}$$

$$C_{r3} = \frac{1}{r!\ 3!} \sum_{i=o}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \lambda^{r-i} \Big[\mu^3 m_{[i,o]} + 3i\mu^2\nu\, m_{[i-1,o]} +$$

$$+ i(i-1)\,\mu\,\nu^2\, m_{[i-2,o]} + i(i-1)(i-2)\,\nu^3\, m_{[i-3,o]} -$$

$$- 3\mu^2\, m_{[i,1]} - 6i\mu\nu m_{[i-1,1]} - 3i(i-1)\,\nu^2\, m_{[i-2,1]} +$$

$$+ 3\mu\, m_{[i,2]} + 3i\nu\, m_{[i-1,2]} - m_{[i,3]}\Big] \tag{28}$$

The general form of (r,s)-th coefficient is

$$C_{rs} = \frac{1}{r!\ s!}\sum_{i=o}^{r}\sum_{j=o}^{s}\sum_{k=o}^{s-j}(-1)^{i+j}\binom{r}{i}\binom{s}{j}\binom{s-j}{k}(i)_k\,\lambda^{r-i}\mu^{s-j-k}\nu^k m_{[i-k,j]} \tag{29}$$

Relation (29) may be found with great brevity by the symbolic operation as

$$C_{rs} = \frac{1}{r!\ s!}\left\{\lambda - \left[(\mu+\nu) - m\right]^s\right\}^r \tag{30}$$

$$\sum_{i=o}^{s}\binom{s}{i}\mu^{r(s-i)}\nu^{ri}m^{rj} = \sum_{i=o}^{s}\binom{s}{i}\mu^{s-i}\nu^{ri}\, m^{(r-i)j}\ ;$$

$$m^{rs} \equiv m_{[r,s]}$$

$$\nu^{rs} \quad \prod_{t=o}^{r-1}(i-t)\,\nu^s\ ; \qquad m_{[-i,j]} \equiv 0 \quad \text{for } i = 0,1,2,\ldots$$

and the powers r,s are expressed for $r = 0,1,2,\ldots$ and $s = 0,1,2,\ldots$ respectively. The expanssion of (29) is performed according to every index r, s independently. If we introduce notation $P = \lambda-(\mu+\nu-m)^s$, $Q = \mu+\nu-$ [redacted], $D_p = d/dP$ with respect to the first index and $D_q = d/dQ$ with [redacted]pect to the second index, then

$$D_pC_{r+1,s} = D_pP^{r+1}\big/(r+1)!\ s!$$

$$= p^r\big/r!\ s!$$

$$= C_{rs}\ ; \qquad \text{for } r,s = 0,1,2,\ldots \tag{31}$$

$$D_q C_{r,s+1} = D_q \sum_{i=o}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \lambda^{r-i} Q^{s+1}/r!(s+1)!$$

$$= \sum_{i=o}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \lambda^{r-i} Q^{s}/r!s!$$

$$= C_{rs} \ ; \qquad \text{for} \quad r,s = 0,1,2,\ldots \tag{32}$$

In the case of independent random variables x, y respectively, the equations (29) and (30) become

$$C_{rs} = \frac{1}{r!\ s!} \sum_{i=o}^{r} \sum_{j=o}^{s} (-1)^{i+j} \binom{r}{i}\binom{s}{j} \lambda^{r-i} \mu^{s-j}\, m_{[i,j]} \tag{33}$$

or

$$C_{rs} = \frac{1}{r!\ s!} \left[\lambda - (\mu - m)^{s} \right]^{r} \tag{34}$$

$$\sum_{i=o}^{s} \binom{s}{i} \mu^{r(s-i)}\, m^{rj} \equiv \sum_{i=o}^{s} \binom{s}{i} \mu^{s-i}\, m^{(r-i)j} \ ; \quad m^{rs} \equiv m_{[r,s]} \ ;$$

$$m_{[-i,j]} \equiv 0$$

for $i = 0,1,2,\ldots$, and the powers and the expansion mode has the same explanatation as above. If we introduce the notation $P = \lambda - (\mu - m)^s$, $\dot{Q} = \mu - m$, $D_p = d/dP$ with respect to the first index and $D_q = d/dQ$ with respect to the second one into the equation (34), then

$$D_p C_{r+1,s} = C_{r,s} \tag{35}$$

$$D_q C_{r,s+1} = C_{r,s} \tag{36}$$

3. Application

The choice of the described method is made with respect to the use on a digital computer. The approximation of the given distribution depends on the character of empirical data and must be therefore studied for every case individually.

REFERENCES

[1] AROIAN L. A.: The type B Gram-Charlier series., Annals of Mathematical Statistics 8, 1937, 183-192

[2] BOAS R.P.: Representation of probability distributions by Charlier series, Annals of Mathematical Statistics 20, 1949, 376-392

[3] CHARLIER C. V. L.: Die zweite Form des Fehlergesetzes, Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik 15, 1905, 1-8

[4] CHARLIER C. V. L.: Über die Darstellung willkürlicher Funktionen, Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik 20, 1905, 1-35

[5] HADLEY H. and WHITIN T. M.: Useful properties of the Poisson distribution, Operations Research 9, 1961, 408-410

[6] HAIGHT F. A.: Handbook of the Poisson Distribution, John Wiley and Sons, New York - London - Sydney, 1967

[7] KENDALL M. G. and STUART A.: The Advanced Theory of Statistics, Vol. I., Charles Griffin and Co., London, 1958

[8] KENDALL M. G.: Relations connected with the tetrachoric series and its generalisation, Biometrika 32, 1941, 196-209

[9] PHILIPSON C.: The theory of confluent hypergeometric functions and its application to compound Poisson processes, Skandinavisk Aktuarietidskrift 43, 1960, 136-162

[10] PLACKETT R. L.: The truncated Poisson distribution, Biometrics 9, 1953, 485-8

[11] RIORDAN J.: Moment recurrence relations for binomial, Poisson and hypergeometric frequency distributions, Annals of Mathematical Statistics 8, 1937, 103-111

[12] TEICHER H.: On the multivariate Poisson distribution, Skandinavisk Aktuarietidskrift 37, 1954, 1-9

Author's address: Computing Laboratory of the Ministry of Planing SSR, Kýčerskeho 1, Bratislava

Received: June 1, 1970

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. - MATHEMATICA XXVI - 1972)
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXVI - 1972

A CLASS OF LEBESGUE NON-MEASURABLE SUBFIELDS OF THE FIELD OF REAL NUMBERS

IVAN KOREC, Bratislava

In the paper [2] the following problem is given: does there exist a number field H with the property $0 < \dim H < 1$? In connection with this problem professor T. ŠALÁT put the question whether there exist any LEBESGUE non-measurable subfields of the field of real numbers. In this paper a system of LEBESGUE non-measurable subfields of the field of real numbers is constructed.

R denotes the set of all numbers, R_0 the set of all rational numbers, c the cardinality of R, $\omega_{\varkappa}$ the first ordinal with the cardinality c, $\mathcal{F}$ the set of all closed (in usual sense) subsets of R with the cardinality c, μ the LEBESGUE measure, 2^X the power set of the set X. If $X \subseteq R$ and Y is a subfield of R, then Y(X) is the least subfield of R which contain $X \cup Y$.

Lemma 1. There exists a system $\mathcal{B} \subseteq 2^R$ with the following properties:

1. The cardinality of $\mathcal{B}$ is c.
2. Every element of $\mathcal{B}$ has the cardinality c.
3. The set-theoretical union of $\mathcal{B}$ is a set which is algebraically independent over R_0.
4. Every element of $\mathcal{B}$ has a non-void intersection with every element of $\mathcal{F}$.

Proof. There exists a transfinite sequence $(F_\alpha \mid \alpha < \omega_{\varkappa})$ such that for every $F \in \mathcal{F}$ and $\beta < \omega_{\varkappa}$ there exists γ, $\beta < \gamma < \omega_{\varkappa}$ such that $F_\gamma = F$. Let $<_1$ be an ordering of the set $M = \{\langle \alpha, \beta \rangle \mid \alpha < \omega_{\varkappa}, \beta < \omega_{\varkappa}\}$ of the type $\omega_{\varkappa}$, and $<_2$ a well ordering of R.

Let us define a real function $a(\alpha, \beta)$ on M by transfinite induction relative the ordering $<_1$:

> $a(\alpha, \beta)$ is the first (in the sense of $<_2$) element of F_β which is transcedent over the field $R_0(\{a(\gamma, \delta) | <\gamma, \delta> <_1 <\alpha, \beta>\})$.

The element $a(\alpha, \beta)$ exists for every $\alpha < \omega_\varkappa$, $\beta < \omega_\varkappa$ because the cardinality of $\{a(\gamma, \delta) | <\gamma, \delta> <_1 <\alpha, \beta>\}$ is less than c. Then the cardinality of the set of all real numbers which are algebraic over the field $R_0(\{a(\gamma, \delta) | <\gamma, \delta> <_1 <\alpha, \beta>\})$ has also the cardinality less than c, but the cardinality of F_β is c.

Let us define

$B_\alpha = \{a(\alpha, \beta) | \beta < \omega_\varkappa\}$ for every $\alpha < \omega_\varkappa$, and $\mathcal{B} = \{B_\alpha | \alpha < \omega_\varkappa\}$.

It follows from the construction immediatelly that the function $a(\alpha, \beta)$ is one-to-one and that the set $\{a(\alpha, \beta) | \alpha < \omega_\varkappa, \beta < \omega_\varkappa\}$ is algebraically independent over R_0. The first two properties of $\mathcal{B}$ from the lemma 1 are evident. We must still prove property 4. Let $B \in \mathcal{B}$, $F \in \mathcal{F}$. There exist $\alpha < \omega_\varkappa$, $\beta < \omega_\varkappa$ such that $B = B_\alpha$, $F = F_\beta$. Then $a(\alpha, \beta) \in B_\alpha \cap F_\beta = B \cap F$, i.e. $B \cap F \neq \emptyset$, q.e.d.

<u>Lemma 2.</u> Let a system $\mathcal{B} \subseteq 2^R$ have the properties 1 - 4 from the lemma 1. Let $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{B}$, $B \neq C$. Then $R_0(B) \neq R_0(C)$ and $R_0(B) \cap R_0(C) = R_0$.

<u>Proof.</u> The first statement is a corollary of the second one. It is evident that $R_0 \subseteq R_0(B) \cap R_0(C)$. It remains to prove $R_0(B) \cap R_0(C) \subseteq R_0$. Let $p \in R_0(B)$, $p \in R_0(C)$. There exist finite sets $X = \{a_1, \dots, a_m\} \subseteq B$, $Y = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq C$ such that $p \in R_0(X) \cap R_0(Y)$. Then there exists polynomials $f_1(x_1, \dots, x_m)$, $g_1(x_1, \dots, x_m)$, $f_2(y_1, \dots, y_n)$, $g_2(y_1, \dots, y_n)$ over the field R_0 such that

$$p = \frac{f_1(a_1, \dots, a_m)}{g_1(a_1, \dots, a_m)} = \frac{f_2(b_1, \dots, b_n)}{g_2(b_1, \dots, b_n)}$$

Then it holds

$$f_1(a_1, \dots, a_m) \cdot g_2(b_1, \dots, b_n) - f_2(b_1, \dots, b_n) \cdot g_1(a_1, \dots, a_m) = 0.$$

The set $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$ is algebraically independent over R_0, and therefore $f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) =$
$= f_1(x_1, \dots, x_m) \cdot g_2(y_1, \dots, y_n) - f_2(y_1, \dots, y_n) \cdot g_1(x_1, \dots, x_m)$ is a zero polynomial. Hence for any rational numbers $p_1, \dots, p_n$ we have

$$f_1(a_1, \dots, a_m) \cdot g_2(p_1, \dots, p_n) - f_2(p_1, \dots, p_n) \cdot g_1(a_1, \dots, a_m) = 0.$$

We can suppose that $g_2(p_1, \dots, p_n) \neq 0$. Then

$$p = \frac{f_1(a_1, \dots, a_m)}{g_1(a_1, \dots, a_m)} = \frac{f_2(p_1, \dots, p_n)}{g_2(p_1, \dots, p_n)},$$

i.e. p is a rational number, q.e.d.

Lemma 3. Let a set $B \subseteq R$ have a non-void intersection with every element $F \in \mathcal{F}$. Then does not hold $\mu(B) = 0$.

Proof. If $\mu(B) = 0$, then there exists an open set $M \subseteq R$ such that $\mu(M) < 1$, $B \subseteq M$. We have $R - M \in \mathcal{F}$, and therefore $(R - M) \cap B \neq \emptyset$, which is a contradiction.

Lemma 4. Any LEBESGUE measurable proper subfield of R has LEBESGUE measure 0.

Proof. Let T be proper subfield of R and $\mu(T) > 0$. Then there exists a positive number k such that $\mu(T \cap (-k,k)) > 0$. Let $a_0 \notin T$, $|a_0| < 1$, $a_n = 2^{-n} \cdot a_0$ for $n = 1,2,3, \dots$. The sets $\{a_n + x \mid x \in T \cap (-k, k)\}$ are pairwise disjoint, they are subsets of the interval $(-k-1, k+1)$ and $\mu(\{a_n + x \mid x \in T \cap (-k, k)\}) =$
$= \mu(T \cap (-k, k))$. Therefore

$$\mu(-k-1, k+1) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{a_n + x \mid x \in T \cap (-k, k)\}) = \infty,$$

which is a contradiction.

Theorem. There exists a system $\mathcal{A}$ of subfields of the field of real numbers, which has the following properties:

1. $\mathcal{A}$ has the cardinality c.
2. Every element of $\mathcal{A}$ is LEBESGUE non-measurable.
3. The intersection of any two different elements of $\mathcal{A}$ is the field R_0 of rational numbers.

P r o o f. Let a system $\mathcal{B} \subseteq 2^R$ have the properties 1 - 4 from the lemma 1. Let $\mathcal{A} = \{R_0(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$. The properties 1 and 3 of $\mathcal{A}$ follow from the lemma 2. We must still prove that $R_0(B)$ for every $B \in \mathcal{B}$ is LEBESGUE non-measurable. Any $R_0(B)$ is proper subfield of R. If it is LEBESGUE measurable, then $\mu(R_0(B)) = 0$ and therefore $\mu(B) = 0$, which is a contradiction with lemma 3.

R e m a r k s. 1. Instead of R_0 we can take any subfield of R with cardinality less than c.

2. Instead of R we can take the field of complex numbers.

3. In the same way we can prove (without using continuum hypothesis) that there exist LEBESGUE non-measurable algebraically closed subfields of the field of complex numbers.

R E F E R E N C E S

[1] ERDÖS P., VOLKMANN B.: Additive Gruppen mit vorgegebener Hausdorfscher Dimension, Journal für reine und andgewandte Mathematik, 221 (1966), 203-208.

[2] VOLKMANN B.: Eine metrische Eigenschaft reeler Zahlkörper, Mathematische Annalen, 141 (1960), 237-238.

Author's address: Katedra algebry a teórie čísel, PFUK, Bratislava
Šmeralova 2/b

Received: August 10, 1970

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. - MATHEMATICA XXVI - 1972)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXVI - 1972

ABOUT THE ISOMORPHISM OF BERNOULLI SCHEMES

RASTISLAV POTOCKÝ, Bratislava

D. ORNSTEIN recently proved [1] that any Bernoulli schemes with the same entropy are isomorphic. Thus he solved an old problem of ergodic theory (see ROCHLIN [2]). In this paper we prove isomorphism only of a class of Bernoulli schemes, but in another way as it was done by ORNSTEIN. Our proof is simple and elementary.

We shall recall some basic definitions.

Definition 1. The quadruple $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, T)$ is called Bernoulli scheme if

(i) $$(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = \prod_{t=-\infty}^{\infty} (X_t, A_t, p_t),$$

$(X_t, A_t, p_t) = (X, A, p)$ for every integer t.

(ii) (X, A, p) is a probality space, X at most denumerable

(iii) T is the bilateral shift on Ω, i.e. $T\omega = \omega' \iff \omega'_i = \omega_{i+1}$ for every integer i.

Definition 2. Bernoulli schemes $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, T)$, $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu}, \bar{T})$ are called almost isomorphic (or simply isomorphic) if there exist sets $D \in \mathcal{B}$, $\bar{D} \in \bar{\mathcal{B}}$ and a transformation $V : D \longrightarrow \bar{D}$ such that

(i) V is bijective

(ii) V and V^{-1} (inverse transformation to V) are measurable

(iii) $\mu V^{-1} = \bar{\mu}$

(iv) $\bar{T}\,V = V\,T$ for every $\omega \in D$

(v) $T\,D \subset D$, $\bar{T}\,\bar{D} \subset \bar{D}$

(vi) $\mu(D) = 1$, $\bar{\mu}(\bar{D}) = 1$.

P r o p o s i t i o n. Let $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, T)$, $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu}, \bar{T})$ be Bernoulli schemes with the state spaces (X, A, p), $(\bar{X}, \bar{A}, \bar{p})$ respectively,

$$X = \{(1), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\},$$

$$\bar{X} = \{(1,4), (1,5), (2), (3)\},$$

$$\begin{aligned} p(1) &= \pi(1) & \bar{p}(1,4) &= \pi(1)\pi(4) \\ p(2,4) &= \pi(2)\pi(4) & \bar{p}(1,5) &= \pi(1)\pi(5) \\ p(2,5) &= \pi(2)\pi(5) & \bar{p}(2) &= \pi(2) \\ p(3,4) &= \pi(3)\pi(4) & \bar{p}(3) &= \pi(3) \\ p(3,5) &= \pi(3)\pi(5) & & \end{aligned}$$

where

$$\pi(1) = \pi(2) + \pi(3) = 1/2$$

$$\pi(4) + \pi(5) = 1.$$

Then $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, T)$ and $(\bar{\Omega}, \mathcal{B}, \bar{\mu}, \bar{T})$ are isomorphic.

P r o o f. We shall construct the transformation

$$V : \{\omega_t\}_{t=-\infty}^{\infty} \longrightarrow \{\bar{\omega}_t\}_{t=-\infty}^{\infty} \quad \text{as follows:}$$

For every integer t

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_t &= (2) & &\text{if } \omega_t = (2,5) \vee (2,4) \\ \bar{\omega}_t &= (3) & &\text{if } \omega_t = (3,5) \vee (3,4) \\ \bar{\omega}_t &= (1,4)\ \ ((1,5)) & &\text{if } \omega_t = (1),\ \omega_{t-n} = (2,4) \vee (3,4) \\ & & &(\ \omega_t = (1),\ \omega_{t-n} = (2,5) \vee (3,5)\ ) \end{aligned}$$

where n is the least natural number such that the number of (1) in the finite sequence $\{\omega_{t-n}, \dots, \omega_t\}$ does not exceed that of the rest elements.

In the following we denote by $(1)_{t-k,\ t-k+1, \dots, t, t+1, \dots, t+m}$ and $a_{t-k,\ t-k+1, \dots, t,\ t+1, \dots, t+m}$, k, m natural numbers, the number of (1) and the number of the other elements in the finite sequence $\{\omega_{t-k}, \omega_{t-k+1}, \dots, \omega_t, \omega_{t+1}, \dots, \omega_{t+m}\}$, respectively.

According to the definition 2 we have to show that the set of all sequences $\omega \in \Omega$, for which V is not defined, is the measurable null set. We shall denote this set by A. We have

$$A = \bigcup_{t=-\infty}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{tn},$$

$$A_{tn} = \{\omega \mid (\omega_t = (1))(\forall_k\ 1 \leq k \leq n)((1)_{t-k,t-k+1,\dots,t} > a_{t-k,t-k+1,\dots,t})\}.$$

For every natural n A_{tn} may be rewritten as the union of $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ disjoint sets, any of them has the measure $1/2^{n+1}$, hence $\mu(A_{tn}) = \binom{n}{[\frac{n}{2}]} \Big/ 2^{n+1}$. Since the sequence A_{tn} is decreasing, we have

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{tn}\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_{tn}) = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{[\frac{n}{2}]} \Big/ 2^{n+1} = 0.$$

From the above relation between A and A_{tn} it follows that $\mu(A) = 0$.

Let D^* denote the set $\Omega - A$. We shall show that transformation V is 1-1 a.e., i.e. there exists a measurable set B, $\mu(B) = 0$ such that V is 1 - 1 on the set $D = D^* - B$. The set B may be written as follows:

$$B = \bigcup_{j=1}^{4} \bigcup_{t=-\infty}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} C^j_{tn},$$

$$C^j_{tn} = \{\omega \mid (\omega_t = a_j)(\forall_k\ 1 \leq k \leq n)((1)_{t,t+1,\dots,t+k} < a_{t,t+1,\dots,t+k})\}$$

$$a_1 = (2,4), \quad a_2 = (2,5), \quad a_3 = (3,4), \quad a_4 = (3,5).$$

Since there exist $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ of sequences $\{\omega_t, \omega_{t+1}, \dots, \omega_{t+k}\}$ with the above property, it follows that $\mu(C^j_{tn}) = \binom{n}{[\frac{n}{2}]} p(a_j) \Big/ 2^n$.

Since the sequence C^j_{tn} is decreasing, it follows that

$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} C^j_{tn}) = 0$. From the relation $B = \bigcup_{j=1}^{4} \bigcup_{t=-\infty}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} C^j_{tn}$ we have $\mu(B) = 0$.

Put $\bar{D} = V\,D$, then it is clear that V is 1 - 1 transformation from D onto $\bar{D}$. It is obvious that $\mu(D) = 1$.

Thus (i) and the first part of (vi) are satisfied. In the following (ii) and (iii) will be proved.

It is sufficient to show that V preserves measure on cylinders. We shall prove it by induction.

Let $[\bar{x}_t]$ be the set $\{\bar{\omega} \mid \bar{\omega}_t = \bar{x}_t\}$, $\bar{x}_t$ be an element of $\bar{X}$. If $\bar{x}_t = (2)$ or (3), the above assertion holds. Let $\bar{x}_t$ be $(1,4)$. Then we have

$$V^{-1}[\bar{x}_t] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{tn},$$

$$E_{tn} = \{\omega \mid (\omega_{t-n} = (2,4) \vee (3,4))\ (\forall_k\ 1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

$$\left((1)_{t-k,\dots,t} > a_{t-k,\dots,t}\right)\left((1)_{t-n,\dots,t} \leqslant a_{t-n,\dots,t}\right)\}.$$

For $\bar{x}_t = (1,5)$ an analogical consideration is true. Put

$$F_{tn} = \{\omega \mid (\omega_{t-n} = (2,5) \vee (3,5))\ (\forall_k\ 1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

$$\left((1)_{t-k,\dots,t} > a_{t-k,\dots,t}\right)\left((1)_{t-n,\dots,t} \leqslant a_{t-n,\dots,t}\right)\}.$$

Since $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{tn}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_{tn})$ and $\mu(E_{tn}) = q_{t-n}\, \overset{*}{q}_{t-n+1} \cdots$ $\dots, \overset{*}{q}_{t-1}\, \overset{*}{q}_t$, $n = 1,2,\dots$, $q_{t-n} = 1/2\ \pi(4)$, it follows that the measure of $V^{-1}[\bar{x}_t]$, $\bar{x}_t = (1,4)$ differs from the measure of $V^{-1}[\bar{x}_t]$, $\bar{x}_t = (1,5)$ by a constant factor only. We have

$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{tn}) = 1/2\,\pi(4)\,\ell$, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{tn}) = 1/2\ \pi(5)\,\ell$ and

$$1/2\ \pi(4)\,\ell + 1/2\ \pi(5)\,\ell = 1/2,$$

thus $\ell = 1$, hence the measure of cylinder and the measure of its inverse image are the same.

Let $[\bar{x}_{t+1}, \bar{x}_{t+2}, \dots, \bar{x}_{t+n}]$ be the set

$$\{\bar{\omega} | \bar{\omega}_{t+1} = \bar{x}_{t+1}, \bar{\omega}_{t+2} = \bar{x}_{t+2}, \dots, \bar{\omega}_{t+n} = \bar{x}_{t+n}\},$$

$\bar{x}_{t+1}, \bar{x}_{t+2}, \dots, \bar{x}_{t+n}$ be elements of $\bar{X}$, $n = 1,2,\dots$

Suppose the proposition (iii) is true for $[\bar{x}_{t+1}, \bar{x}_{t+2}, \dots, \bar{x}_{t+n}]$, i.e. $\mu(V^{-1}[\bar{x}_{t+1}, \bar{x}_{t+2}, \dots, \bar{x}_{t+n}]) = \bar{\mu}([\bar{x}_{t+1}, \bar{x}_{t+2}, \dots, \bar{x}_{t+n}])$.
The inverse image of $[\bar{x}_{t+1}, \bar{x}_{t+2}, \dots, \bar{x}_{t+n}]$ is (in general) the union of cylinders.

Two cases are possible:

a) Let ω_s, $s \leq t+n$ be such component, on which the inverse image of the above cylinder depends, that $(1)_{s,s+1,\dots,t+n} < a_{s,s+1,\dots,t+n}$ and let no component ω_r, $s < r \leq t+n$ with this property exists.

b) Let there be no component with the property sub a).

Consider the cylinder $[\bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_{t+n}, \bar{x}_{t+n+1}]$ obtained from the original one by the adding of $\bar{x}_{t+n+1} = (1,4)$. If we put

$$\bar{\mu}([\bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_{t+n}]) = \ell \text{ and}$$

$$\mu(V^{-1}[\bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_{t+n}, (1,4)]) = k\pi(4),$$

it follows (in both cases) that

$$\mu(V^{-1}[\bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_{t+n}, (1,5)]) = k\pi(5) \quad \text{and}$$

$$k = k(\pi(4) + \pi(5)) = \mu(V^{-1}[\bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_{t+n}, (1,4) \vee (1,5)]) =$$

$$= \mu(V^{-1}[\bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_{t+n}] \cap \{\omega | \omega_{t+n+1} = (1)\}) =$$

$$= \mu(V^{-1}[\bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_{t+n}]) \times \pi(1) = 1/2\,\ell, \quad \text{hence}$$

$$\mu(V^{-1}[\bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_{t+n}, \bar{x}_{t+n+1}]) = 1/2\,\pi(4)\,\ell =$$

$$= \bar{\mu}([\bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_{t+n}, \bar{x}_{t+n+1}]).$$

It is easy to prove that V^{-1} is a measurable transformation, i.e. $E \in \mathcal{B}$ implies $VE \in \bar{\mathcal{B}}$.

Now it is easy to show that $\bar{\mu}(\bar{D}) = 1$. (iv) is obvious. If we prove (v), the proof will be finished.

Let D, D^* and B be as in the first part of this proof. Consider any $\omega \in D$. Then $T\omega \in D^*$. It is necessary to prove

$$T\omega \notin B.$$

Indirectly: suppose $T\omega \in B$. It means:

$$\left(\exists t\right)\left(\exists j\right)(\omega_t = a_j)(\forall k \geq 1)((1)_{t,t+1,\dots,t+k} < a_{t,t+1,\dots,t+k})$$

Then the element ω' differing from $T\omega$ in the component with the index t (ω'_t = some of a_j) only, belongs to D^*, too. Since $T^{-1}\omega' \in D^*$, the above assumption leads to a contradiction.

Since $TD \subset D$, we have $\bar{T}\bar{D} = \bar{T}VD = VTD \subset VD = \bar{D}$.

R E F E R E N C E S

[1] ORNSTEIN D.: Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic, Advances in Mathematics, 4 (1970), 337-352.

[2] ROCHLIN V.A.: Izbrannyje voprosy metričeskoj teorii dinamičeskich sistem, UMN, 4 1949 , 57-125.

Author's address: Katedra matematickej štatistiky, PFUK, Bratislava
Šmeralova 2/b

Received: September 9, 1970

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. – MATHEMATICA XXVI – 1972)
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXVI – 1972

ON SOME PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION

PAVOL MARUŠIAK, Žilina

In this paper we will consider a differential equation of the n-th order ($n \geqslant 3$) with delay (hereinafter referred to as "the equation") of the following form:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{p=o}^{m} Q_p(t) y\left[h_p(t)\right] = 0 \tag{1}$$

where m is a positive integer. The functions $Q_p(t) \in C_o(J=\langle a,\infty))$, $(a \geqslant 0)$, $h_p(t) \in C_o(J)$, $p = 0,1,\dots,m$, where $h_o(t) = t, h_p(t) \leqslant t$, $\lim_{t\to\infty} h_p(t) = \infty$ for $p = 1,2,\dots,m$.

In the paper [2] the asymptotic properties of the positive solutions of the equation $y''(x) + P(x)y(x)+Q(x)y[x-\Delta(x)] = 0$ are investigated. We are going to try to generalize some of these results and the principal result will be summarized in Theorem 1. In Theorem 2 we are going to generalize Theorem 1 in the paper [1] which runs as follows: Let $f(x)>0$, $\int^{\infty} x^{n-2} f(x)dx = \infty$. Then the following statement is true for the equation $y^{(n)} + f(x)y = 0$:

If n is an even number, then the equation has only ascillatory solutions.

If n is an odd number and $y(x)$ is a nonoscillatory solution in the interval $(0,\infty)$, then $\lim_{x\to\infty} y^{(n-1)}(x) = \dots = \lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, where the signs of $y, y',\dots, y^{(n-1)}$ alternate for a sufficiently large x.

The homogeneous initial problem (hereinafter referred to as "the hom. problem") for the equation (1) is defined in the following way:

Let a continuous function $\varphi(t)$, where $\varphi(a) = 1$, be defined in the initial set $E_a = \bigcup_{p=0}^{m} E_a^p$; $E_a^p = \{x;\ x = h_p(t) \leq a,\ t \geq a\} \vee \{a\}$, and let $y_a^{(i)}$ $(i = 0,1,\dots, n-1)$ be arbitrary real numbers. We search the solution $y(t)$ of the equation (1) in the interval J which fulfils the initial conditions:

$$y^{(i)}(a+) = y_a^{(i)}\ ,\qquad i = 0,1,\dots,n-1$$

(2)

$$y(t) = y_a\,\varphi(t)\qquad \text{if}\qquad t \in E_a\quad (y_a^{(o)} = y_a)$$

The solution $y(t)$ of the hom. problem (1), (2) will be called nonoscillatory in J if there exists such a number $t_o > a$, that $y(t) \neq 0$ for $t > t_o$.

The solution $y(t)$ of the hom. problem (1), (2) will be called oscillatory if the set of zeros of $y(t)$ is not bounded from the right.

Let us define the function $\gamma_p^*(t)$ $(p = 0,1,\dots,m)$ as follows:

$$\gamma_p^*(t) = \sup\{x;\ a \leq x,\ h_p(x) < t\}$$

and let us denote $\gamma^*(t) = \max\{\gamma_0^*(t) = t,\ \gamma_1^*(t),\dots,\gamma_m^*(t)\}$.

Lemma 1. If $\lim_{t\to\infty} h_p(t) = \infty$, $p = 0,1,\dots,m$,

(3)

then $\gamma^*(t) < \infty$ for every $t \in J$.

The proof is obvious.

Lemma 2. Let the functions $f(t)(\geq 0)$, $h(t)$, $g(t) \in C_o(J)$. Let $\lim_{t\to\infty} f(t) = k$ where k is either a positive number or the symbol $+\infty$ and let $0 < K \leq h(t)$ for $t \in J$. If

$$\int_a^\infty f(t)\,h(t)\,g(t)dt = c$$

where c is a real number and the function $g(t)$ does not alternate the sign in J, then $\int_a^\infty |g(t)|dt < \infty$.

P r o o f. If $0 < k$, then, in view of the assumption of Lemma 2, there exists such a $t_1 > a$ and $0 < K_1$, that $0 < K_1 \leq f(t)h(t)$ for $t \geq t_1$. Let $g(t) \geq 0$ in $(a,\infty) \equiv J$, then $0 < K_1 g(t) \leq f(t)h(t)g(t)$ for $t \geq t_1$.

From the last inequality it follows that $\int_a^\infty g(t)dt < \infty$, because $\int_a^\infty f(t)\,\varphi(t)g(t)dt < \infty$.

The proof can be carried out similarly for $g(t) \leq 0$.

L e m m a 3. For $t \in J$ let us assume that

(4) either $Q_p(t) \geq 0$ or $Q_p(t) \leq 0$, $p = 0,1,\dots,m$,

where $\sum_{p=0}^{m} Q_p(t) \equiv 0$ does not hold in any interval and let (3) hold.

Let $y(t)$ be such a solution, with the property $y(t) \neq 0$ for $t \geq t_0 \in J$, of the hom. problem (1), (2), that

(5) $$\lim_{t\to\infty} y^{(n-k)}(t) = c_{n-k} = 0$$

c_{n-k} is constant, $\operatorname{sgn} c_{n-k} = \operatorname{sgn} y(t)$ for $t \geq t_0$ and k is a fixed number from the set $\langle 2,3,\dots,n \rangle$.

Then the following statement is true:

(6) $$\lim_{t\to\infty} y^{(n-i)}(t) = 0, \qquad i = 1,2,\dots, k-1$$

P r o o f. Without a loss of generality, we can suppose that $y(t) > 0$ for $t \geq t_0$ and $Q_p(t) \geq 0$ for $t \in J$ $(p = 0,1,\dots,m)$. Then, with regard to Lemma 1, it follows from the equation (1), that $y^{(n-1)}(t)$ is a monotone decreasing funkction in $\langle \gamma^*(t_0),\infty)$ and with regard to $y(t) > 0$ for $t \geq t_o$, $\lim_{t \to \infty} y^{(n-1)}(t) \geq 0$. Let us suppose that $\lim_{t \to \infty} y^{(n-1)}(t) = b > 0$. Then $\lim_{t \to \infty} y^{(n-k)}(t) = +\infty$, which is contradictory to (5), therefore $\lim_{t \to \infty} y^{(n-1)}(t) = 0$ must hold.

The proof of (6) is going to be performed by the mathematical induction. For $i = 1$ it has already been proved under the assumptions $y(t) > 0$ for $t \geq t_o$ and $Q_p(t) \geq 0$ for $t \in J$, $p=0,1,\dots,m$.

Let us suppose that $\lim_{t \to \infty} y^{(n-j)}(t) = 0$ holds for some $i = j$, $j \in \langle 1,2,\dots,k-2 \rangle$ and we are going to prove $\lim_{t \to \infty} y^{(n-j-1)}(t) = 0$. From the inequalities $y(t) > 0$ for $t \geq t_o$ and $Q_p(t) \geq 0$, $t \in J$, $p = 0,1,\dots,m$ (these inequalities were assumed earlier), it follows, with regard to the equation (1) and $\lim_{t \to \infty} y^{(n-j)}(t) = 0$, that $(-1)^j y^{(n-j)}(t) < 0$ for a sufficiently large t. Then, with regard to (5), $\lim_{t \to \infty} y^{(n-j-1)}(t) = 0$ must hold. The proof of Lemma 3 is finished.

L e m m a 4. Let (4) hold and let

$$(7) \qquad \frac{h_p(t)}{t} \geq d, \quad p = 0,1,\dots,m, \qquad t \geq a + \varepsilon ,$$

where $0 < d < 1$ and ε is an arbitrarily small positive number. If there exists a solution $y(t)$ of the hom. problem (1), (2), for which there holds exactly one of the relations:

either $\lim_{t \to \infty} y^{(n-1)}(t) = c_{n-1}$, or $\lim_{t \to \infty} y^{(n-2)}(t) = c_{n-2}$, or ..., $\lim_{t \to \infty} y(t) = c_o$, where $c_o (\neq 0), \dots, c_{n-2} (\neq 0), c_{n-1} (\neq 0)$ are real numbers. Then all the integrals

$$(8) \qquad I_p = \int^{\infty} t^{n-1} \, | Q_p(t) | \, dt \qquad p = 0,1,\dots,m$$

are convergent.

P r o o f. Let us suppose, without a loss of generality, that the relation $\lim\limits_{t\to\infty} y^{(n-k)}(t) = c_{n-k} > 0$ holds for some $k \in \langle 1,2,\dots,n\rangle$. Then there exists $t_o > a$ with the property $y(t) > 0$ for $t \geqslant t_o > a$. If we integrate equation (1) $\overline{k-1}$ times from t to $+\infty$, using Lemma 3, we will get for the given $k \in \langle 2,3,\dots,n\rangle$ the integral identity

$$y^{(n-k+1)}(t) = \frac{(-1)^k}{(k-2)!} \sum_{p=o}^{m} \int_t^{\infty} (s-t)^{k-2}\, Q_p(s)\, y\big[h_p(s)\big]\, ds \tag{9}$$

If we futher integrate (9) from t_o to $+\infty$ and in the case $k=1$ we integrate equation (1) from t_o to $+\infty$, we will get the integral identity

$$0 < C_{n-k} = \lim_{t\to\infty} y^{(n-k)}(t) = y^{(n-k)}(t_o) + \tag{10}$$

$$+ \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{p=o}^{m} \int_{t_o}^{\infty} (s-t_o)^{k-1}\, Q_p(s) y\big[h_p(s)\big]\, ds \quad \text{for } k\ 1,2,\dots,n$$

Let us consider now, that for the given k there holds:

a, $k \in \langle 1,2,\dots,n-1\rangle$ b, $k = n$

a, In the first case we modify (10) to the form

$$c_{n-k} = y^{(n-k)}(t_o) + \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{p=o}^{m} \int_{t_o}^{\gamma^*(t_o)} (s-t_o)^{k-1}\, Q_p(s) y\big[h_p(s)\big] + \tag{11}$$

$$+ \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{p=o}^{m} \int_{\gamma^*(t_o)}^{\infty} (s-t_o)^{k-1}\, s^{n-k} Q_p(s)\, \frac{y\big[h_p(s)\big]}{\big[h_p(s)\big]^{n-k}} \left[\frac{h_p(s)}{s}\right]^{n-k} ds$$

From (7) it follows that $\lim\limits_{t\to\infty} h_p(t) = \infty$ $(p=0,1,\dots,m)$ and therefore with regard to Lemma 1, $\gamma^*(t) < \infty$, $t \in J$. Therefore the first integral in (11) is a proper one and the functions $\dfrac{y[h_p(t)]}{[h_p(t)]^{n-k}} \in C_0\langle \gamma^*(t_0),\infty)$ because $h_p(t) \geqslant t_0 > 0$ $(p = 0,1,\dots,m)$ for $t > \gamma^*(t_0)$. The functions $\dfrac{h_p(t)}{t}$, $p = 0,1,\dots,m$, are bounded and positive in $\langle t_0,\infty)$ $(t_0 > a)$ as it follows from (7): $1 \geqslant \dfrac{h_p(t)}{t} \geqslant d > 0$.

Because $\lim\limits_{t \to \infty} y^{(n-k)}(t) = c_{n-k} > 0$, the functions $y^{(n-k-i)}(t)$ $(i = 1,2,\dots,\overline{n-k})$ are not bounded and for $y(t)$ it is true that

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y(t)}{t^{n-k}} = \frac{c_{n-k}}{(n-k)!} \neq 0$$

If we use now the assumptions (4) and Lemma 2 for (11) we come to the conclusion that all the integrals

$$(12) \qquad \int_{\gamma^*(t_0)}^{\infty} (s-t_0)^{k-1} s^{n-k} |Q_p(s)| \, ds \qquad p = 0,1,\dots,m$$

are convergent.

b, Let k=n. If we use the assumptions (4) and Lemma 2 for (10), we come to the conclusion that the integrals

$$(13) \qquad \int_{t_0}^{\infty} (s-t_0)^{n-1} |Q_p(s)| \, ds \qquad p=0,1,\dots,m$$

are convergent.

The convergence of integrals (12), (13) are equivalent to the convergence of integrals (8).

N o t e 1. If for the function $f(t) \in C_0(J)$ there holds that:

1, There exists such a number $b \in J$ that function $f(t)$ is increasing [decreasing] in the interval (b, ∞), 2, $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = k$, where k is either a real number or symbol $+\infty$ $[-\infty]$,

then we will denote: $f \uparrow k$ $[f \downarrow k]$.

Theorem 1. Let for all $p = 0,1,\dots,m$ either $Q_p(t) \geq 0$ or $Q_p(t) \leq 0$ for $t \in J$, where $\sum\limits_{p=o}^{m} Q_p(t) \equiv 0$ does not hold in any interval. Let (7) hold and let

$$(14) \qquad I_{p_o} = \int^{\infty} t^{n-1} |Q_{p_o}(t)| \, dt = \infty$$

at least for one $p_o \in \langle 0,1,\dots,m \rangle$. Let the hom. problem (1), (2) have a solution $y(t)$ in J with the property $y(t) > 0$ for $t \geq t_o \in J$.

I. If $Q_p(t) \leq 0$, $p = 0,1,\dots,m$, then for the solution $y(t)$

1_a, with n- even, it holds one of the $\frac{n+2}{2}$ cases:

either 1, $y^{(n-1)} \uparrow \infty$, $y^{(n-2} \uparrow \infty$, ..., $y' \uparrow \infty$, $y \uparrow \infty$,

or 2, $y^{(n-1)} \uparrow 0$, $y^{(n-2)} \downarrow 0$, $y^{(n-3)} \uparrow \infty$, ..., $y' \uparrow \infty$, $y \uparrow \infty$,

or .....

or $\frac{n}{2}$, $y^{(n-1)} \uparrow 0$, $y^{(n-2)} \downarrow 0$, $y^{(n-3)} \uparrow 0$, ..., $y'' \downarrow 0$, $y' \uparrow \infty$, $y \uparrow \infty$,

or $\frac{n+2}{2}$, $y^{(n-1)} \uparrow 0$, $y^{(n-2)} \downarrow 0$, $y^{(n-3)} \uparrow 0$, ..., $y'' \downarrow 0$, $y' \uparrow 0$, $y \downarrow 0$

1_b, When n is odd, one of the $\frac{n+1}{2}$ cases is true:

either 1, $y^{(n-1)} \uparrow \infty$, $y^{(n-2)} \uparrow \infty$, ..., $y' \uparrow \infty$, $y \uparrow \infty$,

or 2, $y^{(n-1)} \uparrow 0$, $y^{(n-2)} \downarrow 0$, $y^{(n-3)} \uparrow \infty$, ..., $y' \uparrow \infty$, $y \uparrow \infty$,

or 3, $y^{(n-1)} \uparrow 0$, $y^{(n-2)} \downarrow 0$, $y^{(n-3)} \uparrow 0$, $y^{(n-4)} \downarrow 0$, $y^{(n-5)} \uparrow \infty$, ...

..., $y' \uparrow \infty$, $y \uparrow \infty$, or ...

or $\frac{n+1}{2}$, $y^{(n-1)} \uparrow 0$, $y^{(n-2)} \downarrow 0$, $y^{(n-3)} \uparrow 0$, ..., $y'' \uparrow 0$, $y' \downarrow 0$, $y \uparrow \infty$.

II. If $Q_p(t) \geq 0$, $p = 0,1,\dots,m$, then for the solution $y(t)$

2a, with n - even, we have exactly one of the $\frac{n}{2}$ cases:

either 1, $y^{(n-1)}\downarrow 0$, $y^{(n-2)}\uparrow\infty$, ..., $y'\uparrow\infty$, $y\uparrow\infty$,

or 2, $y^{(n-1)}\downarrow 0$, $y^{(n-2)}\uparrow 0$, $y^{(n-3)}\downarrow 0$, $y^{(n-4)}\uparrow\infty$, ..., $y\uparrow\infty$,

or ....

or $\frac{n-2}{2}$, $y^{(n-1)}\downarrow 0$, $y^{(n-2)}\uparrow 0$, $y^{(n-3)}\downarrow 0$, ..., $y\downarrow 0$, $y''\uparrow\infty$, $y'\uparrow\infty$, $y\uparrow\infty$,

or $\frac{n}{2}$, $y^{(n-1)}\downarrow 0$, $y^{(n-2)}\uparrow 0$, $y^{(n-3)}\downarrow 0$, ..., $y''\uparrow 0$, $y'\downarrow 0$, $y\uparrow\infty$,

2b, with n - odd, there holds one of the $\frac{n+1}{2}$ cases:

either 1, $y^{(n-1)}\downarrow 0$, $y^{(n-2)}\uparrow\infty$, ..., $y'\uparrow\infty$, $y\uparrow\infty$,

or 2, $y^{(n-1)}\downarrow 0$, $y^{(n-2)}\uparrow 0$, $y^{(n-3)}\downarrow 0$, $y^{(n-4)}\uparrow\infty$, ..., $y\uparrow\infty$,

or ....

or $\frac{n-1}{2}$, $y^{(n-1)}\downarrow 0$, $y^{(n-2)}\uparrow 0$, $y^{(n-3)}\downarrow 0$, ..., $y''\downarrow 0$, $y'\uparrow\infty$, $y\uparrow\infty$,

or $\frac{n+1}{2}$, $y^{(n-1)}\downarrow 0$, $y^{(n-2)}\uparrow 0$, $y^{(n-3)}\downarrow 0$, ..., $y'''\downarrow 0$, $y'\uparrow 0$, $y\downarrow 0$.

P r o o f. I. Let $Q_p(t) \leq 0$, $p = 0,1,\dots,m$, where $\sum_{p=0}^{m} Q_p(t) \equiv 0$ does not hold in any interval and $y(t) > 0$ for $t \geq t_0$. Then from the equation (1) it follows that $y^{(n-1)}(t)$ is an increasing function in a neighbourhood of $+\infty$ and with regard to (14) and Lemma 4 it holds: either $y^{(n-1)}\uparrow\infty$ (then $y^{(n-k)}\uparrow\infty$, $k = 2,3,\dots,n$) or $y^{(n-1)}\uparrow 0$. Therefore $y^{(n-2)}(t)$ is a decreasing function for a sufficiently large t. Then, with regard to (14), Lemma 4 and $y(t) > 0$ for $t \geq t_0$, $y^{(n-2)}\downarrow 0$ must hold. When $y^{(n-2)}\downarrow 0$, then $y^{(n-3)}(t)$ is an increasing function for a sufficiently large t.

Let us suppose now, that $y^{(n-k)}(t)$ is an increasing function for sufficiently large t, for some $k \in \langle 3,5,\dots,\nu\rangle$ (where $\nu = n-1$ if n is an even number or $\nu = n-2$ if n is an odd number) and $y^{(n-1)}\uparrow 0$, $y^{(n-2)}\downarrow 0, \dots, y^{(n-k+1)}\downarrow 0$. Then, with regard to (14), Lemma 4 and $y(t) > 0$ for $t \geq t_0$, it holds: either $y^{(n-k)}\uparrow\infty$ (then $y^{(n-i)}\uparrow\infty$, $i = k+1,\dots,n$) or $y^{(n-k)}\uparrow 0$. If $y^{(n-k)}\uparrow 0$ then $y^{(n-k-1)}(t)$ is a decreasing function for a sufficiently large t. Then, with regard to (14), Lemma 4 and $y(t) > 0$ for $t \geq t_0$, $y^{(n-k-1)}\downarrow 0$ holds. From this we will get the assertion of Theorem 1 by the finite induction.

II. The proof is similar to the case I. Thus Theorem 1 is proved.

N o t e 2. Similar asymptotic properties hold for the negative $y(t)$, too. We must only interchange the sign $\uparrow$ [$\downarrow$] with $\downarrow$ [$\uparrow$] and symbol ∞ with symbol $-\infty$.

We will say that a solution $y(t)$ of the hom. problem (1), (2) has the property V if either $(-1)^k y^{(n-k)}(t) \downarrow 0$

or $(-1)^{k+1} y^{(n-k)}(t) \downarrow 0$, for $k=1,2,\dots,n$

T h e o r e m 2.

(15) Let $Q_p(t) \geqslant 0$, $p = 0,1,\dots,m$, $t \in J$

where $\sum_{p=o}^{m} Q_p(t) \equiv 0$ does not hold in any interval. Let (7) hold for $h_p(t)$, $p = 0,1,\dots, m$. If

$$(16) \qquad \int^{\infty} t^{n-2} Q_{p_o}(t)dt = \infty$$

at least for one $p_o \in \langle 0,1,\dots,m \rangle$, then

1, if n is an even number, all solutions $y(t)$ of the hom.problem (1), (2) are oscillatory.

2, When n is an odd number, all nonoscillatory solutions $y(t)$ of the hom. problem (1), (2) have the property V.

P r o o f. Let us suppose that there exists a nonoscillatory solution $y(t)$ of the hom. problem (1), (2) and let $y(t) > 0$ for $t \in J$, without a loss of generality. Then $y[h_p(t)] > 0$ $(p=0,1,\dots,m)$ for $t \geqslant t_o > \gamma^*(a)$. From (7), with regard to Lemma 1, it follows that $\gamma^*(a) < \infty$. If $y[h_p(t)] > 0$ for $t \geqslant t_o$, then $y^{(n-1)}(t)$ is a decreasing function. This assertion follows from the equation (1), with regard to (15) and $y^{(n-1)}(t) > \beta \geqslant 0$ for $t \geqslant t_o$. Let us suppose that $\beta > 0$ and let $y^{(n-1)} \downarrow \beta$. Then there exists such a number $t_1 > \gamma^*(t_o)$ that

$$(17) \qquad y[h_p(t)] > \frac{\beta/2}{(n-1)!}\left[h_p(t)\right]^{n-1} \qquad (p=0,1,\dots,m), \quad t \geqslant t_1$$

From the equation (1), by integrating we get

$$
\begin{aligned}
y^{(n-1)}(t) &= y^{(n-1)}(t_1) - \sum_{p=o}^{m} \int_{t_1}^{t} Q_p(s)\, y\left[h_p(s)\right] ds = \\
(18) \qquad &= y^{(n-1)}(t_1) - \sum_{p=o}^{m} \int_{t_1}^{t} s^{n-2} Q_p(s) \frac{y\left[h_p(s)\right]}{\left[h_p(s)\right]^{n-2}} \left[\frac{h_p(s)}{s}\right]^{n-2} ds
\end{aligned}
$$

Relations (7), (17) give

$$\frac{y\left[h_p(s)\right]}{\left[h_p(t)\right]^{n-2}} \left[\frac{h_p(t)}{t}\right]^{n-2} > \frac{\beta/2}{(n-1)!} d^{n-1}\, t_o > 0 \quad \text{for} \quad t \geqslant t_1$$

Then (18), with regard to the last inequality and (16), gives

$$y^{(n-1)}(t) < y^{(n-1)}(t_1) - \frac{\beta/2}{(n-1)!} t_o d^{n-2} \sum_{p=o}^{m} \int_{t_1}^{t} s^{n-2} Q_p(s) ds \rightarrow -\infty$$

which is a contradiction with $y^{(n-1)} > \beta > 0$. Hence $y^{(n-1)}(t) \downarrow 0 \left[\beta = 0\right]$.

The proof, that $(-1)^{k+1} y^{(n-k)}(t) \downarrow 0$ $(k=1,2,\dots,n-1)$ will be performed by the mathematical induction. For $k=1$ it has already been proved, that $y^{(n-1)}(t) \downarrow 0$.

Let us suppose that $(-1)^{k+1} y^{(n-k)}(t) \downarrow 0$ holds for some $k = i-1$ $(k=1,2,\dots,n-1)$, i.e. $(-1)^i y^{(n-i+1)}(t) \downarrow 0$ and $y^{(n-1)}(t) \downarrow 0, \dots,$ $(-1)^{i-1} y^{(n-i+2)}(t) \downarrow 0$. We are going to prove that $(-1)^{i+1} y^{(n-i)}(t) \downarrow 0$ holds, too $(k=i)$. Let us assume that $\lim_{t \to \infty} y^{(n-i)}(t) = 0$ does not hold. If $(-1)^i y^{(n-i+1)}(t) \downarrow 0$, then $(-1)^i y^{(n-i)}(t)$ is the increasing function for sufficiently large t. Then there exists such a number $\delta > 0$ and t_2; $t_2 > t_1$, that for $t \geq t_2$, either $(-1)^i y^{(n-i)}(t) > \delta$, or $(-1)^i y^{(n-i)}(t) < -\delta$. From the last two inequolities it follows, with regard to $y[h_p(t)] > 0$ $(p=0,1,\dots,m)$ for $t \geq t_o$, that $y^{(n-i)}(t) > \delta$ for $t \geq t_2$ (where i is an odd or an even number). It is clear that $y^{(n-i)}(t) < -\delta$ cannot hold, because then for a sufficiently large t, $y(t) < 0$.

$y^{(n-i)}(t) > \delta$ for $t \geq t_2$ yields that there exists such number t_3: $t_3 > \gamma^*(t_2)$, that

$$(19) \qquad y[h_p(t)] > \frac{\delta/2}{(n-k)!}\left[h_p(t)\right]^{n-i} \qquad (p=0,1,\dots,m), \qquad t \geq t_3$$

If we multiply equation (1) by t^{i-2} and integrate (by parts the left hand side) from t_3 to t, we get $[i=k]$

$$L_k[t,y(t)] = t^{k-2}\, y^{(n-1)}(t) - (k-2)t^{(k-3)} y^{(n-2)}(t) + \dots +$$

$$+ (-1)^k (k-2)!\, y^{(n-k+1)}(t) =$$

$$= L_k[t_3,y(t_3)] - \sum_{p=o}^{m} \int_{t_3}^{t} s^{k-2}\, Q_p(s)\, y[h_p(s)]\, ds$$

Let us modify the last integral identity to the form

$$L_k\left[t,y(t)\right] = L_k\left[t_3,y(t_3)\right] -$$

$$(20) \qquad - \sum_{p=o}^{m} \int_{t_3}^{t} s^{n-2}\, Q_p(s) \frac{y[h_p(s)]}{[h_p(s)]^{n-k}} \left(\frac{h_p(s)}{s}\right)^{n-k} ds$$

But (20), with regard to (19), (7), (16), yields

$$L_k\left[t,y(t)\right] < L_k\left[t_3,y(t_3)\right] - \frac{\delta/2}{(n-k)!}\, d^{n-k} \sum_{p=o}^{m} \int_{t_3}^{t} s^{n-2}\, Q_p(s) ds \to -\infty$$

which is a contradiction, because $L_k\left[t,y(t)\right] \geq 0$ for $t \geq t_3$.

Therefore $\lim\limits_{t\to\infty} y^{(n-i)}(t)=0$. Then, with regard to $(-1)^i y^{(n-i+1)}(t)\downarrow 0$, $(-1)^{i+1}\, y^{(n-i)}(t)\downarrow 0$. So far we have proved by the mathematical induction that $(-1)^{k+1}\, y^{(n-k)}(t)\downarrow 0$ $(p = 1,2,\dots, n-1)$.

Concerning the proof that a nonoscillatory solution $y(t)$ of the hom. problem (1), (2) has the property V it is still necessary to show that $y(t)\downarrow 0$.

1, For n - an even number $y(t)\downarrow 0$ cannot hold. If $y(t)\downarrow 0$ then there must hold: $y'\uparrow 0$, $y''\downarrow 0,\dots, y^{(n)}\downarrow 0$, i.e. $y^{(n)}(t) > 0$ for a sufficiently large t. That is a contradiction, because the equation (1), with regard to (15), gives $y^{(n)}(t) \leqslant 0$ for $t \in J$. Therefore $y\left[h_p(t)\right] > \alpha > 0$ for $t \geqslant t_o$. Then (21) holds for k=1,2,.. ..,n-1. If we multiply the equation (1) by t^{n-2} and integrate (by parts the left hand side) from t_3 to t, we get:

$$L_n\left[t,y(t)\right] = t^{n-2}y^{(n-1)}(t)-(n-2)t^{n-3}\, y^{(n-2)}(t)+ \dots +$$

$$+ (-1)^n(n-2)!\, y'(t) = \tag{22}$$

$$= L_n\left[t_3,y(t_3)\right] - \sum_{p=o}^{m} \int_{t_3}^{t} s^{n-2}\, Q_p(s)y\left[h_p(s)\right] ds$$

But (22), with regard to $y\left[h_p(t)\right]>\alpha>0$ for $t\geqslant t_o$ and (16), gives

$$L_n\left[t,y(t)\right] < L_n\left[t_3,y(t_3)\right] - \alpha \sum_{p=o}^{m} \int_{t_3}^{t} s^{n-2}\, Q_p(s)\, ds \to -\infty ,$$

which is a contradiction and therefore, for n- an even number, the hom. problem (1), (2) has not any nonoscillatory solution. Therefore the hom. problem (1), (2), for n-an even number, has only oscillatory solutions.

2, For n-an odd number $y(t)\downarrow 0$. Let $y(t)\downarrow 0$ not hold. Then $y\left[h_p(t)\right]> \alpha > 0$ for $t \geqslant t_o$, but in view of what has been proved above, this is not possible. That's why nonoscillatory solutions of the hom. problem (1), (2) have the property V.

N o t e 3. From Theorem 1 it follows that if we increase the exponent at t by one unit, then the divergence of integrals

$$\int^{\infty} t^{n-1} Q_p(t)dt \quad (p = 0,1,\dots,m)$$ is not sufficient for a solution

y(t) of the hom. problem (1), (2) to have the property V.

R E F E R E N C E S

[1] ANANEVA T. V., BALAGANSKIJ V. L.: O koleblemosti rešenij nekotorych differencial'nych uravnenij vyšego porjadka, UMN, Tom XIV, vyp. 1 (85) 1959, 135-140

[2] MARUŠIAK P., O kladných riešeniach diferenciálnej rovnice $y'''(x) + P(x)y(x) + Q(x)y[x-\Delta(x)] = 0$, Zborník prací VŠD a VÚD, č. 44, 57-63

Author's address: Katedra matematiky VŠD, Žilina, Marxa-Engelsa 25

Received: October 13, 1970

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. – MATHEMATICA XXVI – 1972)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXVI – 1972

ON ZEROS OF SOLUTIONS OF THE SECOND-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH RETARDATION

K. SMÍTALOVÁ, Bratislava

In the present paper we are going to show some conditions which are sufficient for the second-order linear differential equation with retardation to be oscillatory, resp. nonoscillatory. These conditions follow from some relations between solutions of the differential equation with- and without retardation. In the sequel, we use the theory and symbols from [1].

Consider the following equations:

(1) $$y''(t) + p(t)y(t) = 0,$$

(2) $$x''(t) + p(t)x(t) = q(t)x(t - \Delta(t)),$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in E_A,$$

where $p(t)$, $q(t)$, $\Delta(t) \gtrless 0$ are continuous functions defined on the interval $\langle A, \infty)$, and $\phi(t)$ is a continuous function defined on E_A. From (1), (2) we get the following relation:

$$x''(t)y(t) - y''(t)x(t) = q(t)x(t - \Delta(t)y(t),$$

resp.

(3) $$-W'(x,y) = q(t)x(t - \Delta(t))y(t)$$

T h e o r e m 1. Assume that $t - \Delta(t)$ is a monotone function, that $\lim_{t \to \infty} (t - \Delta(t)) = t_0$, t_0 finite, $\inf_{\langle A,\infty\rangle} |q(t)| = k > 0$, and that the zeros of $\phi(t)$ have no limit point in E_A. Then the following statement is true:

If all solutions of the equation (1) are nonoscillatory, then all solutions of the equation (2) are nonoscillatory.

P r o o f: Consider the three cases:

a) Let $|x(t_0)| > 0$. In this case there is some $t_1 \geqslant A$ such that $t - \Delta(t) \in (t_0 - \delta,\ t_0 + \delta)$, for $t > t_1$. Hence $x(t - \Delta(t))$ has a constant sign, for $t > t_1$. Assume that for $t > t_2$, where $t_2 \geqslant t_1$, the sign of $y(t)$ is constant. Then also W' has a constant sign and hence there is some t_3 such that $W \neq 0$, for $t > t_3 > t_2$. If $x(t)$ is oscillatory, then there exist points $a > t_3$, $b > t_3$ such that $x(a) = x(b) = 0$, and $x(t) \neq 0$ when $t \in (a,b)$. Since $W \neq 0$ in $\langle a,b \rangle$ the solution $y(t)$ has a zero in (a,b).

b) Let $x(t_0) = 0$, and $x(t) \not\equiv 0$ in each interval which contains t_0. From the assumpions of the theorem it follows that t_0 cannot be the limit point of zeros of $x(t)$. Hence we have either $t - \Delta(t) \in (t_0 - \delta,\ t_0)$, for all $t > t_1 \geqq A$, or $t - \Delta(t) \in (t_0, t_0 + \delta)$, for all $t > t_1$, and hence $x(t - \Delta(t))$ has a constant sign for $t > t_1$. Now we proceed with the proof similarly as in the case a).

c) Let $x(t) \equiv 0$ in some interval J which contains t_0. In this case, for $t \in J$,

$$- \frac{W(x(t),\ y(t))}{y^2(t)} = \left(\frac{x(t)}{y(t)} \right)' = 0, \quad \text{i.e.}$$

$$x = yc,$$

which is impossible.

The proof of the theorem is finished.

T h e o r e m 2. Let $\lim\limits_{t \to \infty} (t - \Delta(t)) = +\infty$, and let $q(t) > 0$, for $t \geqq A$. Then the following statement is true:

If all solutions of the equation (1) are oscillatory, then all solutions of the equation (2) are oscillatory.

P r o o f: Let $x(t) > 0$, for $t > t_1 \geqq A$. Let a, b, $b > a > \gamma^*(t_1) = \sup\limits_{t > t_1} \{t;\ t - \Delta(t) < t_1\}$, be two successive zeros of $y(t)$, i.e. $y(a) = y(b) = 0$, and $y(t) \neq 0$ for $t \in (a,b)$.

Assume that $y(t) > 0$, for t (a,b); from (3) it follows that, for such t, $W'(x,y) < 0$ so $W(x,y)$ is decreasing, i.e.

$$(4) \qquad W(a) > W(b).$$

On the other hand,

$$W(a) = y(a)x'(a) - x(a)y'(a) = -x(a)y'(a) < 0,$$

$$W(b) = y(b)x'(b) - x(b)y'(b) = -x(b)y'(b) > 0,$$

hence

$$W(a) < W(b),$$

contrary to (4).

The proof is similar in the case $x(t) < 0$ for $t > t_1$. Thus the theorem is proved.

R E F E R E N C E S

[1] S. B. NORKIN, Differencial'nye uravnenia vtorogo porjadka s zapazdyvajuščimsa argumentom, Moskva 1965

[2] S. B. NORKIN, O strukture množestva nulej rešenij linejnogo odnorodnogo uravnenija s zapazdyvajuščimsja argumentom, Trudy seminara po teorii diff. uravnenij s otklonjajuščimsja argumentom, Univerzitet družby narodov, II (1962).

[3] M. ŠVEC, On various properties of the Solutions of the Third and Fourth-Order Linear Differential Equations, Proceedings of the Conference Differential Equations and their Applications, Praha 1962

Author's address: Katedra matematickej analýzy PFUK, Bratislava
Šmeralova 2/b

Received: November 20, 1970

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. - MATHEMATICA XXVI - 1972)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXVI - 1972

ÜBER EINE KONSTRUKTION REELLER ZAHLEN I

MILOŠ FRANEK, Prievidza

Reelle Zahlen werden gewöhnlich aus rationalen Zahlen konstruiert. Es ist dies nich die einzige Möglichkeit - siehe [2], wo der Entwurf der Einführung reeller Zahlen mit Hilfe von natürlichen Zahlen vorliegt.

In dieser Arbeit beschreiben wir eine andere Konstruktion reeller Zahlen direkt aus ganzen Zahlen, und dies eigentlich mit der Folge der unteren g-adischen Aproximationen mit nichtangeführtem Ordnungspunkt.

Das Symbol g wird stets eine festgewählte natürliche Zahl grösser als 1 bedeuten. Das Gebiet der Veränderlichen, welches nicht ausdrücklich angeführt wird und auch nicht aus dem Zusammenhang folgt, wird immer die Menge $N = \{0,1,\dots\}$ sein. Weiter bezeichnen wir $Z = N \cup \{-1, -2, \dots\}$.

D e f i n i t i o n 1. (Definition der Entwicklung.) Die Folge $\{a_n\} \in Z^N$ nennen wir eine (g-adische) Entwicklung, wenn

(1) $(\forall n)(0 \leqq a_{n+1} - a_n g \leqq g - 1)$.

Wenn ausserdem

(2) $(\forall n)\ (\exists k \geqq n)\ (a_{k+1} - a_k g < g - 1)$,

werden wir über eine normale Entwicklung sprechen. Die Folge der Form $\{cg^n\}$ $(c \in Z)$ werden wir eine ganze Entwicklung nennen.

Ü b e r e i n k o m m e n ü b e r d i e B e z e i c h n u n g e n. Anstatt $\{cg^n\}$, wo $c \in Z$ ist, werden wir $\underline{c}$ schreiben; speziell $\{0\}_{n=0}^{\infty} = \underline{0}$ resp. $\{g^n\} = \underline{1}$. Die Menge aller Entwicklungen, bzw. ganzer, bzw. normaler Entwicklungen bezeichnen wir R_1, bzw. R_z, bzw. R. Ersichtlich gilt $R_z \subset R \subset R_1$. Wenn $\alpha = \{a_n\} \in R_1 - R$ und n_0 ist der kleinste der Indizes n, für welchen

$$(\forall k \geqq n)(a_{k+1} - a_k g = g - 1)$$

gilt, bezeichnen wir mit $\bar{\alpha}$ oder $\{\bar{a}_n\}$ die Folge, welche wir mit den Beziehungen

$$\bar{a}_n = a_n \quad \text{für} \quad n < n_0,$$

$$\bar{a}_n = a_n + 1 \quad \text{für} \quad n \geqq n_0$$

definieren.

Für $\alpha \in R$ setzen wir $\bar{\alpha} = \alpha$. Wenn wir für $\alpha \in R_1$ $f(\alpha) = \bar{\alpha}$ setzen, dann $f: R_1 \longrightarrow Z^N$. Auch später werden wir den Streifen nur in diesem Sinne anwenden.

<u>Hilfssatz 1.</u> Wenn $\alpha \in R_1$, dann $\bar{\alpha} \in R$.

<u>Beweis.</u> Es genügt vorauszusetzen, dass $\alpha = \{a_n\} \in R_1 - R$, wobei $\bar{\alpha} = \{\bar{a}_n\}$ oben definiert wurde. Dann existiert ein solches n_0, dass für jedes $k \geqq n_0$

$$a_{k+1} - a_k g = g - 1,$$

$$\bar{a}_{k+1} - \bar{a}_k g = (a_{k+1} + 1) - (a_k + 1)\, g = 0 (\neq g - 1)$$

gilt, so dass für $\{\bar{a}_n\}$ (2) gilt. Daraus folgt auch die Gültigkeit der Ungleichheit aus der Bedingung (1) für $n \geqq n_0$. Wenn $n < n_0 - 1$, gilt $\bar{a}_{n+1} - \bar{a}_n g = a_{n+1} - a_n g$ und endlich für $n = n_0 - 1$ gilt

$$\bar{a}_{n+1} - \bar{a}_n g = a_{n_0} + 1 - a_{n_0-1} g \leqq g - 1$$

(aus der Definition des Indexes n_0 folgt nämlich, dass wenn $n_0 > 0$, dann ist $a_{n_0} - a_{n_0-1} g < g - 1$). Deshalb $\bar{\alpha} = \{\bar{a}_n\} \in R$.

<u>Hilfssatz 2.</u> Für jedes $\{a_n\} \in R_1$ gilt

$$(\forall n)(\forall m)(0 \leqq a_{n+m} - a_n g^m < g^m).$$

B e w e i s. Wir zeigen es mit der Induktion in Bezug auf die Zahl m. Für $m = 0$ geht es um eine triviale Behauptung. Setzen wir voraus, dass

$$(\forall n)(0 \leqq a_{n+m} - a_n g^m < g^m).$$

Für ein beliebiges n gilt dann (siehe auch (1))

$$0 \leqq a_{n+1+m} - a_{n+1} g^m < g^m ,$$

$$0 \leqq (a_{n+1} - a_n g)\, g^m \leqq (g - 1)\, g^m .$$

Durch Addition erhalten wir

$$0 \leqq a_{n+m+1} - a_n g^{m+1} < g^{m+1}$$

H i l f s s a t z 3. Es sei $\{a_n\}, \{b_n\} \in R_1$. Dann ist

$$(\forall n)(\forall m > n)(a_n < b_n \Rightarrow a_m < b_m).$$

B e w e i s. Es sei $a_k < b_k$. Daraus und aus der Definition 1 folgt

$$a_k g \leqq (b_k - 1)\, g,$$

$$a_{k+1} - a_k g < g,$$

$$0 \leqq b_{k+1} - b_k g.$$

Durch Addition erhalten wir $a_{k+1} < b_{k+1}$. Wir bewiesen also die Implikation $a_k < b_k \Rightarrow a_{k+1} < b_{k+1}$ für ein beliebiges k und daraus folgt schon die Behauptung des Hilfssatzes.

H i l f s s a t z 4. Wenn $c, k \in N$ Konstanten sind, $\{a_n\} \in R$, so ist $\{a_n + cg^n\} \in R$. Setzen wir darüber hinaus voraus, dass $a_{k+1} - a_k g \neq g - 1$, und bezeichnen wir $b_n = a_n$ für jedes $n \leqq k$, bzw. $b_n = a_n + g^{n-k-1}$ für $n \geqq k + 1$, so ist auch $\{b_n\} \in R$.

B e w e i s. Der erste Teil der Behauptungen folgt leicht aus den Voraussetzungen und aus der Definition 1. Für $\{b_n\}$ gilt unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes

$$b_{n+1} - b_n g = a_{n+1} - a_n g \qquad \text{für} \qquad n < k$$

$$b_{n+1} - b_n g = a_{n+1} + g^{n-k} - (a_n + g^{n-k-1})g =$$

$$= a_{n+1} - a_n g \qquad \text{für} \qquad n > k$$

$$b_{k+1} - b_k g = a_{k+1} + 1 - a_k g \geqq 1 \geqq 0$$

$$a_{k+1} - a_k g + 1 \leqq g - 1$$

(weil $a_{k+1} - a_k g < g - 1$). Gemäss dem vorangehenden folgt aus der Gültigkeit der Bedingung (1) für $\{a_n\}$ ihre Gültigkeit für $\{b_n\}$. Dasselbe gilt von der Bedingung (2), sodass $\{b_n\} \in R$.

D e f i n i t i o n 2. (Definition der Anordnung.) Es sei $\alpha = \{a_n\} \in R_1$, $\beta = \{b_n\} \in R_1$. DieBeziehung $\alpha < \beta$ entsteht genau dann, wen $(\exists n)(a_n < b_n)$.

Wir führen auch die Relationen $>$, $\leqq$, $\geqq$ auf die gebräuchliche Weise ein (d.h. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \beta < \alpha ; \alpha \leqq \beta \Leftrightarrow \beta \geqq \alpha \Leftrightarrow \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$). Mittels des Hilfssatzes 3 kann die Gültigkeit der Beziehung

(3) $\qquad \{a_n\} \leqq \{b_n\} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall n)(a_n \leqq b_n)$

leicht bestimmt werden (eine ähnliche Behauptung für eine scharfe Ungleichheit gilt jedoch nicht!). Die Entwicklung $\alpha \geqq \underline{0}$ nennen wir nichtnegativ ($\alpha > \underline{0}$ positiv, $\alpha < \underline{0}$ negativ).

S a t z 1. Die Menge R_1 ist durch die Relation $<$ aus Definition 2 geordnet und R bildet mit der Relation $<$ ein Kontinuum.

B e w e i s. Es sei $\alpha = \{a_n\} \in R_1$, $\beta = \{b_n\} \in R_1$. Aus der Definition 2 ist ersichtlich, dass wenigstens einer der Fälle $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ eintritt und dass der erste mit den übrigen nicht vereinigt werden kann. Aus dem Hilfssatz 3 geht wieder hervor, dass gleichzeitig $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ nicht gilt. Ebenso erhalten wir aus dem Hilfssatz 3 sofort die Transitivität. Die geordnete Menge R ($\subset R_1$) hat weder ein kleinstes noch ein grösstes Element, weil zu einem beliebigen $\alpha = \{a_n\} \in R$ können wir $\beta = \{a_n - g^n\} \in R$, $\gamma = \{a_n + g^n\} \in R$ konstruieren (siehe Hilfssatz 4), wobei $\beta < \alpha < \gamma$ gilt.

Wir beweisen, dass die Anordnung dicht ist. Es sei $\{a_n\}$ $\{c_n\} \in R$, $\{a_n\} < \{c_n\}$. Gemäss Definition 2 existiert ein solches m, dass $a_m < c_m$ und zu diesem gemäss Definition 1 ein solches $k \geqq m$, dass $a_{k+1} - a_k g < g - 1$. Definieren wir jetzt $\{b_n\}$ folgend:

$$b_n = a_n \quad \text{für} \quad n \leqq k$$

$$b_n = a_n + g^{n-k-1} \quad \text{für} \quad n \geqq k + 1.$$

Gemäss Hilfssatz 4 ist $\{b_n\} \in R$. Aus der Gleichkeit b_{k+1} a $a_{k+1} + 1$ folgt jetzt $a_{k+1} < b_{k+1}$, d.h. $\{a_n\} < \{b_n\}$, und aus der Beziehung $b_m = a_m < c_m$ die Ungleichheit $\{b_n\} < \{c_n\}$.

Es bleibt nur noch die Existenz des Infimums einer beliebigen von unten beschränkten nichtleeren Menge $M \subset R$ zu bestimmen. Erwägen wir eine solche Menge M. Bei der Bezeichnung $\alpha = \{a_n\}$ definieren wir

(4) $$c_n = \min_{\alpha \in M} a_n \qquad (n = 0,1,\ldots)$$

Diese Minima existieren, da $M \neq 0$ und nach (3) gilt $(\forall n)(\forall \alpha \in M)(d_n \leqq a_n)$, wenn $\delta = \{d_n\}$ eine untere Schranke der Menge M ist. Zuerst beweisen wir die Beziehung

(5) $$(\forall n)\ (\exists\, \alpha \in M)(\forall k \leqq n)\ (c_k = a_k)$$

und aus dieser stellen wir fest, dass $\gamma \in R$. Wählen wir ein beliebiges n. Gemäss (4) existiert ein solches $\alpha \in M$, dass $c_n = a_n$. Zum gewählten $k < n$ existiert ein solches $\beta = \{b_m\}_{m=0}^{\infty} \in M$, dass $b_k = c_k \leqq a_k$. Daraus folgt gemäss Hilfssatz 3 für $b_k \neq a_k$ die Ungleichkeit $b_n < a_n$, was im Widerspruch mit der Beziehung $a_n = c_n \leqq b_n$ ist. Es gilt also $b_k = a_k$, und also $c_k = a_k$. Aus der bewiesenen Beziehung (5) folgt, dass zu jedem n ein solches $\alpha = \{a_n\} \in M \subset R$ existiert, dass $c_{n+1} - c_n g = a_{n+1} - a_n g$, d.h. γ hat die Eigenschaft (1). Überprüfen wir noch die Eigenschaft (2). Indirekt setzen wir voraus, dass für irgendein n

$$(\forall k \geqq n)\ (c_{k+1} - c_k g = g - 1)$$

gilt. Erwägen wir ein solches $\alpha = \{a_n\} \in M$, dass für das erwähnte n und für jedes $k \leqq n$ $c_k = a_k$ gilt (siehe (5)). Durch Induktion beweisen wir, dass die Gleichheit $c_k = a_k$ für jedes k gilt. Es genügt nur noch den Induktionschritt durchzuführen. Es sei $c_k = a_k$ $(k \geqq n)$. Auf Grund von (4) gilt dann

$$a_k g + g - 1 = c_k g + g - 1 = c_{k+1} \leqq a_{k+1} \leqq a_k g + g - 1,$$

also $c_{k+1} = a_{k+1}$. Deshalb $(\forall k)(c_k = a_k)$, d.h. $\alpha = \gamma$, also nichteinmal α hat die Eigenschaft (2), was ein Widerspruch ist.

Zum Abschluss beweisen wir, dass $\gamma = \inf M$. Es sei $\alpha \in M$. Aus den Beziehungen (4) und (3) folgt $\gamma \leqq \alpha$. Es sei endlich $\beta > \gamma$. Dann existiert ein solches n, dass $b_n > c_n$. Gemäss (4) existiert $\alpha \in M$, für welches $c_n = a_n$, was $a_n < b_n$, $\alpha < \beta$ bedeutet. Damit ist der Satz bewiesen.

Der Zwek unserer weiteren Erwägungen wird hauptsächlich in der Definition der Summe und des Produktes zweier Entwicklungen liegen.

<u>H i l f s s a t z 5.</u> Es sei $\alpha = \{a_n\} \in R_1$, $\beta = \{b_n\} \in R_1$. Dann

$$(\forall n)(\forall m)((a_n + b_n)\, g^m \leqq a_{n+m} + b_{n+m} < (a_n + b_n + 2)\, g^m)$$

<u>B e w e i s.</u> Es genügt den Hilfssatz 2 auf $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ anzuwenden und die betreffenden Ungleichheiten zu addieren.

<u>H i l f s s a t z 6.</u> (Hilfssatz über das Produkt.) Es sei $\alpha = \{a_n\} \in R_1$, $\beta = \{b_n\} \in R_1$. Dann existiert zu jedem n nur eine endliche Anzahl ganzer Zahlen i, für welche

$$(\exists m)(a_{n+m} + b_{n+m} \geqq i g^m)$$

Wenn wir den grössten unter ihnen mit $c_n (n=0,1,\ldots)$ bezeichnen, so ist $\gamma = \{c_n\} \in R_1$.

<u>B e m e r k u n g.</u> Aus dem Beweis des Hilfssatzes 6 geht hervor, dass dessen Formulation wie folgt sein könnte: Es sei

$\alpha = \{a_n\} \in R_1$, $\beta = \{b_n\} \in R_1$. Für $n = 0,1,\ldots$ setzen wir $c_n = a_n + b_n + 1$, wenn $(\exists m)(a_{n+m} + b_{n+m} \geqq (a_n + b_n + 1)\, g^m)$, bzw. $c_n =$

$= a_n + b_n$ im Gegenteil. Dann $\gamma = \{c_n\} \in R_1$. Den ursprünglichen Text führten wir wegen der Analogie mit dem Hilfssatz 9 an.

B e w e i s d e s H i l f s s a t z e s. Die Existenz der Zahlen c_n ist ersichtlich aus dem Hilfssatz 5. Bei beliebigem n ist die Zahl c_{n+1} die grösste der Zahlen j, für welche

$$(\exists m)(a_{n+1+m} + b_{n+1+m} \geqq jg^m)$$

Zu der Zahl c_n existiert ein solches m, dass

$$a_{n+m} + b_{n+m} \geqq c_n g^m$$

Für α, β folgt aus der Bedingung (1) weiter

$$a_{n+m+1} + b_{n+m+1} \geqq (a_{n+m} + b_{n+m})g$$

Deshalb

$$a_{n+m+1} + b_{n+m+1} \geqq c_n g g^m$$

d.h.c $c_n g$ ist eine der oben angeführten Zahlen j, und deshalb $c_{n+1} - c_n g \geqq 0$. Setzen wir jetzt indirekt voraus, dass $c_{n+1} - c_n g \geqq g$. Nach der Definition der Zahl c_{n+1} existiert ein p, für welches

$$a_{n+1+p} + b_{n+1+p} \geqq c_{n+1} g^p$$

Aus der indirekten Voraussetzung folgt $c_{n+1} \geqq (c_n + 1)g$. Deshalb gilt

$$a_{n+m} + b_{n+m} \geqq (c_n + 1)\, g^m$$

für die Zahl $m = p + 1$, was im Widerspruch mit der Definition der Zahl c_n steht. Es gilt also

$$(\forall n)(0 \leqq c_{n+1} - c_n g \leqq g - 1)$$

D e f i n i t i o n 3. (Definition der Summe.) Für $\alpha = \{a_n\} \in R_1$, $\beta = \{b_n\} \in R_1$ definieren wir $\alpha + \beta = \bar{\gamma}$, wo $\gamma = \{c_n\}$ im Hilfssatz 6 defeniert ist, und $\bar{\gamma} = \{\bar{c}_n\}$ nach der Definition 1. Weiter schreiben wir $\bar{c}_k = a_k \oplus b_k$ $(k=0,1,\dots)$.

B e m e r k u n g e n. Auf Grund des Hilfssatzes 1 gilt immer $\alpha + \beta \in R$. Zufolge der in der Definition eingeführten Bezeichnung können wir $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n \oplus b_n\}$ schreiben, wobei die Operation $\oplus$ von α, β abhängt und nur der Einfachheit halber schreiben wir zB $\oplus_{\alpha,\beta}$ nicht. Aus der Bemerkung nach dem Hilfssatz 6 und aus der Tatsache $c_n \leqq \bar{c}_n \leqq c_n + 1$ $(n = 0,1,\dots)$ folgt, dass

$$(6) \qquad a_n + b_n \leqq a_n \oplus b_n \leqq a_n + b_n + 2 \qquad (n = 0,1,\dots)$$

H i l f s s a t z 7. Es sei $\alpha = \{a_n\} \in R_1$, $\beta = \{b_n\} \in R_1$; $\alpha, \beta \geqq \underline{0}$. Dann existiert ein solches p, dass für $i_k = 2g^{p+k} + 1$ $(k = 0,1, \dots)$

$$(\forall m)(a_k b_k g^{2m} \leqq a_{k+m}\, b_{k+m} < (a_k b_k + i_k)\, g^{2m}$$

gilt.

B e w e i s. Wählen wir ein solches p, dass $a_0 < g^p$ $b_0 < g^p$. Durch Induktion stellen wir fest, dass $(\forall k)(a_k < g^{p+k})$.

Der Induktionsschritt ist:

$$a_k < g^{p+k} \Rightarrow a_k \leqq g^{p+k} - 1 \Rightarrow a_{k+1} < a_k g + g \leqq (g^{p+k}-1)g + g = g^{p+k+1}$$

Ähnlich ist $b_k < g^{p+k}$ für jedes k. Bezeichnen wir $A = a_{k+m} - a_k g^m$, $B = b_{k+m} - b_k g^m$. Gemäss Hilfssatz 2 gilt $A, B < g^m$, woraus wir mit Rücksicht auf die Abschätzungen für a_k, b_k, auf deren Nichtnegativität und mit Hilfe des Hilfssatzes 2 für jedes k,m

$$a_k b_k g^{2m} \leqq a_{k+m} b_{k+m} = a_k b_k g^{2m} + (a_k B + b_k A)\, g^m + AB < (a_k b_k + 2g^{p+k} + 1)\, g^{2m}$$

erhalten. Die Zahl $i_k = 2g^{p+k} + 1$ hängt ersichtlich nicht von m ab.

H i l f s s a t z 8. Es sei c_{2k} $(k = 0,1,\dots)$ ganze Zahlen, $c_0 \geqq 0$, wobei

$$(7) \qquad (\forall k)(0 \leqq c_{2k+2} - c_{2k} g^2 < g^2)$$

Dann existieren solche Zahlen c_{2k+1} $(k = 0,1,\dots)$, dass $\{c_n\} \in R_1$, $\{c_n\} \geqq \underline{0}$. Die Zahlen c_{2k+1} können bei gegebenen c_{2k} nur auf eine einzige Art gewählt werden.

D e f i n i t i o n s b e s t i m m u n g. Wir werden sagen, dass wir die Glieder c_{2k} auf die nichtnegative Entwicklung $\{c_n\}$ ergänzt haben.

B e w e i s d e s H i l f s s a t z e s. Zuerst beweisen wir die Eindeutigkeit. Für $\{c_n\}, \{c'_n\} \in R_1$ gelte $c_{2k} = c'_{2k}$ (k=0,1,...). Schreiben wir weiter $c'_{2k+1} = c_{2k+1} + d$, wenden wir die Gleichheit für gerade Indexe und die Bedingung (1) für $\{c'_n\}, \{c_n\}$ an:

$$0 \leqq c_{2k+2} - (c_{2k+1} + d)\, g < g - 1$$

$$-(g - 1) \leqq - c_{2k+2} + c_{2k+1}g \leqq 0$$

Durch Addition erhalten wir $-(g - 1) \leqq dg \leqq g - 1$, d.h. $g|d| \leqq g - 1$, was nur für $d = 0$ möglich ist. Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen und wir können zum Existenzbeweis übergehen.

Bei gegebenen c_{2k} (k = 0,1,...) definieren wir die Zahlen $r_1 = r_1(k)$, $r_2 = r_2(k)$, c_{2k+1} folgend

$$c_{2k+2} - c_{2k}g^2 = r_1 g + r_2, \qquad 0 \leqq r_2 < g,$$

$$c_{2k+1} = c_{2k}g + r_1$$

Gemäss (7) und aus der Definition der Zahlen r_1, r_2 können wir indirekt leicht feststellen, dass auch $0 \leqq r_1 < g$. Die Eigenschaft (1) der Folge $\{c_n\}$ folgt jetzt aus den Gleichheiten

$$c_{2k+1} - c_{2k}g = r_1$$

$$c_{2k+2} - c_{2k+1}g = c_{2k+2} - (c_{2k}g + r_1)\, g = r_2$$

Da sich die Gültigkeit der Beziehungen $c_n \geqq 0$ (n = 0,1,...) leicht durch Induktion beweisen lässt, ist der Beweis beendet.

H i l f s s a t z 9. (Hilfssatz über das Produkt.) Es sei $\alpha = \{a_n\} \in R_1$, $\beta = \{b_n\} \in R_1$; $\alpha, \beta \geqq \underline{0}$. Dann existiert zu jedem k nur eine endliche Anzahl von Zahlen i führ welche

$$(\exists m)\ (a_{k+m}\, b_{k+m} \geqq i g^{2m})$$

Wenn wir den grössten unter ihnen mit c_{2k} bezeichnen, können wir die Glieder $c_{2k}(k = 0,1,\ldots)$ auf die nichtnegative Entwickulng $\gamma = \{c_n\}$ ergänzen.

B e w e i s. Die Existenz der Zahlen c_{2k} ist ersichtlich aus dem Hilfssatz 7. Aus diesem Hilfssatz , sowie auch aus der Tatsache $a_0, b_0 \geqq 0$ (was aus den Voraussetzungen $\alpha, \beta \geqq 0$ und aus der Beziehung (3) hervorgeht) erhalten wir auch die Ungleichheit $c_0 \geqq 0$. Gemäss Hilfssatz 8 genügt es die Gültigkeit von (7) zu beweisen.

Die Zahl c_{2k+2} ist die grösste jener j, für welche

$$(\exists m)(a_{k+1+m}\, b_{k+1+m} \geqq jg^{2m})$$

Zur Zahl c_{2k} existiert ein solches m, dass

$$a_{k+m}\, b_{k+m} \geqq c_{2k}g^{2m}$$

Aus der Nichtnegativität α, β und aus der Bedingung (1) folgt weiter

$$a_{k+m+1}\, b_{k+m+1} \geqq a_{k+m}\, b_{k+m}\, g^2$$

Deshalb

$$a_{k+m+1}\, b_{k+m+1} \geqq c_{2k}g^2\, g^{2m}$$

d.h. dass $c_{2k}g^2$ eine der angeführten Zahlen j ist, und deshalb

$$c_{2k+2} - c_{2k}g^2 \geqq 0$$

Setzen wir nun indirekt voraus, dass $c_{2k+2} - c_{2k}g^2 \geqq g^2$. Nach der Definition der Zahl c_{2k+2} existiert ein p, für welches

$$a_{k+1+p}\, b_{k+1+p} \geqq c_{2k+2}g^{2p}$$

Aus der indirekten Voraussetzung folgt $c_{2k+2} \geqq (c_{2k} + 1)\, g^2$. Deshalb gilt für die Zahl $m = p + 1$

$$a_{k+m}\, b_{k+m} \geqq (c_{2k} + 1)\, g^{2m} ,$$

was im Widerspruch mit der Definition der Zahl c_{2k} ist. Es gilt also (7).

B e m e r k u n g. Aus dem Hilfssatz 7 folgt, dass bei den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus den Hilfssätzen 7 und 9

$$(8) \qquad a_k b_k \leqq c_{2k} < a_k b_k + i_k \qquad (k = 0,1,\ldots)$$

gilt.

H i l f s s a t z 10. (Hilfssatz über das additive Inverse.) Wenn $\alpha = \{a_n\} \in R_1$, dann $\beta = \{b_n\} = \{-a_n - 1\} \in R_1$ und es gilt $\alpha + \beta = \underline{0}$.

B e w e i s. Für jedes n gilt $0 \leqq a_{n+1} - a_n g \leqq g - 1$, aber auch $(a_{n+1} - a_n g) + (b_{n+1} - b_n g) = g - 1$.

Deshalb $0 \leqq b_{n+1} - b_n g \leqq g - 1$ $(n = 0,1,\ldots)$, d.h. $\beta \in R_1$. Weiter gilt für jedes n,m $a_{n+m} + b_{n+m} = -1$, was für c_n aus dem Hilfssatz 6 $c_n = -1$ $(n = 0,1, \ldots)$ folgt. Dann aber $c_{n+1} - c_n g = g - 1$ $(n = 0,1, \ldots)$, d.h. $\bar{c}_n = c_n + 1 = 0$, also gemäss Definition 2

$$\alpha + \beta = \{\bar{c}_n\} = \{0\}_{n=0}^{\infty} = \underline{0}$$

D e f i n i t i o n 4. (Definiton des additiven Inversen.) Wenn $\alpha \in R_1$ und β nach dem Hilfssatz 10 bestimmt ist, bezeichnen wir $-\alpha = \bar{\beta}$, (Siehe Übereinkommen nach der Definition 1.)

D e f i n i t i o n 5. Wenn $\alpha \in R_1$, schreiben wir $|\alpha| = \alpha$, wenn $\alpha \geqq \underline{0}$; bezw. $|\alpha| = -\alpha$, wenn $\alpha < \underline{0}$.

H i l f s s a t z 11. Es sei $\alpha = \{a_n\} \in R_1$. Dann gilt

(a) $\alpha \geqq \underline{0} \iff a_0 \geqq 0$;

(b) $\alpha < \underline{0} \iff a_0 < 0$;

(c) $\alpha < \underline{0} \implies -\alpha = \underline{0}$;

(d) $|\alpha| \geqq \underline{0}$.

B e w e i s. (a) Wenn $\alpha \geqq \underline{0}$, gemäss (3) ist dann $a_0 \geqq 0$. Wenn $a_0 \geqq 0$, stellen wir durch Induktion fest, dass $(\forall n)(a_n \geqq 0)$. Induktionsschritt: $a_n \geqq 0 \Rightarrow a_{n+1} \geqq a_n g = 0$ (siehe (1)). Gemäss (3) gilt $\alpha \geqq \underline{0}$.

(b) Die Behauptung folgt aus (a) und aus der Trichotomie.

(c) Es sei $\alpha < \underline{0}$, d.h. $a_0 < 0$, $-a_0 - 1 \geqq 0$ nach (b). Für $-\alpha = \bar{\beta} = \{\bar{b}_n\}$, wo $b_n = -a_n - 1$ $(n = 0,1, \dots)$, gilt dann $\bar{b} \geqq b_0 = - a_0 - 1 \geqq 0$, also gemäss (a) $-\alpha \geqq \underline{0}$.

(d) Siehe Definition 5 und (c).

Bevor wir zur folgenden Definition übergehen, bemerken wir, dass -AB wie üblich - (AB) und nicht (-A)B bedeutet.

<u>Definition 6.</u> (Definition des Produktes.) Für $\alpha, \beta \in R_1$, $\alpha = \{a_n\}$, $\beta = \{b_n\}$ definieren wir das Produkt $\alpha\beta$ folgend:

1. $\alpha\beta = \bar{\gamma}$, wenn $\alpha, \beta \geqq \underline{0}$ und γ ist im Hilfssatz 9 definiert;
2. $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$, wenn $\alpha, \beta < \underline{0}$;
3. $\alpha\beta = -|\alpha||\beta|$, wenn $\alpha \geqq \underline{0}$, $\beta < \underline{0}$ oder $\alpha < \underline{0}$, $\beta \geqq \underline{0}$.

Das 2k -te Glied der Entwicklung werden wir mit $a_k \cdot b_k$ bezeichnen. (Ein gewöhnliches Produkt schreiben wir stets ohne Punkt.)

<u>Bemerkungen.</u> Das Produkt $\alpha\beta$ wurde durch die Definition 6 für jedes $\alpha, \beta \in R_1$ definiert und es gilt $\alpha\beta \in R$. Das folgt aus dem Hilfssatz 1 und 11 und aus der Definition 4. Über die Operation $\cdot$ gilt eine ähnliche Bemerkung wie über $\oplus$.

<u>Hilfssatz 12.</u> Es sei $\gamma = \{c_n\} \in R_1$, $\delta = \{d_n\} \in R$, $\gamma > \delta$. Dann gilt $(\exists r)(\forall n \geqq r)(c_n \geqq d_n + g^{n-r})$.

<u>Beweis.</u> Da $\gamma > \delta$, existiert ein p, für welches $c_p > d_p$. Zufolge (2) existiert für δ ein solches $r > p$, dass $d_r - d_{r-1} g \leqq g-2$ und auf Grund des Hilfssatzes 3 $c_{r-1} > d_{r-1}$. Deshalb

$$c_r \geqq c_{r-1} g \geqq (d_{r-1} + 1) g \geqq d_r + 2.$$

Daraus und aus dem Hilfssatz 2 folgen für jedes m die Ungleichheiten $c_{r+m} \geqq c_r g^m \geqq (d_r + 2)\, g^m = (d_r g^m + g^m) + g^m \geqq d_{r+m} + g^m$, also ist $c_n \geqq d_n + g^{n-r}$ für alle $n = r + m \geqq r$.

Die Identität-en für addieren und multiplizieren beweisen wir mit Hilfe der durch die folgende Definition eingeführten Relation.

<u>D e f i n i t i o n 7.</u> (Definition der Relation $\langle r \rangle$.) Es sei $\{a_n\}, \{b_n\} \in Z^N$; p, q sind natürliche und $\langle r \rangle$ ganze nichtnegative Zahlen. Dann werden wir schreiben $a_{pk} \langle r \rangle b_{pk}$, wenn

$$(\exists s)(\forall k)(|a_{pk} - b_{pk}| < g^{rk+s})$$

gilt.

In Formeln der Type a_{pk} geht es nicht um doppelte Indexe, sondern um ein Produkt im Index. Damit es zu keinem Missverständniss kommt, werden wir im Zusammenhang mit dem vorangehenden für k nichts anderes einsetzen. Die Semantik des Symbols $\langle r \rangle$ ist nebensächlich; zur Sicherheit können wir ihm aber folgende Bedeutung bestimmen: $\langle r \rangle$ ist das Symbol einer Relation auf der Menge Z^N (bei gegebenen p, r).

<u>B e s t i m m u n g d e r B e z e i c h n u n g e n.</u> Wenn $\{a_n\}, \{b_n\} \in Z^N$, wird das

Produkt $a_k b_k$ ($k = 0,1, \ldots$) ein Glied d_{2k} irgendeiner Folge $\{d_n\}$ bedeuten (p aus der Definition 7 ist hier 2) und ähnlich $a_{2k} b_{2k} = d_{4k}$ ($p = 4$). Die Summe $a_k + b_k$ wird das k-te Glied einer gewöhnlichen Summe von Folgen sein (jetzt ist $p = 1$). Für $a_k \oplus b_k$ (Definition 3) ist $p = 1$ und für $a_k \cdot b_k$ (Definition 6) ist wieder $p = 2$. Wir werden verkürzte Formeln verwenden, zB

$$a_{2k} \langle 1 \rangle b_{2k} = c_{2k} + d_{2k} \langle 0 \rangle e_k g^k$$

anstatt $a_{2k} \langle 1 \rangle b_{2k}$, $b_{2k} = c_{2k} + d_{2k}$, $c_{2k} + d_{2k} \langle 0 \rangle e_k g^k$.

<u>H i l f s s a t z 13.</u> Für jedes $\alpha = \{a_n\}$, $\beta = \{b_n\}$, $\gamma = \{c_n\}$, $\bar{\alpha} = \{\bar{a}_n\}$, $\bar{\beta} = \{\bar{b}_n\}$; $\alpha, \beta, \gamma \in R_1$, natürliches p und für ganze nichtnegative r, r_1, r_2 gilt

(9) $\quad a_{pk} \langle r \rangle b_{pk} \Rightarrow b_{kp} \langle r \rangle a_{pk}, \quad - a_{pk} \langle r \rangle - b_{pk}$;

(10) $\quad c \langle 0 \rangle 0$, wenn c = const. (d.h. $a_{pk} \langle 0 \rangle b_{pk}$, wenn

$(\exists c)(\forall k)(a_{pk} = c, \quad b_{pk} = 0))$;

(11) $a_{pk} \langle p \rangle 0, \quad -a_{pk} \langle p \rangle 0$;

(12) $a_{pk} \langle 0 \rangle \bar{a}_{pk}$;

(13) $a_{2k} \langle 1 \rangle a_k g^k$;

(14) $a_{pk} \langle r_1 \rangle b_{pk} \langle r_2 \rangle c_{pk}, \quad r = \max(r_1, r_2) \Rightarrow a_{pk} \langle r \rangle c_{pk}$
(und ähnlich bei längeren "Ketten");

(15) $a_{pk} \oplus b_{pk} \langle 0 \rangle a_{pk} + b_{pk}$;

(16) $a_{pk} \langle r \rangle b_{pk} \Rightarrow a_{pk} + c_{pk} \langle r \rangle b_{pk} + c_{pk}$;

(17) $a_{pk} \langle r \rangle b_{pk} \Rightarrow a_{pk}\, c_{pk} \langle r + p \rangle b_{pk}\, c_{pk}$;

(18) $a_{pk} \cdot b_{pk} \langle p \rangle a_{pk}\, b_{pk}$;

(19) $\alpha, \beta \in R, \; a_{pk} \langle r \rangle b_{pk}, \quad r < p \Rightarrow \alpha = \beta$

B e w e i s. (9) Die Behauptung ist selbstverständlich.

(10) $(\forall c)(\exists s)(|c - 0| < g^{0k+s}) \Rightarrow c \langle 0 \rangle 0$

(11) Es existiert ein solches s, dass $|a_0| < g^s$, und gemäss Hilfssatz 2 gilt für jedes k die Beziehung $0 \leqq a_{pk} - a_0 g^{pk} < g^{pk}$. Deshalb

$$(\exists s)(\forall k)(|\pm a_{pk} - 0| \leqq |a_{pk} - a_0 g^{pk}| + |a_0| g^{pk} < g^{pk} + g^{s+pk} \leqq 2g^{s+pk} \leqq g^{pk+s+1})$$

(12) Es gilt $(\forall k)(|a_{pk} - \bar{a}_{pk}| \leqq 1 < g^{0k+1})$

(13) $0 \leqq a_{2k} - a_k g^k < g^k \Rightarrow |a_{2k} - a_k g^k| < g^{1k+0}$

(14) Es sei $a_{pk} \langle r_1 \rangle b_{pk} \langle r_2 \rangle c_{pk}, \; r = \max(r_1, r_2)$. Dann existieren solche s_1, s_2, dass für $s = \max(s_1, s_2)$ und jedes k

$$|a_{pk}-b_{pk}| \leqq |a_{pk}-b_{pk}| + |b_{pk}-c_{pk}| < g^{r_1k+s_1} + g^{r_2k+s_2} \leqq$$

$$\leqq 2g^{rk+s} \leqq g^{rk+s+1}$$

gilt. Also $a_{pk} \langle r \rangle c_{pk}$.

(15) Es sei $\alpha+\beta=\bar{\gamma}$, wo γ im Hilfssatz 6 definiert ist. Dann ist $a_{pk} \oplus b_{pk} = \bar{c}_{pk} \langle 0 \rangle c_{pk}$. Nach der Bemerkung, welche auf den Hilfssatz 6 folgt, gilt weiter

$$|c_{pk} - (a_{pk} + b_{pk})| \leqq 1 < g^{0k+1}$$

also $c_{pk} \langle 0 \rangle a_{pk} + b_{pk}$. Nach (14) ist also $a_{pk} \oplus b_{pk} \langle 0 \rangle a_{pk} + b_{pk}$

(16) Die Behauptung folgt aus der Tatsache

$$|(a_{pk} + c_{pk}) - (b_{pk} + c_{pk})| = |a_{pk} - b_{pk}|.$$

(17) Wenn $a_{pk} \langle r \rangle b_{pk}$, dann

$$(\exists s)(\forall k)(|a_{pk} - b_{pk}| < g^{rk+s})$$

Weiter stellen wir wie im Beweis der Beziehung (11) fest, dass

$$(\exists s_1)(\forall k)(|c_{pk}| < g^{pk+s_1+1})$$

Für jedes k ist also

$$|a_{pk}c_{pk} - b_{pk}c_{pk}| = |a_{pk} - b_{pk}|\,|c_{pk}| < g^{(p+r)k+s+s_1+1}$$

(18) Gemäss Def. 3 unterscheiden wir die Fälle 1 - 3. Im Falle 1, d.h für $\alpha, \beta \geqq \underline{0}$, gilt in der Bezeichnung der Hilfssätze 7 und 9 (nur schreiben wir p_1 anstatt p) auf Grund von (8) die Behauptung

$$(\forall k)(|c_{2pk} - a_{pk}b_{pk}| < i_{pk} = 2g^{p_1+pk} + 1 < g^{pk+p_1} + 2$$

d.h. $c_{2pk} \langle p \rangle a_{pk}\, b_{pk}$. Daraus und aus der Beziehung $a_{pk} \cdot b_{pk} = \bar{c}_{2pk} \langle 0 \rangle c_{2pk}$ (siehe die Definition 6 und die Eigenschaft (12)) folgt gemäss (14) die bewiesene Behauptung.

Im Falle 2 ($\alpha, \beta < \underline{0}$) schreiben wir auf Grund von Definitionen 6, 5, 4

$$\alpha\beta = |\alpha||\beta| = (-\alpha)(-\beta) = \{\overline{-a_n - 1}\}\{\overline{-b_n - 1}\}$$

Da $-\alpha, -\beta \geqq \underline{0}$ (siehe Hilfssatz 11), gelten gemäss Hilfssatz 1 und gemäss den Eigenschaften (12) und (17), (10) und (16), (11) und (16) die Beziehungen

$$a_{pk} \cdot b_{pk} = \overline{(-a_{pk}-1)} \cdot \overline{(-b_{pk}-1)} \langle p \rangle \overline{(-a_{pk}-1)} \, \overline{(-b_{pk}-1)} \langle p \rangle$$

$$\langle p \rangle \overline{(-a_{pk}-1)(-b_{pk}-1)} \langle p \rangle (-a_{pk}-1)(-b_{pk}-1) = a_{pk}b_{pk} -$$

$$- a_{pk} - b_{pk} + 1 \langle 0 \rangle a_{pk}b_{pk} - a_{pk} - b_{pk} \langle p \rangle a_{pk}b_{pk} - a_{pk} \langle p \rangle a_{pk}b_{pk}$$

Gemäss (14) erhalten wir $a_{pk} \cdot b_{pk} \langle p \rangle a_{pk}b_{pk}$.

Im Falle 3 erwägen wir nur die Möglichkeit $\alpha \geqq \underline{0}$, $\beta < \underline{0}$. Wenn wir $\alpha(-\beta) = \{d_n\}$ bezeichnen, gilt $-\beta = \{\overline{-b_n - 1}\}$ und weiter

$$d_{2pk} = a_{pk} \cdot \overline{(-b_{pk}-1)} \langle p \rangle a_{pk} \overline{(-b_{pk}-1)} \langle p \rangle a_{pk}(-b_{pk}-1) =$$

$$= -a_{pk}b_{pk} - a_{pk} \langle p \rangle - a_{pk}b_{pk}$$

Daher ist $d_{2pk} \langle p \rangle -a_{pk}b_{pk}$; auf Grund der Gleichheiten

$$\alpha\beta = -|\alpha||\beta| = -(\alpha(-\beta)) = -\{d_n\} = \{\overline{-d_n - 1}\}$$

folgt daraus

$$a_{pk} \cdot b_{pk} = \overline{-d_{2pk} - 1} \langle 0 \rangle -d_{2pk} - 1 \langle 0 \rangle -d_{2pk} \langle p \rangle - (-a_{pk}b_{pk}) = a_{pk}b_{pk}.$$

Es gilt wieder $a_{pk} \cdot b_{pk} \langle p \rangle a_{pk}b_{pk}$.

(19) Es sei $\alpha, \beta \in R$, $a_{pk} \langle r \rangle b_{pk}$, $r < p$. Setzen wir indirekt voraus, dass $\alpha \neq \beta$, d.h. $\alpha > \beta$ oder $\alpha < \beta$. Gemäs Hilfssatz 12 folgt daraus, dass

$$(\exists r_1)(\forall n \geqq r_1)(|a_n - b_n| \geqq g^{n-r_1}),$$

dies ist aber im Widerspruch mit der Tatsache, dass für irgendein s und für alle k $|a_{pk} - b_{pk}| < g^{rk+s}$ gilt. Es genügt nämlich ein solches k zu wählen, dass $pk \geqq r$, $(p - r)\, k \geqq r_1 + s$ gilt, und $n = pk$ zu setzen. Dann

$$|a_{pk}-b_{pk}| = |a_n-b_n| \geqq g^{n-r_1} = g^{pk-r_1} \geqq g^{rk+s} > |a_{pk} - b_{pk}| \, .$$

Satz 2. Die Menge R mit der Anordnung, Summe und Produkt aus den Definitionen 2, 3, 6 ist ein geordnetes Gebiet der Integrität.

Beweis. Die Komutativität der Summe und des Produktes ergeben sich aus der Definition. Für beliebige $\alpha, \beta, \gamma \in R$ schreiben wir weiter $\alpha = \{a_n\}$, $\beta = \{b_n\}$, $\gamma = \{c_n\}$.

Die Assiziativität der Summe: Bezeichnen wir $(\alpha+\beta)+\gamma = \delta = \{d_n\}$, $\alpha + (\beta+\gamma) = \varepsilon = \{e_n\}$. Auf Grund des Hilfssatzes 13 gilt

$$d_k = (a_k \oplus b_k) \oplus c_k \langle 0 \rangle (a_k \oplus b_k) + c_k \langle 0 \rangle (a_k + b_k) + c_k =$$

$$= a_k + (c_k+b_k) \langle 0 \rangle a_k + (b_k + c_k) \langle 0 \rangle a_k \oplus (b_k \oplus c_k) = e_k$$

Deshalb ist $d_{1k} \langle 0 \rangle e_{1k}$, und also $\delta = \varepsilon$ gemäss (19) (weil δ, $\varepsilon \in R$, $r = 0 < 1 = p$).

Die Assiziativität des Produktes: Es sei $(\alpha\beta)\gamma = \delta = \{d_n\}$, $\alpha(\beta\gamma) = \varepsilon = \{e_n\}$. Dann ist

$$d_{4k} = (a_k.b_k) \, . \, c_{2k} \langle 2 \rangle (a_k.b_k)\, c_{2k} \langle 3 \rangle (a_k\, b_k)\, c_{2k} \langle 3 \rangle (a_k b_k) c_k g^k =$$

$$= a_k g^k (b_k c_k) \langle 3 \rangle a_{2k}(b_k c_k) \langle 3 \rangle a_{2k}(b_k . c_k) \langle 2 \rangle a_{2k} . (b_k . c_k) = e_{4k}$$

Deshalb $d_{4k} \langle 3 \rangle e_{4k}$, also $\delta = \varepsilon$.

Distributivität: Es sei $(\alpha+\beta)\gamma = \delta = \{d_n\}$, $\alpha\gamma + \beta\gamma = \varepsilon = \{e_n\}$. Dann

$$d_{2k} = (a_k \oplus b_k).c_k \langle 1 \rangle (a_k \oplus b_k)\, c_k \langle 1 \rangle (a_k + b_k) c_k = a_k c_k +$$

$$+ b_k c_k \langle 1 \rangle a_k . c_k + b_k c_k \langle 1 \rangle a_k . c_k + b_k . c_k \langle 0 \rangle a_k . c_k \oplus b_k . c_k =$$

$$= e_{2k}$$

Daher $d_{2k} \langle 1 \rangle e_{2k}$, mithin $\delta = \varepsilon$.

Das Nullelement ist $\underline{0}$. Gemäss Definition 3 und Hilfssatz 6 (die Bezeichnung belassen wir) genügt es sich vorzustellen, dass wenn $b_n = 0$ $(n = 0,1, \ldots)$, dann gilt sogar für jedes m $a_{n+m} + b_{n+m} = a_{n+m} \geqq a_n g^m$ (siehe Hilfssatz 2), aber für kein m und für kein $i \geqq a_n + 1$ gilt $a_{n+m} \geqq ig^m$. Daher $c_n = a_n$ $(n = 0,1,\ldots)$, $\gamma = \alpha$, $\alpha + \underline{0} = \bar{\gamma} = \bar{\alpha} = \alpha$. Bevor wir die Existenz des additiven Inversen beweisen, müssen wir uns dessen bewust werden, das für jedes $\alpha, \beta \in R_1$ $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ gilt. Tatsächlich

$$\overline{a_k + b_k} \langle 0 \rangle a_k + b_k \langle 0 \rangle \bar{a}_k + b_k \langle 0 \rangle \bar{a}_k + \bar{b}_k$$

Das Element $-\alpha = \bar{\beta}$ aus der Definition 4, wo gemäss Hilfssatz 10 $\alpha + \beta = \underline{0}$ ist, ist ein additives Inverse zum Element $\alpha \in R$, weil $\alpha + \bar{\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} = \overline{\alpha + \beta} = \bar{\underline{0}} = \underline{0}$. Da wir schon bewiesen, dass R mit Rücksicht auf die Operation + eine Abelgruppe bildet, ist das additive Inverse eideutig bestimmt und daraus folgt, dass $-(-\alpha) = \alpha$ (was wir später anwenden werden).

Das Einselement ist $\underline{1} = \{g^n\}$ $(\geqq \underline{0})$. Wenn $\alpha \geqq \underline{0}$, dann $\alpha\underline{1} = \bar{\gamma}$, wo γ im Hilfssatz 9 für $\beta = \{b_n\} = \{g^n\} = \underline{1}$ definiert ist. (Die Bezeichnungen aus dem Hilfssatz 9 werden wir belassen.)
Zum gewählten k und zu der Zahl $i = a_{2k}$ existiert m $(= k)$, für welches

$$a_{k+m} b_{k+m} = a_{2k} b_{2m} = a_{2k} g^{2m} \ (\geqq a_{2k} g^{2m})$$

Dagegen aber gelten für jedes $i \geqq a_{2k} + 1$ gemäss Hilfssatz 2 für jedes m die Beziehungen

$$a_{k+m} b_{k+m} = a_{k+m} g^{k+m} \leqq a_{2k+2m} < (a_{2k} + 1) g^{2m} \leqq ig^{2m}$$

Deshalb $c_{2k} = a_{2k}$ $(k = 0,1,\ldots)$ und gemäss Hilfssatz 8 (Eindeutigkeit) auch $\{c_n\} = \{a_n\}$. Deshalb $\alpha\underline{1} = \alpha$. Im Falle $\alpha < \underline{0}$ gilt zufolge dem Bewiesenen

$$\alpha\underline{1} = -|\alpha||\underline{1}| = -|\alpha|\underline{1} = -|\alpha| = -(-\alpha) = \alpha.$$

Es geht also um ein Gebiet der Integrität, und deshalb werden wir auch weiter die Operation der Subtraktion (welche durch die Gleichheit $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ definiert ist), die Eindeutigkeit des additiven

Inversen (die Beziehung $\alpha - \beta = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta$), die Eigenschaft $\alpha\,\underline{0} = \underline{0}\,\alpha = \underline{0}$ und anderes benutzen.

Beweisen wir, dass $\alpha, \beta > \underline{0} \Rightarrow \alpha + \beta, \alpha\beta > \underline{0}$. Wenn $\alpha, \beta > \underline{0}$, für irgendein m,n gilt dann $a_m > 0$, $b_n > 0$ und zufolge Hilfssatz 3 auch $a_k, b_k > 0$ für $k = \max(m,n)$. Daraus - auf Grund von (6) und (8) (wo gemäss Definition 3 $\bar{c}_{2k} = a_k . b_k$ gilt) - folgt

$$0 < a_k + b_k \leqq a_k \oplus b_k$$

$$0 < a_k b_k \leqq c_{2k} \leqq \bar{c}_{2k} = a_k . b_k$$

und also $\alpha + \beta = \{a_n \oplus b_n\} > \underline{0}, \alpha\beta = \{a_n . b_n\} > \underline{0}$.

Zum Schluss zeigen wir, dass $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > \underline{0}$. Bezeichnen wir $\alpha = \{a_n\}$, $\beta = \{b_n\}$, $\alpha - \beta = \{c_n\}$ $(\alpha, \beta \in R)$. Es sei $\alpha > \beta$. Dann existiert ein solches n, dass $a_n > b_n$, d.h. $a_n - b_n - 1 \geqq 0$. Weiter gilt

$$\{c_n\} = \alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = \{a_n\} + \{\overline{-b_n - 1}\},$$

daraus geht für das erwähnte n laut (6) hervor

$$c_n = a_n \oplus (\overline{-1 - b_n}) \geqq a_n + (\overline{-1 - b_n}) \geqq a_n + (-1 - b_n) \geqq 0,$$

woraus wir gemäss den Hilfssätzen 3 und 11 $c_0 \geqq 0$, $\alpha - \beta \geqq \underline{0}$ erhalten. Die Gleichheit kommt nicht in Betracht, weil für $\alpha - \beta = \underline{0}$ $\alpha = \beta$ gilt, dies aber ein Widerspruch ist. Deshalb $\alpha - \beta > \underline{0}$. Es gelte jetzt nicht $\alpha > \beta$. Im Falle $\alpha = \beta$ ist $\alpha - \beta = \underline{0}$, also ist nicht $\alpha - \beta > \underline{0}$. Im Falle $\beta > \alpha$ gilt zufolge des oben bewiesenen $\beta - \alpha > \underline{0}$. Wenn auch $\alpha - \beta > \underline{0}$ wäre, müsste $\underline{0} = (\alpha - \beta) + (\beta - \alpha) > \underline{0}$ gelten, was nicht möglich ist. Deshalb gilt wieder nicht $\alpha - \beta > \underline{0}$. damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem Satz 2 und dessen Beweis geht hervor, dass in R die Regeln

(20) $\quad -\alpha\beta = (-\alpha)\beta = \alpha(-\beta)$;

(21) $\quad \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$ für $\gamma > \underline{0}$;

(22) $\quad \alpha \leqq \;\Leftrightarrow \alpha\gamma \leqq \beta\gamma$ für $\gamma > \underline{0}$;

(23) $\quad \underline{1} > \underline{0}$;

(24) $\quad \alpha\underline{0} = \underline{0}\alpha = \underline{0}.$

benutzt werden können.

Hilfssatz 14. Es sei $\alpha, \beta, \delta \in R$; $\alpha, \beta \geqq 0$, $\alpha = \{a_n\}$, $\beta = \{b_n\}$, $\delta = \{d_n\}$, wobei ein solches k_0 existiert, dass für alle $k \geqq k_0$ $\; a_k b_k \geqq d_{2k}$ gilt. Dann $\alpha\beta \geqq \delta$. Wenn für alle $k \geqq k_0$ $\; a_k b_k \leqq d_{2k}$ ist, dann gilt $\alpha\beta \leqq \delta$.

Beweis. Schreiben wir $\alpha\beta = \bar{\gamma}$, wo $\gamma = \{c_n\}$, $\bar{\gamma} = \{\bar{c}_n\}$ ist. Wenn $a_k b_k \geqq d_{2k}$ $(k \geqq k_0)$, dann gilt nach der Definition des Symbols $\bar{\alpha}$ und nach (8) $\bar{c}_{2k} \geqq c_{2k} \geqq a_k b_k \geqq d_{2k}$ für $k \geqq k_0$, sowie auch $\bar{c}_{2k+1} \geqq d_{2k+1}$ für $k \geqq k_0$, bezw. $\bar{c}_n \geqq d_n$ für $n < 2k_0$, was man sich zufolge Hilfssatz 3 indirekt beglaubigen kann. Im Ganzen also $(\forall n)(\bar{c}_n \geqq d_n)$, d.h. $\alpha\beta = \{\bar{c}_n\} \geqq \{d_n\} = \delta$ gemäss (3).

Es sei jetzt $a_k b_k \leqq d_{2k}$ $(k \geqq k_0)$. Setzen wir indirekt voraus, dass $\alpha\beta = \bar{\gamma} > \delta$ ist. Dann existiert zufolge Hilfssatz 12 ein solches r, dass für $n > r$

$$c_n + 1 \geqq \bar{c}_n \geqq d_n + g^{n-r} \geqq d_n + 2, \qquad c_n > d_n$$

gilt und also $\gamma = \{c_n\} > \{d_n\} = \delta$. Erwägen wir jetzt die Konstante p und die Zahlen i_k $(k = 0,1, \ldots)$ aus dem Hilfssatz 7. Auf Grund des Hilfssatzes 12, der Voraussetzung $d_{2k} \geqq a_k b_k$, der Beziehung $g^{2k-r} > 2g^{p+k} + 1$ für $k \geqq r+p+2$, des Hilfssatzes 7 und der Beziehung (8) gelten für irgendein r und ein genügend grosses k die Beziehungen $c_{2k} \geqq d_{2k} + g^{2k-r} \geqq a_k b_k + g^{2k-r} > a_k b_k + 2g^{p+k}+1 = a_k b_k + i_k > c_{2k}$, wass ein Widerspruch ist.

Hilfssatz 15. Es sei $\delta = \{d_n\} \in R$, $\delta > \underline{0}$, d.h. $d_p > 0$ für irgendein p. Bei festgewähltem $s \geqq p$ existiert dann ein solches $\beta = \{b_n\} \in R$, dass $b_k = d_k - g^{k-s}$ für alle $k \geqq s$ ist.

Beweis. Den kleinsten der Indexe r, für welchen

(20) $\quad r \leqq k < s \Rightarrow d_{k+1} - d_k g = 0$

gilt, bezeichnen wir r_0 und setzen

$$b_k = d_k \quad \text{für} \quad k < r_0,$$

$$b_k = d_k - 1 \quad \text{für} \quad r_0 \leqq k < s,$$

$$b_k = d_k - g^{k-s} \quad \text{für} \quad k \geqq s.$$

Dann gilt

$$b_{k+1} - b_k g = d_{k+1} - d_k g \quad \text{für} \quad k < r_0 - 1,$$

$$b_{k+1} - b_k g = d_{k+1} - 1 - d_k g \quad \text{für} \quad k = r_0 - 1,$$

$$b_{k+1} - b_k g = (d_{k+1} - 1)-(d_k - 1)\, g = g - 1 \quad \text{für} \quad r \leqq k < s$$

(siehe (20)),

$$b_{k+1} - b_k g = (d_{k+1}-g^{k+1-s})-(d_k-g^{k-s})g = d_{k+1}-d_k g \quad \text{für} \quad k \geqq s.$$

Die Bedingung (1) ist für $\{b_n\}$ in allen Fällen ausser der Möglichkeit $k = r_0-1$ evident erfüllt. Ersichtlich ist jedoch auch dann $b_{k+1} - b_k g \leqq g - 1$, und auf der anderen Seite $b_{k+1} - b_k g \geqq -1$. Eine Gleichheit kann hier nicht entstehen, weil dann $d_{k+1} - d_k g = d_{r_0} - d_{r_0-1} = 0$ gelten müsste, was mit der Definition des Indexes r_0 im Wiederspruch ist. Aus dem Falle $k \geqq s$ ist ersichtlich, dass $\{b_n\}$ auch die Bedingung (2) erfüllt. Es gilt also $\beta \in R$.

<u>H i l f s s a t z 16.</u> (Hilfssatz über das inverse Element.) Zu jedem $\alpha \in R$, $\alpha \neq \underline{0}$, existiert $\delta \in R$, für welches $\alpha\delta = \underline{1}$.

<u>B e w e i s.</u> Es genügt vorauszusetzen, dass $\alpha > \underline{0}$. Wenn die Behauptung für positive Entwicklungen gilt, dann ist gemäss Hilfssatz 11 $-\alpha \geqq \underline{0}$ für $\alpha < \underline{0}$ und gemäss Satz 2 $-\alpha \neq \underline{0}$; deshalb $(\exists\, \delta_1 \in R)(\, (-\alpha)\,\delta_1 = \underline{1})$, mithin gemäss (20) $\alpha(-\delta_1) = \underline{1}$.

Beweisen wir, dass $\delta = \inf M$ existiert, wo $M = \{\beta \in R \mid \alpha\beta \geqq \underline{1}\}$, und dass $\alpha\delta = \underline{1}$ ist. Die Menge M ist von unten beschränkt, da $\beta \geqq \underline{0}$ für jedes $\beta \in R$ ist. Tatsächlich, aus den Voraussetzungen $\alpha > \underline{0}$, $\beta \in M$, $\beta < \underline{0}$ ergeben sich gemäss (21), (24), (23) die Beziehungen $\underline{0} > \alpha\beta \geqq \underline{1} > \underline{0}$, was ein Widerspruch ist. Zeigen wir, dass $M \neq \emptyset$ ist. Da $\alpha > \underline{0}$, existiert ein k, für welches $a_k > 0$, $a_k \geqq 1$. Erwägen wir die Entwicklung $\beta = \underline{b} = \{bg^n\} = \{b_n\}$, wo

$b = g^k + 1$ ist. Dann gelten bei Bezeichnungen aus dem Hilfssatz 9 und nach der auf ihn folgenden Bemerkung für $\gamma = \{c_n\}$, $\alpha\beta = \bar{\gamma} = \{\bar{c}_n\}$ die Ungleichheiten

$$\bar{c}_{2k} \geqq c_{2k} \geqq a_k b_k \geqq b_k = bg^k = (g^k + 1)g^k > g^{2k},$$

d.h. dass zufolge Definition 2 $\alpha\beta > \{g^n\} = \underline{1}$ ist. Dann ist M nichtleer und $\delta = \inf M$ existiert zufolge von Satz 1, wobei $\delta \in R$, $\delta \geqq \underline{0}$, ($\underline{0}$ ist eine untere Schranke der Menge M).

Setzen wir indirekt voraus, dass $\alpha\delta \neq \underline{1}$ ist, setzen wir $\delta = \{d_n\}$ und bezeichnen wir $\alpha\delta = \bar{\gamma} = \{\bar{c}_n\}$, $\gamma = \{c_n\}$. Unterscheiden wir die Fälle

a) $\alpha\delta > \underline{1}$;

b) $\alpha\delta < \underline{1}$.

Im Falle a) ist ersichtlich $\delta > \underline{0}$ (weil $\delta \geqq \underline{0}$, wobei für $\delta = \underline{0}$ $\alpha\delta = \underline{0} < \underline{1}$ gilt, was ein Widerspruch ist). Konstruieren wir $\beta \in R$, für welches $\beta < \delta$, $\alpha\beta \geqq \underline{1}$ ist. Nach dem Hilfssatz 12 folgt aus der Voraussetzung $\alpha\delta = \bar{\gamma} > \underline{1}$, d.h. $\{\bar{c}_n\} > \{g^n\}$, dass ein r existiert, für welches

$$(\forall k \geqq r)\ (\bar{c}_{2k} \geqq g^{2k} + g^{2k-r})$$

Daraus in den Bezeichnungen der Hilfssätze 7 und 9, wo wir anstatt b d schreiben, erhalten wir auf Grund von (8) für alle $k \geqq r$ die Abschätzungen

$$g^{2k} + g^{2k-r} \leqq \bar{c}_{2k} \leqq c_{2k} + 1 < a_k d_k + i_k + 1 =$$

$$= a_k d_k + 2\,(g^{p+k} + 1) \leqq a_k d_k + 4\,g^{p+k}$$

Es gilt also $a_k d_k \geqq g^{2k} + g^{2k-r} - 4g^{p+k}$ und es ist leicht festzustellen*), dass solche k_0, r_0 existieren, dass für alle $k \geqq k_0$ $g^{2k-r} - 4g^{p+k} \geqq g^{2k-r_0}$ ist, d.h.

---

*) Für $k \geqq k_0 = r+p+3$ gilt $g^{2k-r} - 4g^{p+k} \geqq g^{2k-r} - g^{p+k+2} =$

$= g^{p+k+2}(g^{k-r-p-2} - 1) \geqq g^{p+k+2}g^{k-r-p-3} = g^{2k-r_0}$, wo $r_0 = r+1$ ist.

(25) $(\forall k \geqq k_0)(a_k d_k \geqq g^{2k} + g^{2k-r_0})$.

Wählen wir jetzt ein beliebiges s $(\geqq r_0)$, für welches $a_0 < g^{s-r_0}$ ist. Dann

(26) $(\forall k)(a_k < g^{s-r_0+k})$.

(Induktionsschritt: $a_k < g^{s-r_0+k} \Rightarrow a_{k+1} \leqq a_k g + g - 1 \leqq$ $\leqq g^{s-r_0+k}-1)g+g-1 < g^{s-r_0+k+1}$.) Zu der Entwicklung $\delta = \{d_n\}$ bestimmen wir $\beta = \{b_n\}$ gemäss Hilfssatz 15 (die Voraussetzungen $\delta \in R$, $\delta > \underline{0}$ sind erfüllt), wobei wir die Zahl s so wählen dass nicht nur $a_0 < g^{s-r_0}$, sondern auch $s \geqq p$ gelte, wo $d_p > 0$ ist, (ersichtlich existieren solche p,s). Dann ist $\beta < \delta$ und für alle $k \geqq s$ gilt $b_k = d_k - g^{k-s}$; gemäss (25), (26) erhalten wir daraus für alle $k \geqq k_1 = \max(k_0, s)$

$$a_k b_k = a_k d_k - a_k g^{k-s} \geqq g^{2k} + g^{2k-r_0} - g^{s-r_0+k} g^{k-s} = g^{2k}.$$

Zufolge Hilfssatz 14 bedeutet das $\alpha\beta \geqq \underline{1}$ und also $\beta \in M$, was mit der Beziehung $\beta < \delta = \inf M$ im Widerspruch ist.

Im Falle b) konstruieren wir $\varepsilon \in R$, für welches $\alpha\varepsilon \leqq \underline{1}$, $\varepsilon > \delta$ ist. Gemäss Hilfssatz 12 folgt aus der Voraussetzung $\alpha\delta = \bar{\gamma} < \underline{1}$ die Existenz eines solchen r, dass für jedes $k \geqq r$ (siehe (8))

$$g^{2k} \geqq \bar{c}_{2k} + g^{2k-r} \geqq c_k + g^{2k-r}$$

(27) $g^{2k} \geqq a_k d_k + g^{2k-r}$

Wählen wir jetzt ein solches $k_0 \geqq r - 1$, dass $a_0 < g^{k_0+1-r}$, d.h. (ähnlich wie im Falle a))

(28) $(\forall k)(a_k < g^{k_0+1-r+k})$,

und setzen wir $\varepsilon = \{e_n\}$, wo $e_k = d_k$ $(k \leqq k_0)$, bezw. $e_k = d_k + g^{k-k_0-1}$ $(k \geqq k_0 + 1)$. Nach Hilfssatz 4 ist $\varepsilon \in R$. Für alle $k \geqq k_1 = \max(r, k_0 + 1)$ gilt weiter auf Grund von (27), (28)

$$a_k e_k = a_k d_k + a_k g^{k-k_0-1} \leqq a_k d_k + g^{2k-r} \leqq g^{2k}$$

was gemäss Hilfssatz 14 $\alpha\varepsilon \leqq \underline{1}$. Für jedes $\beta \in M$ gilt aber $\underline{1} \leqq \alpha\beta$, also $\alpha\varepsilon \leqq \alpha\beta$, woraus $\varepsilon \leqq \beta$. Deshalb ist ε eine untere Schranke der Menge M, was mit der ersichtlichen Beziehung $\varepsilon > \delta = \inf M$ im Widerspruch ist. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Das inverse Element zum Element $\alpha \neq \underline{0}$ $(\alpha \in R)$ werden wir mit α^{-1} bezeichnen.

Unter einem geordnetem Körper reeller Zahlen werden wir jeden Archimedisch geordneten Körper verstehen (siehe [1], Seite 46, Definition 5.35).

S a t z 3. Die Menge R mit Anordnung, Summe und Produkt aus den Definitionen 2, 3, 6 ist ein geordneter Körper reeller Zahlen.

B e w e i s. Wenn wir die Behauptungen der Sätze 1, 2 und des Hilfssatzes 16 erwägen, genügt es zu beweisen, dass die Anordnung Archimedisch ist. Stellen wir uns vor, dass aus Definition 2 und aus der Bemerkung nach Hilfsatz 6 für $a + b = c$ $(a,b,c \in Z)$ die Beziehung $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ folgt (d.h. $\{ag^n\} + \{bg^n\} = \{(a+b)g^n\}$). Daraus können wir durch Induktion leicht ableiten, dass für jede natürliche Zahl c die Gleichheit $\underline{c} = \underline{1} + \ldots + \underline{1}$ (c Glieder) gilt. Nehmen wir jezt beliebige $\alpha, \beta \in R$, wo $\beta > \underline{0}$. Wenn $\alpha\beta^{-1} = \{c_n\}$ $(\in R)$ ist, dann konstruieren wir zu der natürlichen Zahl $c = \max(1, c_0+1)$ die Entwicklung $\{cg^n\} = \underline{c}$. Dann gilt $\alpha\beta^{-1} = \{c_n\} < \{cg^n\} = \underline{c} = \underline{1} + \ldots + \underline{1}$ und nach (21) gilt auch $\alpha < (\underline{1} + \ldots + \underline{1})\beta = \beta + \ldots + \beta$ (in allen Summen je c Glieder). Damit ist der Satz bewiesen.

B e m e r k u n g. Unter einen geordneten Körper von rationalen Zahlen werden wir einen minimalen geordneten Körper verstehen, in welchen man ein geordnetes Integritätsgebiet von ganzen Zahlen Z einsenken kann. Es ist leicht zu beweisen, dass die Menge $R_Q = \{\alpha \in R \mid (\exists \beta, \gamma \in R_Z)(\alpha = \beta\gamma^{-1})\}$ mit Anordnung, Summe und Produkt aus den Definitionen 2, 3, 6 ein geordneter Körper von rationalen Zahlen ist.

SCHRIFTENVERZEICHNISS

[1] E. HEWITT - K. STROMBERG, Real and Abstract Analysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1965

[2] A. N. KOLMOGOROV, K základům theorie reálných čísel, Čas. pro pěst. mat. 76 (1951), str. 155-157

Adresse des Autors: SVŠ Prievidza, ČSSR

Eingegangen am 24. X. 1970

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. - MATHEMATICA XXVI - 1972)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXVI - 1972

ON THE INTEGRATION OF FUNCTIONS WITH VALUES IN COMPLETE VECTOR LATTICES

RASTISLAV POTOCKÝ, Bratislava

The purpose of this paper is to show that the concept of integral on a measure space can be constructed for the functions with values in a complete vector lattice, too. We shall also prove some convergence theorems for such functions. (For definition of complete vector lattice and for the other ones used in this paper, see [1], [2], [3]).

Our way is similar to that used in the case of real functions. At first we shall define the integral on a simple family of functions $\mathcal{T}$, for which the following conditions are satisfied:

$$\text{if } f_1, f_2 \in \mathcal{T} \text{ then } \quad \begin{array}{l} \alpha f_1 + \beta f_2 \in \mathcal{T} \\ f_1 \vee f_2 \in \mathcal{T} \\ f_1 \wedge f_2 \in \mathcal{T} . \end{array}$$

The integral will be defined to be a non-negative linear operator continuous under monotone limits, i.e. such that:

a) $f \geq 0$ implies $\int f \, d\mu \geq 0$

b) $\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu$

c) $f_n \downarrow 0$ implies $\int f_n \, d\mu \downarrow 0$.

Then the method of extension will be used.

Remark. Throughout this paper we shall assume that the family of functions discussed is partially ordered in the usual manner.

Definition 1. Let (Ω, S, μ) be a measure space, X any complete vector lattice. A function $f: \Omega \to X$ is integrable simple function if $f = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{E_i}$, where I_{E_i} are indicators of mutually disjoint sets E_i, $E_i \in S$, $\mu(E_i) < \infty$, $x_i \in X$, $i=1,\dots,n$. The integral of f is defined by

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu (E_i) .$$

It is clear that this definition is justified.

L e m m a 1. If X is a complete vector lattice of real functions defined on a set T, then integral as just defined, fulfils the conditions a), b) and c).

P r o o f. a) and b) are trivial. The only problems is how to show that $f_n \downarrow 0$ implies $\int f_n \, d\mu \downarrow 0$.

Let ε be an arbitrary positive number. For every t and for every natural n we shall consider the set

$$G_n^t = \{ \omega \mid f_n^t \;\; f_n^t (\omega) \geqslant \varepsilon \} ,$$

where $f_n^t(\omega)$ is the value of $f_n(\omega)$ at t, i.e. a real number, and $f_n(\omega)$ is the value of f_n at ω , i.e. a real function on T. Since the order convergence in the above space is equivalent to the point convergence, we have $f_n^t(\omega) \downarrow 0$ for every t. Hence $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^t = \emptyset$ for every t. Since $G_n^t \supset G_{n+1}^t$ for every t and $n = 1,2,\dots$, and since $G_1^t \subset \{ \omega \mid f_1^t (\omega) > 0 \}$ implies $\mu(G^t{}_1) < \infty$, we have $\mu(G_n^t) \downarrow 0$ for every t. If we write $M^t = \sup_{\omega} f_1^t(\omega)$, $E = \bigcup_{i=1}^{\ell} E_i$,

$f_1 = \sum_{i=1}^{\ell} x_i I_{E_i}$, then we have

$$0 \leqslant \int f_n^t \, d\mu = \int f_n^t \, I_{G_n^t} \, d\mu + \int f_n^t \, I_{E-G_n^t} \, d\mu \leqslant$$

$$\int f_1^t \, I_{G_n^t} \, d\mu + \int \varepsilon \, I_E \, d\mu \leqslant M^t \mu(G_n^t) + \varepsilon \mu(E),$$

for every t. But this implies $\lim_n \int f_n^t \, d\mu = 0$ for every t and hence $\int f_n \, d\mu \downarrow 0$, completing the proof.

L e m m a 2. Let Ω be a topological space, S class of all Borel sets of Ω, μ a regular Borel measure on S and let X be any regular complete vector lattice. (For definitions see [4].) Then the integral defined on the family of all integrable simple functions in the above manner has the properties sub a), b) and c).

P r o o f. Properties a) and b) are obvious. It remains to show c). Let ε be an arbitrary positive number. Let E be a set in S such that $f_1 \equiv 0$ on E^c. Since, in the regular complete vector lattice, order - convergence and relative uniform convergence are equivalent, for every $\omega \in E$ there exist a natural number n_ω and an element $g_\omega \in X$ such that $f_n(\omega) < \varepsilon g_\omega$. This inequality holds on a set $E_\omega \in S$. The regularity of μ implies that, for every E_ω, there exists a set $K_\omega \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ means the class of all open Borel sets), $E_\omega \subset K_\omega$ such that $\mu(K_\omega - E_\omega) \leqslant \varepsilon$. Furthermore from the properties of the regular measure follows the existence of a compact subset C of E such that $\mu(E-C) \leqslant \varepsilon$. Since the class $\mathcal{K}$ of all K_ω $(\omega \in E)$ is an open covering of C, there exists a finite subclass $\{K_{\omega_i}\}_{i=1}^k$ of $\mathcal{K}$ such that

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{k} K_{\omega_i},$$

thus there exist a natural number N and an element $g \in X$ such that, for every $n \geqslant N$ and for every ω in $\bigcup_{i=1}^{k} E_{\omega_i}$,

$$f_n(\omega) < \varepsilon g$$

If we denote $\sup_\omega f_1(\omega)$ by M, we obtain, for every $n \geqslant N$,

$$\int f_n \, d\mu < \varepsilon\left((k+1)\, M + \mu(C)\, g\right)$$

But it means that the sequence $\int f_n \, d\mu$ converges relatively uniformly to 0 and the desired result follows from the equivalence of order and relative uniform convergences.

The next procedure is very well known. Let $\mathcal{U}$ be the family of limits of non-decreasing sequences of non-negative functions in $\mathcal{T}$ such that sequences of their integrals are bounded. The integral of $f \in \mathcal{U}$ is defined by $\int f \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu$, where $\mathcal{T} \ni f_n \uparrow f$.

The definition is justified, for if the nondecreasing sequences f_n and g_n in $\mathcal{T}$ are such that $\lim_n f_n \leqslant \lim_n g_n$, then $\lim_n \int f_n \, d\mu \leqslant \lim_n \int g_n \, d\mu$.

<u>Remark.</u> Since values of the above function f need not belong to X, we add to X symbols ∞ and $-\infty$. Relations among them and elements of X are analogical to those which hold for the extended real line. If a set $E \subset X$ is not bounded above (below), we set $\sup E = \infty$ ($\inf E = -\infty$). From now on the set $X \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ is denoted by $\bar{X}$.

A function $f : \Omega \to \bar{X}$ is called to be integrable, if there exist functions f_1 and f_2 in $\mathcal{U}$ such that $f(\omega) = f_1(\omega) - f_2(\omega)$ for all ω for which the expression $f_1(\omega) - f_2(\omega)$ is defined. (From now on all the relations among functions are understood in this sense.) The integral is defined by setting $\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 \, d\mu$. The family of all integrable functions is denoted by $\mathcal{V}$.

This definition is justified.

It is easy to show that the integral has the following properties:

1. $f, g \in \mathcal{V}$, $k = \alpha f + \beta g$ (in the above sense) implies $k \in \mathcal{V}$, $\int k \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu$
2. $f_1, f_2 \in \mathcal{V}$, $f_1 \leqslant f_2$ implies $\int f_1 \, d\mu \leqslant \int f_2 \, d\mu$
3. If a function f is integrable, then so also are its absolute value and its positive and negative parts.

To prove 3.), we observe that if f_1 and f_2 are in $\mathcal{U}$, so also are $f_1 \vee f_2$ and $f_1 \wedge f_2$. This fact is an immediate consequence of the following relations:

$$f_n^1 \uparrow f_1, \quad f_n^2 \uparrow f_2 \quad \text{imply} \quad f_n^1 \vee f_n^2 \uparrow f_1 \vee f_2,$$

$$f_n^1 \wedge f_n^2 \uparrow f_1 \wedge f_2 ,$$

$$f_n^1 \vee f_n^2 \leqslant (f_n^1 \vee f_n^2) + (f_n^1 \wedge f_n^2) = f_n^1 + f_n^2 .$$

From the relations
$$|f| = (f_1 \vee f_2) - (f_1 \wedge f_2)$$
$$f^+ = (f_1 \vee f_2) - f_2$$
$$f^- = f_2 - (f_1 \wedge f_2)$$

it follows that the above functions belong to $\mathcal{V}$.

II.

In this section we shall investigate sequences of integrable functions. We assume in what follows that X is a regular complete vector lattice.

<u>Theorem 1.</u> If f_n is a non-decreasing sequence of integrable functions for which $\lim \int f_n \, d\mu < \infty$, then the function $\lim f_n$ is integrable and

$$\int \lim f_n \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu .$$

<u>Proof.</u> a) If f_n are functions in $\mathcal{U}$, there exist non-decreasing sequences g_n^m of non-negative integrable simple functions such that $g_n^m \uparrow f_n (m \longrightarrow \infty)$ for every n. We write $h_m = \sup_{k \leqslant m} g_k^m$; h_m are non-negative integrable simple functions. Since the sequence h_m is non-decreasing, $\lim \int h_m \, d\mu < \infty$ and since for every natural n and m there exists a natural number k such that $g_n^m \leqslant h_k$, we have $\lim_n f_n = \lim_n \lim_m g_n^m \leqslant \lim_n h_n \leqslant \lim_n f_n$. But it means that $\lim f_n$ belongs to $\mathcal{U}$ and

$$\int \lim f_n \, d\mu = \lim \int h_n \, d\mu \leq \lim \int f_n \, d\mu \leq \int \lim f_n \, d\mu ,$$

and hence $\int \lim f_n \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$.

b) In the general case we consider functions k_n defined as follows:

$$k_1(\omega) = f_1(\omega)$$

$$k_n(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega) - f_{n-1}(\omega), & f_{n-1}(\omega) \in X,\ f_n(\omega) \in X \\ \infty & ,\ f_{n-1}(\omega) = f_n(\omega) = \infty \\ 0 & ,\ f_{n-1}(\omega) = f_n(\omega) = -\infty \end{cases}$$

$n = 2, 3, \ldots ;$

k_n ($n = 2, 3, \ldots$) are non-negative integrable functions. Moreover $f_1(\omega) + \sum_{n=2}^{\infty} k_n(\omega) = \lim_n f_n(\omega)$ for every ω for which the left side is defined. Since $\lim_n \int f_n \, d\mu < \infty$ it follows that the series $\sum_{n=2}^{\infty} \int k_n \, d\mu$ converges.

We write $k_n = g_n - h_n$, g_n, h_n are functions in $\mathcal{U}$, $n = 2,3,\ldots$ Since X is a regular vector lattice, for every n there exists a natural number k_{n_o} such that $\int (h_n - h_n^{k_{n_o}}) \, d\mu = \int h_n \, d\mu - \int h_n^{k_{n_o}} \, d\mu \leq 1/2^n \, r$, $r \in X_+$, where h_n^k ($k \to \infty$) is a sequence of functions in $\mathcal{T}$, which converges to the function h_n. It is obvious that, for every n, the function $h_n - h_n^{k_{n_o}}$ belongs to $\mathcal{U}$. To prove that the same is true for the function $g_n - h_n^{k_{n_o}}$, we observe that $g_n(\omega) \geq h_n(\omega)$ for every ω , and hence $g_n - h_n^{k_{n_o}} \geq 0$. Since $(g_n^k - h_n^{k_{n_o}}) \vee 0$ are non-negative integrable simple functions, since $\lim_k \int (g_n^k - h_n^{k_{n_0}}) \vee 0 \, d\mu < \infty$ and since $(g_n^k - h_n^{k_{n_0}}) \vee 0 \uparrow (g_n - h^{k_{n_0}})$, it follows that $g_n - h_n^{k_{n_0}}$ also belongs to $\mathcal{U}$.

Since we have $\sum_{n=2}^{\infty} \int g_n \, d\mu = \sum_{n=2}^{\infty} \int k_n \, d\mu + \sum_{n=2}^{\infty} \int h_n \, d\mu$

consideration of functions $g_n - h_n^{k_{n_0}}$ and $h_n - h_n^{k_{n_0}}$ instead of g_n and h_n respectively, shows that the series

$\sum_{n=2}^{\infty} \int g_n \, d\mu$ converges.

Since the sequence s_n of partial sums of the series $\sum_{n=2}^{\infty} g_n$ is non-decreasing, and since $\lim \int s_n \, d\mu < \infty$, it follows from the first part of this proof that $\sum_{n=2}^{\infty} g_n$ belongs to $\mathcal{U}$. For the series $\sum_{n=2}^{\infty} h_n$ an analogical consideration is true. It follows that $\sum_{n=2}^{\infty} k_n = \sum_{n=2}^{\infty} g_n - \sum_{n=2}^{\infty} h_n$ (the equality holds in the above sense) is integrable, and hence that $\lim f_n$ is integrable. Moreover we have

$$\int \sum_{n=2}^{\infty} k_n \, d\mu = \int \sum_{n=2}^{\infty} g_n \, d\mu - \int \sum_{n=2}^{\infty} h_n \, d\mu =$$

$$= \lim_n \sum_{i=2}^{n} \int g_i \, d\mu - \lim_n \sum_{i=2}^{n} \int h_i \, d\mu =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\int g_n \, d\mu - \int h_n \, d\mu \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \int k_n \, d\mu$$

and hence

$$\int \lim_n f_n \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int \sum_{n=2}^{\infty} k_n \, d\mu =$$

$$= \int f_1 \, d\mu + \sum_{n=2}^{\infty} \int k_n \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu$$

Theorem 2. If f_n is a sequence of integrable functions which converges to a function f, and if g is an integrable function such that $|f_n| \leq g$ for every n, then f is integrable and

$$\int f \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu$$

Proof. Since the proof of theorem is similar to that used in the case of real functions, it will be omitted.

Theorem 3. Let g and h be integrable functions and let f_n be a sequence of integrable functions such that $f_n \geqslant g$ resp. $f_n \leq h$. Then, if $\liminf \int f_n \, d\mu < \infty$ the functions $\liminf f_n$ is integrable and

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$$

resp. if $\limsup \int f_n \, d\mu > -\infty$ the function $\limsup f_n$ is integrable and $\int \limsup f_n \, d\mu \geqslant \limsup \int f_n \, d\mu$.

Proof. The statement of this theorem is very well known in the case of real functions. Its proof applies to our more general case also.

R E F E R E N C E S

[1] BIRKHOFF G., Lattice Theory, New York 1948.
[2] VULICH B. Z., Vvedenie v teoriju poluuporiadočennych prostranstv, Moskva 1961.
[3] KANTOROVIČ L. V., VULICH B. Z., PINSKER A. G., Funkcionaľnyj analiz v poluuporiadočennych prostranstvach, Moskva 1950.
[4] HALMOS P. R., Measure Theory, New York 1966.

Author's address: Katedra matematickej štatistiky PFUK, Bratislava
Šmeralova 2/b

Received: February 16, 1971

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. - MATHEMATICA XXVI - 1972)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXVI - 1972

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DER GLEICHUNG

JÁN OHRISKA, KOŠICE

In dieser Arbeit werden wir uns mit der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit verspäteten Argument befassen, welche die Form

$$(1) \qquad u''(t) + a(t)u(t) + b(t)u(\rho(t)) = 0$$

hat, wo die Funktionen $a(t)$, $b(t)$, $\rho(t)$ ($\leq t$) im Intervall $\langle t_0, T\rangle$ definiert und stetig sind. Die homogene Anfangsaufgabe für die Differentialgleichung (1) ist folgend formuliert: Wir suchen im Intervall $\langle t_0, T\rangle$ die Lösung $u(t)$ der Differentialgleichung (1), welche die Anfangsbedingungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} &u(t_0) = u_0, \qquad u'(t_0 + 0) = u_0' \\ &u(\rho(t)) = u_0\,\varphi(\rho(t)), \quad \text{wenn} \quad \rho(t) < t_0 \end{aligned}$$

erfüllt, wo $\varphi(t)$ eine auf der Anfangsmenge $E_{t_0} = \{z : z = \rho(t) < t_0, t \geq t_0\} \cup \{t_0\}$ definierte und stetige Anfangsfunktion ist, wobei $\varphi(t_0) = 1$; u_0, u_0' beliebige reale Zahlen sind. Ferner werden wir unter Lösung der Differentialgleichung (1) immer die Lösung der betreffenden festen Anfangsfunktion $\varphi(t)$ verstehen.

Wir führen zuerst einige Hilfssätze an, welche wir im weiteren gebrauchen werden.

<u>Hilfssatz 1.</u> Es seien $u(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t) > 0$ im Intervall $\langle t_0, T\rangle$; definierte und stetige Funktionen. Wenn für jedes $t \in \langle t_0, T\rangle$ die Ungleichheit

$$u(t) \leqq f_1(t) + \int_{t_0}^{t} f_2(t_1)u(t_1)dt_1$$

gilt, dann gilt für jedes $t \in \langle t_0, T\rangle$ auch die Ungleichheit

$$u(t) \leqq f_1(t) + \int_{t_0}^{t} f_1(t_1)f_2(t_1)\exp\left[\int_{t_1}^{t} f_2(t_2)dt_2\right] dt_1 .$$

F o l g e r u n g. Wenn $f_1(t)$ eine Konstante ist bezeichnen wir sie mit c, dann folgt aus der Ungleichheit

$$u(t) \leqq c + \int_{t_0}^{t} f_2(t_1)u(t_1)dt_1$$

die Ungleichheit

$$u(t) \leqq c \exp\left[\int_{t_0}^{t} f_2(t_1)dt_1\right]$$

B e m e r k u n g. Der Hilfssatz 1 ist zusammen mit der Folgerung in [2] angeführt und bewiesen.

Die folgenden vier Hilfssätze stellen die Verallgemeinerung des Hilfssatzes 1 vor.

H i l f s s a t z 2. Es seien $u(t)$, $f_1(t)$ $f_2(t) \geqq 0$, $f_3(t) \geqq 0$ am Intervall $\langle t_0, T\rangle$ definierte und stetige Funktionen. Wenn für jedes $t \in \langle t_0, T\rangle$ die Ungleichheit

$$u(t) \leqq f_1(t) + f_2(t) \int_{t_0}^{t} f_3(t_1)u(t_1)dt_1$$

gilt, dann gilt für jedes $t \in \langle t_0, T\rangle$ auch die Ungleichheit

$$u(t) \leqq f_1(t) + f_2(t) \int_{t_0}^{t} f_1(t_1)f_3(t_1)\exp\left[\int_{t_1}^{t} f_2(t_2)f_3(t_2)dt_2\right]dt_1$$

B e w e i s. Setzen wir

$$R(t) = \int_{t_0}^{t} f_3(t_1)u(t_1)dt_1$$

Dann haben wir

$$R'(t) = f_3(t)u(t) \leqq f_1(t)f_3(t) + f_2(t)f_3(t)R(t)$$

Erwägen wir die Gleichung $z'(t) = f_1(t)f_3(t) + f_2(t)f_3(t)z(t)$. Diese Gleichung hat im Intervall $\langle t_0,T\rangle$ eine einzige Lösung

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} f_1(t_1)f_3(t_1)\exp\left[\int_{t_1}^{t} f_2(t_2)f_3(t_2)\,dt_2\right]dt_1$$

welche die Anfangsbedingung $z(t_0) = 0$ erfüllt. Auf Grund des Hilfssatzes I.4 in [2] haben wir, dass $R(t) \leqq z(t)$ im Intervall ist. Dann ist

$$u(t) \leqq f_1(t) + f_2(t)R(t) \leq f_1(t) + f_2(t)z(t) =$$

$$= f_1(t) + f_2(t)\int_{t_0}^{t} f_1(t_1)f_3(t_1)\exp\left[\int_{t_0}^{t} f_2(t_2)f_3(t_2)dt_2\right]dt_1$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

H i l f s s a t z 3. Es seien $\rho(t) \leqq t$, $\rho'(t) > 0$, $u(t) \geqq 0$, $f_1(t) \geqq 0$, $f_2(t) \geqq 0$ stetige Funktionen am Intervall $\langle t_0,T\rangle$; $f_3(t) \geqq 0$ ist eine stetige Funktion am Intervall $\langle t_0, \rho_{-1}(T)\rangle$ ($\rho_{-1}(t)$ ist eine zu der Funktion $\rho(t)$ inverse Funktion).

Es sei $\varphi(t) \geqq 0$ eine stetige Funktion auf der Menge $E_{t_0} = \langle \rho(t_0), t_0\rangle$, $u(\rho(t)) = u_0\,\varphi(\rho(t))$ wenn $\rho(t) < t_0$, wo u_0 eine nichtnegative Konstante ist. Dann gilt: wenn für jedes $t \in \langle t_0,T\rangle$ die Ungleichheit

$$(3) \qquad u(t) \leqq f_1(t) + f_2(t)\int_{t_0}^{t} f_3(t_1)u(\rho(t_1))dt_1$$

gilt, dann gilt für jedes $t \in \langle t_o, T\rangle$ auch die Ungleichheit

$$u(t) \leqq f_1(t)+u_o f_2(t) \int_{\varrho(t_o)}^{t_o} f_3(\varrho_{-1}(t_1))\varrho'_{-1}(t_1)\,\varphi(t_1)dt_1 +$$

$$+ f_2(t)\int_{t_o}^{t}\Big[f_1(t_1)+u_o f_2(t_1) \int_{\varrho(t_o)}^{t_o} f_3(\varrho_{-1}(x))\varrho'_{-1}(x)\,\varphi(x)dx\Big] \,.$$

$$\cdot\, f_3(\varrho_{-1}(t_1))\varrho'_{-1}(t_1)\,\exp\Big[\int_{t_1}^{t} f_2(t_2)f_3(\varrho_{-1}(t_2))\varrho'_{-1}(t_2)dt_2\Big]dt_1$$

B e w e i s. Aus der Ungleicheit (3) erhalten wir durch die Substitution $\varrho(t_1) = x$

$$u(t) \leqq f_1(t) + f_2(t) \int_{\varrho(t_o)}^{\varrho(t)} f_3(\varrho_{-1}(x))\varrho'_{-1}(x)u(x)\,dx \leqq$$

$$\leqq f_1(t) + f_2(t) \int_{\varrho(t_o)}^{t} f_3(\varrho_{-1}(x))\varrho'_{-1}(x)u(x)dx =$$

$$= f_1(t)+u_o f_2(t) \int_{\varrho(t_o)}^{t_o} f_3(\varrho_{-1}(t_1))\varrho'_{-1}(t_1)\varphi(t_1)dt_1 +$$

$$+ f_2(t)\int_{t_o}^{t} f_3(\varrho_{-1}(t_1))\,\varrho'_{-1}(t_1)u(t_1)dt_1$$

Bezeichnen wir

$$F_1(t) = f_1(t)+u_o f_2(t) \int_{\varrho(t_o)}^{t_o} f_3(\varrho_{-1}(t_1))\,\varrho'_{-1}(t_1)\varphi(t_1)\,dt_1$$

Dann können wir für jedes $t \in \langle t_o, T \rangle$

$$u(t) \leqq F_1(t) + f_2(t) \int_{t_o}^{t} f_3(\rho_{-1}(t_1))\, \rho'_{-1}(t_1) u(t_1) dt_1$$

schreiben. Auf die letzte Ungleichheit können wir die Behauptung des Hilfssatzes 2 anwenden und bekommen dann für jedes $t \in \langle t_o, T \rangle$

$$u(t) \leqq F_1(t) + f_2(t) \int_{t_o}^{t} F_1(t_1) f_3(\rho_{-1}(t_1)) \rho'_{-1}(t_1) \,\cdot$$

$$\cdot \exp\left[\int_{t_1}^{t} f_2(t_2) f_3(\rho_{-1}(t_2))\, \rho'_{-1}(t_2) dt_2\right] dt_1$$

Wenn wir den Ausdruck der Funktion $F_1(t)$ betrachten, sehen wir, dass wir die Behauptung des Hilfssatzes haben.

<u>Hilfssatz 4.</u> Es sei $t_o \geqq 0$ und alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 seien erfüllt. Dann gilt: wenn für jedes $t \in \langle t_o, T \rangle$ die Ungleichheit

$$(4) \qquad u(t) \leqq f_1(t) + \int_{t_o}^{t} (t - t_1) f_2(t_1) u(t_1) dt_1 + \int_{t_o}^{t} (t - t_1) f_3(t_1) u(\rho(t_1))\, dt_1$$

erfüllt wird, dann gilt auch für jedes $t \in \langle t_o, T \rangle$ die Ungleichheit

$$u(t) \leqq f_1(t) + u_o t \int_{\rho(t_o)}^{t_o} f_3(\rho_{-1}(t_1)) \rho'_{-1}(t_1)\, \varphi(t_1)\, dt_1 + t \int_{t_o}^{t} \left[f_1(t_1) + u_o\, t_1 \int_{\rho(t_o)}^{t_o} f_3(\rho_{-1}(x)) \rho'_{-1}(x)\, \varphi(x)\, dx \right] \cdot$$

$$\cdot \left[f_2(t_1)+f_3(\rho_{-1}(t_1))\rho'_{-1}(t_1) \right] \cdot \exp\left[\int_{t_1}^{t} t_2(f_2(t_2) + \right.$$

$$\left. + f_3(\rho_{-1}(t_2))\ \rho'_{-1}(t_2))\ dt_2 \right] dt_1$$

B e w e i s. Da $t_o \geqq 0$, ist auch $t_1 \geqq 0$ und anstatt der Ungleichheit (4) können wir schreiben:

$$u(t) \leq f_1(t)+t \int_{t_o}^{t} f_2(t_1)u(t_1)dt_1 + t \int_{t_o}^{t} f_3(t_1)u(\rho(t_1))dt_1$$

Analog wie im Beweis des Hilfssatzes 3, haben wir aus der letzten Ungleichheit

$$u(t) \leq f_1(t) + u_o\ t \int_{\rho(t_o)}^{t} f_3(\rho_{-1}(t_1))\ \rho'_{-1}(t_1)\varphi(t_1)dt_1 +$$

$$+ t \int_{t_o}^{t} \left[f_2(t_1) + f_3(\rho_{-1}(t_1))\ \rho'_{-1}(t_1) \right] u(t_1)dt_1$$

Auf diese Ungleichheit können wir die Behauptung des Hilfssatzes 2 anwenden, wodurch wir die Behauptung des Hilfssatzes 4 erhalten.

H i l f s s a t z 5. Die Funktion $\rho(t)$ habe folgende Eigenschaften:

a) $\rho(t)$ ist stetig und hat eine stetige, positive erste Ableitung im Intervall $\langle t_o, T \rangle$,

b) $\rho(t) \leqq t$ am Intervall $\langle t_o, T \rangle$.

Weiter gelte:

c) $u(t) \geqq 0$ ist eine stetige Funktion am Intervall $\langle \rho(t_o), T \rangle$,

d) $f(t) \geqq 0$ ist eine stetige Funktion am Intervall $\langle t_o, \rho_{-1}(T) \rangle$,

e) c ist eine beliebige positive Konstante,

f) für jedes $t \in \langle t_0, T\rangle$ gilt die Ungleichheit

$$(5) \qquad u(t) \leqq c + \int_{t_0}^{t} f(t_1)u(\rho(t_1))dt_1$$

Für jedes $t \in \langle t_0, T\rangle$ gilt dann die Ungleichheit

$$u(t) \leqq c \exp\left[\int_{\rho(t_0)}^{t} f(\rho_{-1}(x)\ \rho'_{-1}(x)\ dx\right]$$

B e w e i s. Mit Hilfe der Substitution $\rho(t_1) = x$ und durch Anwendung der Voraussetzungen des Hilfssatzes aus der Ungleichheit (5) erhalten wir die Ungleichheit

$$u(t) \leqq c + \int_{\rho(t_0)}^{t} f(\rho_{-1}(x))\ \rho'_{-1}\ (x)u(x)dx$$

für jedes $t \in \langle t_0, T\rangle$ und daraus mit Hilfe der Folgerung nach dem Hilfssatz 1 erhalten wir die Behauptung des Hilfssatzes 5.

B e m e r k u n g. Den Hilfssatz 5 können wir auch als Verallgemeinerung des bekannten Hilfssatzes von GRONWALL-BELLMAN betrachten.

Die Gültigkeit des folgenden Hilfssatzes ist leicht festzustellen.

H i l f s s a t z 6. Jede Lösung der Differentialgleichung (1) welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt, erfüllt auch die Integralidentitäten

$$(6) \qquad u'(t) = u'_0 - \int_{t_0}^{t} a(t_1)u(t_1)dt_1 - \int_{t_0}^{t} b(t_1)u(\rho(t_1))\ dt_1$$

$$(7) \qquad u(t) = u_0 + u'_0(t-t_0) - \int_{t_0}^{t} (t-t_1)a(t_1)u(t_1)dt_1 -$$

$$- \int_{t_0}^{t} (t-t_1)b(t_1)u(\rho(t_1))\,dt_1$$

(8) $$\frac{1}{2}u'^2(t) + \frac{1}{2}a(t)u^2(t) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a'(t_1)u^2(t_1)dt_1 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} u'(t_1)b(t_1)u(\rho(t_1))\,dt_1 = \frac{1}{2}\left[u_0'^2 + a(t_0)u_0^2\right]$$

für jedes $t \in \langle t_0, T\rangle$.

Bemerken wir, dass die Integralidentitäten (6) und (7) unter den Voraussetzungen gelten, dass $a(t)$, $b(t)$, und $\rho(t)$ stetige Funktionen am Intervall $\langle t_0, T\rangle$ sind und die Integralidentität (8) nur unter der ergänzenden Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion $a'(t)$ am Intervall $\langle t_0, T\rangle$ gilt.

Aus der Integralidentität (7) haben wir

$$|u(t)| \leq |u_0| + |u_0'|(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} (t-t_1)|a(t_1)||u(t_1)|\,dt_1 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} (t-t_1)|b(t_1)||u(\rho(t_1))|\,dt_1$$

Jetzt sehen wir, dass wir als Folgerung des Hilfssatzes 4 und des Hilfssatzes 6 folgenden Satz aussprechen können.

<u>S a t z 1.</u> Es sei $t_0 \geq 0$. Es seien $a(t)$, $\rho(t) \leq t$, $\rho'(t) > 0$ stetige Funktionen am Intervall $\langle t_0, T\rangle$, $b(t)$ ist eine stetige Funktion am Intervall $\langle t_0, \rho_{-1}(T)\rangle$ ($\rho_{-1}(t)$ ist eine inverse Funktion zu der Funktion $\rho(t)$), $\varphi(t)$ ist eine stetige Funktion am Intervall $\langle \rho(t_0), t_0\rangle$ ($\varphi(t_0) = 1$). Für jede Lösung der Diffe-

rentialgleichung (1), welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt, gilt dann für jedes $t \in \langle t_0, T \rangle$ die Ungleichheit

$$|u(t)| \leq |u_0| + |u_0'|\,(t-t_0) + u_0 t \int_{\rho(t_0)}^{t_0} |b(\rho_{-1}(t_1))| \cdot \rho_{-1}'(t_1)\,\cdot$$

$$\cdot\, |\varphi(t_1)|\,dt_1 + t \int_{t_0}^{t} \Big[|u_0| + |u_0'|(t_1 - t_0) + |u_0|\, t_1 \int_{\rho(t_0)}^{t_0} |b(\rho_{-1}(x))|\,\cdot$$

$$\cdot\, \rho_{-1}'(x) \cdot |\varphi(x)|\,dx \Big] \cdot \Big[|a(t_1)| + |b(\rho_{-1}(t_1))| \cdot \rho_{-1}'(t_1) \Big] \cdot$$

$$\cdot\, \exp\Big[\int_{t_1}^{t} t_2 (|a(t_2)| + |b(\rho_{-1}(t_2))|\, \rho_{-1}'(t_2))\,dt_2 \Big]\, dt_1$$

Führen wir jetzt einige Folgerungen des Satzes 1 an, in welchen wir zeigen welche Abschätzungen der Lösungen der Differentialgleichung (1) durch diesen Satz gewonnen werden können.

F o l g e r u n g 1. Die Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt. Weiter sei $|\varphi(t)| \leq K_1 (>0)$, $|a(t)| \leq K_2 (>0)$, $|b(t)| \leq K_3 (>0)$ und es sei $\rho'(t) \geq m > 0$ $(m < 1)$. Dann gilt für jede Lösung der Differentialgleichung (1), welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt folgende Ungleichheit

$$|u(t)| \leq |u_0| - |u_0'|\, t_0 + c_1 t\, e^{c_2 t^2}, \quad \text{für jedes } t \in \langle t_0, T \rangle$$

wo

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{T\left(K_2 + \frac{K_3}{m}\right)} \cdot \Big|\, |u_0| - |u_0'|\, t_0 \Big| +$$

$$+ \left[\frac{|u_0| K_1 K_3}{m} \cdot (t_0 - \rho(t_0)) + |u_0'| \right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(K_2 + \frac{K_3}{m}\right) t_0^2 \right]$$

und $c_2 = \dfrac{1}{2}\left(K_2 + \dfrac{K_3}{m}\right)$.

B e w e i s. Auf Grund des Satzes 1 und der in der Folgerung angeführten Voraussetzungen erhalten wir nach einfachen Regelungen

$$|u(t)| \leq |u_o| - |u_o'|\,t_o + t\left[\frac{|u_o|K_1K_3}{m}\cdot(t_o-\rho(t_o)) + |u_o'|\right] +$$

$$+ t\left\{\left(K_2 + \frac{K_3}{m}\right)\cdot\Big||u_o| - |u_o'|\,t_o\Big|\exp\left[\frac{1}{2}\left(K_2+\frac{K_3}{m}\right)t^2\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\int_{t_o}^{t}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(K_2+\frac{K_3}{m}\right)t_1^2\right]dt_1 + \left(K_2+\frac{K_3}{m}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{|u_o|\,K_1K_3}{m}\cdot(t_o-\rho(t_o)) + |u_o'|\right]\exp\left[\frac{1}{2}\left(K_2+\frac{K_3}{m}\right)t^2\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\int_{t_o}^{t} t_1\exp\left[-\frac{1}{2}\left(K_2+\frac{K_3}{m}\right)t_1^2\right]dt_1\right\}$$

Für das erste Integral der rechten Seite der letzten Ungleichheit gilt

$$\int_{t_o}^{t}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(K_2+\frac{K_3}{m}\right)t_1^2\right]dt_1 \leq \int_{0}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(K_2+\frac{K_3}{m}\right)t_1^2\right]dt_1 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{K_2+\frac{K_3}{m}}}$$

Nach Ausrechnung des zweiten Integrals und nach Berichtigungen erhalten wir die Behauptung der Folgerung 1, womit der Beweis durchgeführt ist.

F o l g e r u n g 2. Es sei $t_o = 0$. Die Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt. Weiter sei $|\varphi(t)| \leq K_1$ (>0),

$|a(t)| \leqq \frac{a}{t^{\alpha}}$, $|b(t)| \leqq \frac{a}{t^{\alpha}}$ $(a > 0,\ 0 < \alpha < 1)$, $K_2 \geq \rho'(t) \geq m >$ > 0 $(m < 1)$: Jede Lösung der Differentialgleichung (1), welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt, erfüllt dann auch die Ungleichheit

$$|u(t)| \leqq |u_o| + c_1\, t\, e^{c_2 t^{2-\alpha}}, \qquad \text{für jedes } t \in \langle t_o, T\rangle$$

wo $c_1 = |u_o|\, a \left(1 + \frac{1}{m}\right)\frac{1}{1-\alpha}\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m\,(2-\alpha)\pi}{(m+1)a}}\right] + \left[|u_o'| + \right.$

$+ \left.\frac{|u_o|\ a\, K_1K_2}{m(1-\alpha)} \cdot (\rho_{-1}(0))^{1-\alpha}\right]$ und $c_2 = \left(1 + \frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}$.

B e w e i s. Auf Grund des Satzes 1 und der in der Folgerung angeführten Voraussetzungen erhalten wir nach einfachen Regelungen

$$
\begin{aligned}
|u(t)| \leqq\ & |u_o| + t\left[|u_o'| + \frac{|u_o|\ a\,K_1K_2}{m(1-\alpha)}(\rho_{-1}(0))^{1-\alpha}\right] + \\
& + t\left\{|u_o|\ a\left(1+\frac{1}{m}\right)\exp\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\cdot t^{2-\alpha}\right]\cdot\right. \\
& \cdot\int_0^t \frac{1}{t_1^{\alpha}}\exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\,t_1^{2-\alpha}\right]dt_1 + \left[|u_o'| + \right. \\
& \left.+\frac{|u_o|\ a\,K_1K_2}{m(1-\alpha)}(\rho_{-1}(0))^{1-\alpha}\right]a\left(1+\frac{1}{m}\right)\exp\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\cdot t^{2-\alpha}\right]\cdot \\
& \left.\cdot\int_0^t t_1\frac{1}{t_1^{\alpha}}\exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\,t_1^{2-\alpha}\right]dt_1\right\}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Schätzen wir jetzt das Integral $\int_0^t \frac{1}{t_1^{\alpha}} \exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha} \cdot\right.$ $\left. \cdot\, t_1^{2-\alpha}\right] dt_1$. Benützen wir dazu die Substitution $t_1^{1-\alpha} = s$. Dann ist $t_1^{-\alpha}\, dt_1 = \frac{1}{1-\alpha}\, ds$, $t_1 = s^{\frac{1}{1-\alpha}}$ und wir können wie folgt schreiben:

$$\int_0^t \frac{1}{t_1^{\alpha}} \exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\, t_1^{2-\alpha}\right] dt_1 = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{t^{1-\alpha}} \exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \frac{a}{2-\alpha}\, .s.s^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] ds = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{t^{1-\alpha}} \exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\, s^{2+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right] ds \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 \exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\, s^{2+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right] ds +$$

$$+ \frac{1}{1-\alpha}\int_1^{\infty} \exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\, s^{2+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right] ds$$

Die Funktion $\exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\, s^{2+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]$ ist aber am Intervall $\langle 0,\infty)$ sinkend und am Intervall $\langle 1,\infty)$ kleiner oder gleich $\exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\, s^2\right]$. Deshalb können wir

$$\int_0^t \frac{1}{t_1^{\alpha}} \exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\, t_1^{2-\alpha}\right] dt_1 \leqq \frac{1}{1-\alpha} +$$

$$+\frac{1}{1-\alpha}\int_{1}^{\infty} \exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\,s^{2}\right]ds \leqq \frac{1}{1-\alpha} +$$

$$+\frac{1}{1-\alpha}\int_{0}^{\infty} \exp\left[-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{a}{2-\alpha}\,s^{2}\right]ds =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left[1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m(2-\alpha)\pi}{(m+1)\,a}}\,\right]$$

schreiben. Durch Ausrechnung des zweiten Integrals in der Ungleichheit (9) durch Einsetzung der gerade gewonnenen Abschätzung und durch elementare Regelungen erhalten wir aus der Ungleichheit (9) die Behauptung der Folgerung 2.

Weitere drei Folgerungen des Satzes 1 führen wir ohne Beweise an, da diese ähnlich wie in den zwei vorhergegangenen Fällen durchgeführt werden.

F o l g e r u n g 3. Es sei $\rho(t_0) > 0$. Die Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt. Weiter sei $|\varphi(t)| \leqq K_1 (>0)$, $|a(t)| \leqq \frac{a}{t}$, $|b(t)| \leqq \frac{a}{t}$ $(a > 0)$, $\rho'(t) \geqq m > 0$ $(m < 1)$. Für jede Lösung der Differentialgleichung (1), welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt, gilt dann die Ungleichheit

$$|u(t)| \leqq |u_0| - |u_0'|\,t_0 - \frac{1}{t_0}\Big||u_0| - |u_0'|\,t_0\Big|\,t + c_1 t\, e^{c_2 t},$$

für jedes $t \in \langle t_0, T \rangle$, wo

$$c_1 = \left[\frac{1}{t_0}\Big||u_0| - |u_0'|\,t_0\Big| + |u_0'| + \frac{|u_0|\,K_1 a}{m}\cdot \ln\frac{t_0}{\rho(t_0)}\right]\cdot$$

$$\cdot \exp\left[-a\left(1+\frac{1}{m}\right)t_0\right]$$

und $c_2 = a\,(1 + \frac{1}{m})$.

F o l g e r u n g 4. Es sei $\varrho(t_0) > 0$. Die Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt. Weiter sei $|\varphi(t)| \leqq K_1 (>0)$, $|a(t)| \leqq \frac{K_2}{t^2}$ $(K_2 > 0)$, $|b(t)| \leqq \frac{K_3}{t^2}$ $(K_3 > 0)$, $\varrho'(t) \geqq m > 0$ $(m < 1)$. Für jede Lösung der Differentialgleichung (1) welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt gilt dann die Ungleichheit

$$|u(t)| \leqq c_0 + c_1 t^{c_2}, \qquad \text{für jedes} \quad t \in \langle t_0, T\rangle,$$

wo

$$c_0 = |u_0| - |u_0'| t_0 - \frac{K_2 + \frac{K_3}{m}}{1 + K_2 + \frac{K_3}{m}} \cdot (|u_0| - |u_0'| t_0),$$

$$c_1 = \frac{K_2 + \frac{K_3}{m}}{1 + K_2 + \frac{K_3}{m}} \cdot \frac{|u_0| - |u_0'| t_0}{t_0^{1 + K_2 + \frac{K_3}{m}}} + \frac{|u_0'| + |u_0| \frac{K_1 K_3}{m}\left(\frac{1}{\varrho(t_0)} - \frac{1}{t_0}\right)}{t_0^{K_2 + \frac{K_3}{m}}},$$

$$c_2 = 1 + K_2 + \frac{K_3}{m}.$$

F o l g e r u n g 5. Es sei $\varrho(t_0) > 0$. Es seien die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt. Weiter sei $|\varphi(t)| \leqq K_1 (>0)$, $|a(t)| \leqq \frac{K_2}{t^{\alpha}}$, $|b(t)| \leqq \frac{K_3}{t^{\alpha}}$ $(K_2 > 0,\ K_3 > 0,\ \alpha > 2)$, $\varrho'(t) \geqq m > 0 (m < 1)$. Für jede Lösung der Differentialgleichung (1), welche die Voraussetzungen (2) erfüllt, gilt dann die Ungleichheit

$$|u(t)| = |u_0| - |u_0'| t_0 + c_1 t\, e^{-c_2 t^{2-\alpha}} + c_3 t^2 e^{-c_2 t^{2-\alpha}},$$

für jedes $t \in \langle t_0, T\rangle$, wo

$$c_1 = \left[|u_o'| + \frac{|u_o| K_1 K_3}{(\alpha-2)m} \cdot \left(\frac{1}{\rho^{\alpha-1}_{(t_o)}} - \frac{1}{t_o^{\alpha-1}} \right) - \frac{1}{t_o^{\alpha-1}} \left| |u_o| - |u_o'| t_o \right| \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(K_2 + \frac{K_3}{m} \right) \right] \cdot \exp \left[\left(K_2 + \frac{K_3}{m} \right) \frac{1}{\alpha-2} \cdot \frac{1}{t_o^{\alpha-2}} \right] ,$$

$$c_2 = \left(K_2 + \frac{K_3}{m} \right) \frac{1}{\alpha-2} ,$$

$$c_3 = \left| |u_o| - |u_o'| \, t_o \right| \cdot \left(K_2 + \frac{K_3}{m} \right) \frac{1}{t_o^{\alpha}} \cdot \exp \left[\left(K_2 + \frac{K_3}{m} \right) \frac{1}{\alpha-2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{t_o^{\alpha-2}} \right]$$

Die folgenden zwei Bedingungen sind verhältnismässing bekannt, (die zweite wird in [3] angeführt), deshalb führen wir sie ohne Beweise an.

H i l f s s a t z 7. Es seien $u_1(t)$ und $u_2(t)$ zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

(10) $\quad u''(t) + a(t)u(t) = 0,$

für welche der Wronskische Determinant $W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = 1$ für alle t ist. Es seien c_1 und c_2 beliebige Konstanten. Die stetige Funktion $u(t)$ welche die Lösung der Integralgleichung

$$(11) \qquad u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) - \int_{t_o}^{t} \left[u_1(t_1) u_2(t) - u_1(t) u_2(t_1) \right] .$$

$$\cdot \; b(t_1) u(\rho(t_1)) \, dt_1 \quad \text{ist,}$$

wo $u(\rho(t_1)) = u_o \, \varphi(\rho(t_1))$ wenn $\rho(t_1) < t_o$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) ist.

Setzen wir $a(t) = \lambda + A(t)$, $\lambda > 0$. Dann können wir die Differentialgleichung (1) in der Form

$$u''(t) + \lambda u(t) + A(t)u(t) + b(t)u(\varrho(t)) = 0, \tag{12}$$

schreiben und die folgende Behauptung aussprechen.

<u>Hilfssatz 7a.</u> Die stetige Funktion $u(t)$ welche die Lösung der Integralgleichung

$$u(t) = c_1.\cos(st) + c_2.\sin(st) - \frac{1}{s}\int_{t_0}^{t} \sin\left[s(t-t_1)\right] . \tag{13}$$

$$. \left[A(t_1)u(t_1) + b(t_1)u(\varrho(t_1))\right]dt_1 \quad \text{ist,}$$

wo $s = \sqrt{\lambda} > 0$; $u(\varrho(t_1)) = u_0\,\varphi(\varrho(t_1))$ wenn $\varrho(t_1) < t_0$ und c_1, c_2 beliebige Konstanten sind, eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung (12) ist.

<u>Satz 2.</u> Es sei $\lambda > 0$. $A(t)$, $\varrho(t) \leqq t$, $\varrho'(t) > 0$ seien stetige Funktionen am Intervall $\langle t_0, T\rangle$, $b(t)$ ist eine stetige Funktion am Intervall $\langle t_0, \varrho_{-1}(T)\rangle$ ($\varrho_{-1}(t)$ eine zu der Funktion $\varrho(t)$ inverse Funktion), $\varphi(t)$ ist eine stetige Funktion auf E_{t_0} ($\varphi(t_0) = 1$). Jede Lösung der Differentialgleichung (12), welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt, erfüllt dann auch die Engleichheit

$$|u(t)| \leqq \left[2\left(|u_0| + \frac{|u_0'|}{s}\right) + \frac{|u_0|}{s} \int_{\varrho(t_0)}^{t_0} |b(\varrho_{-1}(x))| \,.\, \varrho_{-1}'(x) .\right.$$

$$\left. .|\varphi(x)|\,dx\right] . \exp\left\{\frac{1}{s}\int_{t_0}^{t}\left[|A(t_1)| + |b(\varrho_{-1}(t_1))| .\right.\right.$$

$$\left.\left. .\ \varrho_{-1}'(t_1)\right]\,dt_1\right\}$$

für jedes $t \in \langle t_0, T\rangle$, wobei $s = \sqrt{\lambda} > 0$.

B e w e i s. Aus dem Hilfssatz 7a folgt, das jede Lösung der Differentialgleichung (12) auch in der Form (13) ausgedrückt werden kann. Da die Lösung $u(t)$ die Anfangsbedingungen (2) erfüllen soll, müssen für die in (13) autretenden Konstanten c_1 und c_2 die Gleichungen

$$c_1 . \cos(st_o) + c_2 . \sin(st_o) = u_o$$

$$- c_1 s . \sin(st_o) + c_2 s . \cos(st_o) = u_o'$$

gelten und daraus haben wir für c_1 und c_2

$$c_1 = u_o . \cos(st_o) - \frac{u_o'}{s} . \sin(st_o),$$

$$c_2 = u_o . \sin(st_o) + \frac{u_o'}{s} \cos(st_o)$$

Wenn wir die so errechneten Konstanten c_1 und c_2 in die Integralgleichung (13) einsetzen und wenn wir die Eigenschaften des absoluten Wertes und die Funktionen Sinus und Kosinus in Erwägung ziehen, dann erhalten wir aus (13) die Ungleichheit

$$|u(t)| \leqq 2(|u_o| + \frac{|u_o'|}{s}) + \frac{1}{s}\left\{\int_{t_o}^{t} |A(t_1)|\,|u(t_1)|\,dt_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{t_o}^{t} |b(t_1)|\,|u(\rho(t_1))|\,dt_1 \right\}$$

für jedes $t \in \langle t_o, T \rangle$. Mit Hilfe der Substitution $\rho(t_1) = x$ können wir

$$\int_{t_o}^{t} |b(t_1)|\,|u(\rho(t_1))|\,dt_1 \leqq |u_o| \int_{\rho(t_o)}^{t_o} |b(\rho_{-1}(x))| . \rho_{-1}'(x) .$$

$$\cdot|\varphi(x)|\,dx + \int_{t_0}^{t} |b(\varrho_{-1}(t_1))| \cdot \varrho'_{-1}(t_1) \cdot |u(t_1)|\; dt_1$$

schreiben und durch Wiedereinsetzung erhalten wir

$$|u(t)| \leqq 2\,(|u_0| + \frac{|u'_0|}{s}) + \frac{|u_0|}{s} \int_{\varrho(t_0)}^{t_0} |b(\varrho_{-1}(x))| \cdot \varrho'_{-1}(x) \cdot$$

$$\cdot|\varphi(x)|\,dx + \frac{1}{s} \int_{t_0}^{t} \left[|A(t_1)| + |b(\varrho_{-1}(t_1))|\; \varrho'_{-1}(t_1)\right] \cdot$$

$$\cdot\; |u(t_1)|\; dt_1$$

Aus der letzten Ungleichheit erhalten wir mit Hilfe des Hilfssatzes von Gronwall-Bellman die Behauptung des Satzes.

B e m e r k u n g. Die Behauptung ähnlich der Behauptung in Satz 2 ist in [3] ausgesprochen und bewiesen, dort wird aber vorausgesetzt, dass $|\varphi(t)| \leqq 1$ auf E_{t_0} und die Bedingung, dass $\varrho'(t) > 0$ wird nicht verlangt.

Mit Hilfe des Hilfssatzes 5 und des Hilfssatzes 7 wollen wir jetzt eine hinreichende Bedingung dazu aussprechen und bewiesen, dass jede Lösung der Differentialgleichung (1) am Intervall $\langle t_0, \infty)$ zusammen mit ihrer ersten Ablaitung begrenzt sei.

S a t z 3. Die Voraussetzungen a), b), des Hilfssatzes 5 seien erfüllt. Die Funktion $b(t)$ sei im Intervall $\langle t_0, \infty)$ stetig und es sei

$$\int_{t_0}^{\infty} |b(t)|\,dt < \infty$$

Wenn jede Lösung der Differentialgleichung (10) zugleich mit ihrer ersten Ablaitung am Intervall $\langle t_0, \infty)$ begrenzt ist, dann ist auch jede Lösung der Differentialgleichung (1) welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt gleichzeitig mit ihrer ersten Ableitung am Intervall $\langle t_o, \infty)$ begrenzt.

B e w e i s. Die Lösungen der Differentialgleichung (10) seien die Funktionen $u_1(t)$ und $u_2(t)$, welche gemäss den Voraussetzungen begrenzt sind und sie seien so, dass

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{für jedes } t$$

gelte. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) können wir mit Benützung des Hilfssatzes 7 in der Form (11) schreiben, daraus erhalten wir

$$|u(t)| \leq |c_1|\,|u_1(t)| + |c_2|\,|u_2(t)| + \int_{t_o}^{t} |u_1(t_1)u_2(t) -$$

$$- u_1(t)u_2(t_1)|\,|b(t_1)|\,|u(\varrho(t_1))|\,dt_1$$

Auf Grund der Voraussetzungen des Satzes können wir die letzte Ungleichheit in der Form

$$|u(t)| \leq c_3 + c_4 \int_{t_o}^{t} |b(t_1)|\,|u(\varrho(t_1))|\,dt_1$$

schreiben, wo c_3 und c_4 positive Konstanten sind. Für diese Ungleichheit aber gilt auf Grund des Hilfssatzes 5 und gemäss den Voraussetzungen des Satzes

$$|u(t)| \leq c_3 \exp\left[c_4 \int_{\varrho(t_o)}^{t} |b(\varrho_{-1}(x))|\,\varrho_{-1}'(x)dx\right] \leq$$

$$= c_3 \exp\left[c_4 \int_{\varrho(t_o)}^{\infty} |b(\varrho_{-1}(x))| \cdot \varrho_{-1}'(x)dx\right] \leq K$$

wo K eine positive Konstante ist. Damit haben wir bewiesen, dass jede Lösung der Differentialgleichung (1) welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt am Intervall $\langle t_0,\infty)$ begrenzt ist. Es bleibt noch zu beweisen, dass auch die erste Ableitung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (1) begrenzt ist. Zu diesem Zweck betrachten wir die Integralgleichung (11). Mit Rücksicht auf die Eigenschaften der in ihr auftretenden Funktionen, können wir dieselbe derivieren und erhalten

$$u'(t) = c_1u_1'(t) + c_2u_2'(t) - \int_{t_0}^{t} \left[u_1(t_1)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t_1)\right] b(t_1)u(\varrho(t_1))\, dt_1$$

Daraus

$$|u'(t)| \leq |c_1u_1'(t)| + |c_2u_2'(t)| + \int_{t_0}^{t} |u_1(t_1)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t_1)|\,|b(t_1)|\,|u(\varrho(t_1))|\, dt_1$$

Für die letzte Ungleichheit gilt gemäss den Voraussetzungen des Satzes abermals

$$(14) \qquad |u'(t)| \leq c_5 + c_6\int_{t_0}^{t} |b(t_1)|\,|u(\varrho(t_1))|\, dt_1$$

wo c_5 und c_6 positive Konstanten sind. Im ersten Teil des Beweises zeigten wir, dass $|u(t)| \leq K$ für $t \in \langle t_0,\infty)$. Erwägen wir darüber hinaus, dass die Anfangsfunktion $\varphi(t)$ auch begrenzt ist (weil dies eine stetige Funktion am geschlossenen Intervall $\langle \varrho(t_0),t_0\rangle$ ist) können wir schreiben, dass $|u(t)| \leq K_1$ für $t \in \langle \varrho(t_0),\infty)$ ist, wo K_1 eine positive Konstante ist. Wenn wir dieses Ergebniss auf die Ungleichheit (14) anwenden, dann erhalten wir

$$\left|u'(t)\right| \leqq c_5 + K_1 c_6 \int_{t_0}^{t} |b(t_1)|\,dt_1 \leqq c_5 + K_1 c_6 \int_{t_0}^{\infty} |b(t_1)|\,dt_1 = L,$$

wo L eine positive Konstante ist. Damit ist der Satz beweisen.

F o l g e r u n g 1. Die Funktionen $\varrho(t)$, $b(t)$ sollen die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllen. Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung

$$u''(t) + u(t) + b(t)u(\varrho(t)) = 0$$

welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt begrenzt, gleichzeitig mit ihrer Ableitung am Intervall $\langle t_0, \infty)$.

Eine Behauptung ähnlich der Behauptung des Satzes 3 gilt auch für die Differentialgleichung $u''(t)+(a(t) + b(t))u(t) = 0$, siehe [1]. Deshalb können wir noch eine solche Behauptung aussprechen.

F o l g e r u n g 2. Die Funktion $\varrho(t)$ habe die Eigenschaften a), b) des Hilfssatzes 5. $a(t)$ und $b(t)$ seien stetige Funktionen am Intervall $\langle t_0, \infty)$ und es sei

$$\int_{t_0}^{\infty} |a(t)|\,dt < \infty, \qquad \int_{t_0}^{\infty} |b(t)|\,dt < \infty$$

Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung

$$u''(t) + (1 + a(t))u(t) + b(t)u(\varrho(t)) = 0$$

welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt zugleich mit ihrer ersten Ableitung am Intervall $\langle t_0, \infty)$ begrenzt.

Zum Abschluss führen wir einen Satz an, welcher uns die untere Abschätzung der zweiten Potenz der Lösung der Differentialgleichung (1) angibt. Vorher aber noch ein Hilfssatz.

H i l f s s a t z 8. Es seien $a(t) \leqq 0$, $b(t) \leqq 0$, $\varrho(t) \leqq t$ stetige Funktionen am Intervall $\langle t_0, T\rangle$ und $\varphi(t) \geqq 0$ ist eine stetige Funktion auf E_{t_0}. Es sei $u_0 \geqq 0$, $u_0' > 0$ $[u_0 \leqq 0,\ u_0' < 0]$.

Dann ist jede Lösung $u(t)$ der Differentialgleichung (1), welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt am Intervall $\langle t_o,T\rangle$ wachsend (sinkend).

B e w e i s. Dieser wird unter der Voraussetzung durchgeführt, dass $u_o \geqq 0$, $u_o' > 0$. Aus der Voraussetzung folgt, dass die Lösung $u(t)$ auf irgendeinen Intervall rechts von t_o wachsend ist. Setzen wir jetzt das Gegenteil der Behauptung voraus und $\bar{t} \in \langle t_o,T\rangle$ sei die erste Nullstelle der Funktion $u'(t)$ rechts vom Punkte t_o. Für den Punkt $\bar{t}$ aus der Integralidentität (6) haben wir dann

$$u'(\bar{t}) + \int_{t_o}^{\bar{t}} a(t_1)u(t_1)dt_1 + \int_{t_o}^{\bar{t}} b(t_1)u(\rho(t_1))dt_1 = u_o'$$

Aber $u'(\bar{t}) = 0$, $\int_{t_o}^{\bar{t}} a(t_1)u(t_1)dt_1 \leqq 0$, $\int_{t_o}^{\bar{t}} b(t_1)u(\rho(t_1))dt_1 \leqq 0$

und $u_o' > 0$ aus der Letzten Beziehung erhalten wir also einen Widerspruch. Dann hat aber die Funktion $u'(t)$ rechts vom Punkte t_o keine Nullstelle, d.h. dass $u'(t)>0$ am Intervall $\langle t_o,T\rangle$ ist. Für $u_o \leqq 0$, $u_o'<0$ wird der Beweis ähnlich durchgeführt.

S a t z 4. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes 8 seien erfüllt. Weiter sei $a'(t)$, $b'(t)$ stetig am Intervall $\langle t_o,T\rangle$ und $a(t) + b(t)<0$, $a'(t) + b'(t)<0$ am Intervall $\langle t_o,T\rangle$. Dann gilt für jede Lösung der Differentialgleichung (1) welche die Anfangsbedingungen (2) erfüllt die Ungleichheit

$$u^2(t) \geqq \frac{c_1}{a(t)+b(t)} \exp\left[\int_{t_o}^{t} \frac{a'(t_1)+b'(t_1)}{a(t_1)+b(t_1)}\, dt_1\right]$$

für $t \in \langle t_o,T\rangle$, wo $c_1 = u_o'^2 + (a(t_o) + b(t_o))u_o^2$.

B e w e i s. Setzen wir $u_o'^2 + a(t_o).u_o^2 = c$ (wir wollen bemerken, dass die Konstante c auch negativ sein kann). Aus der Integralidentität (8) haben wir dann

$$a(t).u^2(t) \leqq c + \int_{t_0}^{t} a'(t_1)u^2(t_1)dt_1 - 2\int_{t_0}^{t} b(t_1)u(\varrho(t_1))u'(t_1)dt_1$$

Mit Hilfe des Hilfssatzes 8 erhalten wir aus der letzten Ungleichheit

$$a(t).u^2(t) \leqq c + \int_{t_1}^{t} a'(t_1)u^2(t_1)dt_1 - 2\int_{t_0}^{t} b(t_1)u(t_1)u'(t_1)dt_1$$

woraus wir nach Errechnung des Integrals $\int_{t_0}^{t} b(t_1)u(t_1)u'(t_1)dt_1$

durch die Methode per partes und nach einfacher Berichtigung

$$(a(t)+b(t))u^2(t) \leqq c_1 + \int_{t_0}^{t} \frac{a'(t_1)+b'(t_1)}{a(t_1)+b(t_1)} (a(t_1)+b(t_1))u^2(t_1)dt_1$$

wo $c_1 = c + b(t_0)u_0^2$ ist. Aus der Letzten Ungleichheit erhalten wir mit Hilfe der Folgerung aus dem Hilfssatz 1 die Ungleichheit

$$(a(t) + b(t))u^2(t) \leqq c_1.\exp\left[\int_{t_0}^{t} \frac{a'(t_1)+b'(t_1)}{a(t_1)+b(t_1)} dt_1\right]$$

oder

$$u^2(t) \geqq \frac{c_1}{a(t) + b(t)} \cdot \exp\left[\int_{t_0}^{t} \frac{a'(t_1)+b'(t_1)}{a(t_1)+b(t_1)} dt_1\right]$$

für $t \in \langle t_0,T\rangle$, womit der Satz bewiesen ist.

B e m e r k u n g. Es ist ersichtlich, dass der Satz 4 nur dann eine gewisse Information über die Lösungen der Differentialgleichung (1) gibt, wenn die Anfangswerte u_0, u_0' so sind, dass $c_1 < 0$.

In den anderen Fällen ist die Behauptung des Satzes trivial.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S S

[1] BELLMAN R., Teorija ustojčivosti rešenij differencialnych uravnenij, Moskva 1954

[2] HALANAY A., Differential Equations Stability, Oscillations, Time Lags Academic Press New York and London 1966

[3] NORKIN S. B., Differencialnyje uravnenija vtorovo poriadka s zapazdyvajuščim argumentom, Moskva 1965

Die Anschrift des Autors: Katedra matematickej analýzy, PF UPJŠ Košice, nám. Februárového víťazstva 9

Eingegangen am 3. III. 1971

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. – MATHEMATICA XXVI – 1972)
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXVI – 1972

A REMARK ON PYTHAGOREAN RATIONALS

PAVEL KOSTYRKO, Bratislava

In the paper [1] Pythagorean rational numbers are considered. The rational number x/y is said to be Pythagorean if there is a number z such that $x^2 + y^2 = z^2$, where x,y,z are naturals. In [1] it is proved that the set of all Pythagorean rationals is dense in the interval $(0,\infty)$. In this paper we shall solve the similar question.

Rational number x/y will be called the Pythagorean rational of the degree $n (n \geq 3)$ if there are naturals $a_1, a_2, \dots, a_n, a$ such, that

$$(*) \qquad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a^2$$

holds and $x/y = a_1/a_2$.

T h e o r e m. Let P_n be the set of all Pythagorean rational numbers of the degree n $(n \geq 3)$. Then P_n coincides with the set of all positive rational numbers and hence is dense in the interval $(0,\infty)$.

We shall give two proofs of Theorem.

P r o o f 1. In the monograph [2], p. 67, it is proved that every solution of the equation

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2$$

in naturals a_1, a_2, a_3, a, where a_1, a_2 are even is given by the following formulas

$$a_1 = 2k,\ a_2 = 2l,\ a_3 = (k^2+l^2-m^2)/m,\ a = (k^2 + l^2 + m^2)/m,$$

where k, l are arbitrary naturals and m is a divisor of the number $k^2 + \ell^2$ less than $\sqrt{k^2 + l^2}$.

The proof of Theorem for $n = 3$ is an immediate consequence of this statement. For $n > 3$ it suffices to prove the inclusion $P_{n-1} \subset P_n$.

Let Q_n be the set of all n-tuples $(n \geq 3)$ of naturals $(a_1, \ldots, a_n)$ such that there is a natural number a with the property that the equality (*) is fulfilled. It is known, with respect to the above-mentioned statement, which triples belong to the set Q_3. For every $n > 3$ we shall construct a set Q_n^* (a part of Q_n) using the set Q_{n-1} by the following way: Let $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2 = b^2$, i.e $(b_1, \ldots, b_{n-1}) \in Q_{n-1}$. Let r, s be naturals, $r > s$. Let us put $a_i = b_i(r^2 - s^2)$ for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ and $a_n = 2\,brs$. It is easy to verify, if $a = b(r^2 + s^2)$, that (*) is fulfilled, i.e. $(a_1, \ldots, a_n) \in Q_n$.

We shall prove the inclusion $P_{n-1} \subset P_n (n > 3)$. Let $x/y \in P_{n-1}$. Then there is $(b_1, \ldots, b_{n-1}) \in Q_{n-1}$ such, that $x/y = b_1/b_2$. Since the first two coordinates a_1, a_2 of the n-tuple $(a_1, \ldots, a_n) \in Q_n$ constructed above for the (n-1)-tuple $(b_1, \ldots, b_{n-1}) \in Q_{n-1}$ satisfy the equality $a_1/a_2 = x/y$, we have $x/y \in P_n$.

Proof 2. If we generalize the considerations in the proof of the above-mentioned theorem of the monograph [2] we shall get the following statement:

If $c_1, \ldots, c_{n-1}$ are arbitrary naturals and c is a divisor of the number $c_1^2 + \ldots + c_{n-1}^2$ less than $\sqrt{c_1^2 + \ldots + c_{n-1}^2}$, then for numbers $a_i = 2c_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $a_n = (c_1^2 + \ldots + c_{n-1}^2 - c^2)/c$ and $a = (c_1^2 + \ldots + c_{n-1}^2 + c^2)/c$ the equality (*) holds.

From this statement the statement of our Theorem follows immediately.

R E F E R E N C E S

[1] LANGE L. H., THORO D. E., The density of Pythagorean rationals Amer. Math. Monthly 71(1964), 664-665

[2] SIERPIŃSKI W., Elementary theory of numbers, Warszawa 1964

Author's address: Katedra algebry a teórie čísel PFUK, Bratislava
Šmeralova 2/b

Received March 3, 1971

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. - MATHEMATICA XXVI - 1972)
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXVI - 1972

COMPLETELY SUBDIRECT PRODUCTS OF LATTICE-ORDERED GROUPS

ŠTEFAN ČERNÁK, Košice

F. Šik [6] has defined the concept of a completely subdirect product of lattice-ordered groups. J. JAKUBÍK [4] has shown that if $(G, +, \leqq)$ is an l-group and if the lattice $(G, \leqq)$ is a non-trivial complete direct product of lattices, then the l-group $(G, +, \leqq)$ is a non-trivial complete direct product of l-groups. The same does not hold for subdirect products (see [5]). Every complete direct product of l-groups is a completely subdirect product of l-groups. In this Note we generalize the result of [4] to the case of completely subdirect products. Hence the possibility of representing an l-group G as a non-trivial completely subdirect product can already be decided merely in terms of lattice-theoretical properties of G.

Let I be a non-void set of indices and let $A_i (i \in I)$ be lattices. Form the set of all functions f which map the set I into the set $\cup A_i$ such that $f(i) \in A_i$ for each $i \in I$ and subject them to the following rules:

(i) $f = g \Longleftrightarrow f(i) = g(i)$ for each $i \in I$,

(ii) $(f \wedge g)(i) = f(i) \wedge g(i)$ for each $i \in I$,

(iii) $(f \vee g)(i) = f(i) \vee g(i)$ for each $i \in I$.

We get a lattice which is called direct product of lattices $A_i (i \in I)$ and denoted by $\prod A_i (i \in I)$. If we put $f \leqq g$ if and only if $f(i) \leqq g(i)$ for each $i \in I$, $\prod A_i (i \in I)$ is a partially ordered set.

By $x(i)$ we shall denote the i-th component of $x \in \prod A_i (i \in I)$. Choose a fixed element $x_0 \in \prod A_i (i \in I)$ and construct the set

$$A_i(x_0) = \{x \in \prod A_i (i \in I) : x(j) = x_0(j) \quad \text{for all} \quad j \in I,\ j \neq i\}$$

for any fixed $i \in I$.

Let $S \subseteq \prod A_i \ (i \in I)$. If

(i) S is a sublattice of $\prod A_i (i \in I)$,

(ii) there exists an element $x_0 \in \prod A_i (i \in I)$ such that $A_i(x_0) \subseteq S$ for every $i \in I$,

then S is said to be a completely subdirect product of lattices A_i $(i \in I)$ with respect to the element x_0.

From the definition of the sets $A_i(x_0)$ it follows that $x_0 \in A_i(x_0)$ for every $i \in I$ and thus $x_0 \in S$.

Now, let $A_i (i \in I)$ be l-groups. If $\prod A_i (i \in I)$ satisfies (iv) $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$ for each $i \in I$, then it is an l-group which we call complete direct product of $A_i (i \in I)$ and denote by $\prod^* A_i (i \in I)$. By 0 we denote the zero element of this l-group.

Let $S \subseteq \prod^* A_i (i \in I)$. If

(i) S is an l-subgroup of $\prod^* A_i (i \in I)$,

(ii) $A_i(0) \subseteq S$ for every $i \in I$,

then we call S a completely subdirect product of l-groups $A_i (i \in I)$.

Let G be an l-group. If we consider G merely as a lattice, we use the symbol $(G, \leq)$. By $\sim_\sigma$ we shall denote an isomorphism of partially ordered sets.

An l-group G is isomorphic to a completely subdirect product S of l-groups $A_i (i \in I)$ if there exists a mapping α from G onto S such that

(i) $(G, \leq) \sim_\sigma S$,

(ii) $(\alpha(x+y))(i) = (\alpha(x))(i) + (\alpha(y))(i)$ for any $x, y \in G$ and for any $i \in I$.

1. Suppose that G is an l-group. Let the lattice G be isomorphic to a completely subdirect product S of Lattices $A_i (i \in I)$ with respect to an element $x_o \in \prod A_i (i \in I)$. This isomorphism will be denoted by φ. There exists an element $g_o \in G$ such that $\varphi(g_o) = x_o$. The mapping $f: g \to g + g_o$, $g \in G$ is an isomorphism of the lattice G onto G. The mapping $\psi = \varphi f$ is an isomorphism of the lattice G onto S and we write

(1) $\quad (G, \leq) \sim_{\sigma} S$

In particular, for $g = 0$ where 0 denotes the zero element of the l-group G we get $\psi(0) = X_o$. Denote $\bar{G}_i = \psi^{-1}(A_i(x_o))$. It is obvious that $0 \in \bar{G}_i$ for all $i \in I$. If $g \in \bar{G}_i$, then the following equation holds:

(2) $\quad (\psi(g))(j) = (\psi(0))(j) \quad$ for any $j \in I$, $j \neq i$

The mapping $g \to (\psi(g)(i)$, $g \in \bar{G}_i$ is the isomorphism between the partially ordered set $\bar{G}_i$ and A_i. Then

(3) $\quad \prod \bar{G}_i (i \in I) \sim_{\sigma} \prod A_i (i \in I)$

Let be $\bar{S} = \chi^{-1}(S)$, where χ denotes the isomorphism (3). Then $\bar{S}$ is the completely subdirect product of the lattices $\bar{G}_i$ $(i \in I)$ with respect to the element $\bar{x}_o \in \prod \bar{G}_i (i \in I)$ such that $\bar{x}_o = \chi^{-1}(x_o)$ and thus $\bar{x}_o(i) = 0$ for each $i \in I$. The relation (1) implies

(4) $\quad (G, \leq) \sim_{\sigma} \bar{S}$

Let $g \in G$ be an arbitrary element and let $\bar{g} \in G$ such that $(\psi(\bar{g}))(i) = (\psi(g))(i)$, $(\psi(\bar{g}))(j) = (\psi(0))(j)$ for any $j \in I$, $j \neq i$. By $x(i)$ we shall denote the i-th component of the image of the element $x \in G$ in the isomorphism (4). Then $g(i) = \bar{g}$. In particular, if $g \in \bar{G}_i$, then by (2),

(5) $\quad g(i) = g$ and $g(j) = 0$ for any $j \in I$, $j \neq i$.

If $g(j) = 0$ for any $j \in I$, $j \neq i$, then by the definition of the set $\bar{G}_i$ we get $g \in \bar{G}_i$.

For a fixed $i_o \in I$ denote

$$\overline{G}_{i_o}^{\delta} = \{ g \in G : |x| \wedge |g| = 0 \quad \text{for any} \quad x \in \overline{G}_{i_o} \} .$$

$\overline{G}_{i_o}^{\delta}$ and $\overline{G}_{i_o}^{\delta\delta}$ are convex l-subgroups of the l-group G (see [1], Theorem 12, p. 119).

2 . $\overline{G}_{i_o} = \overline{G}_{i_o}^{\delta\delta}$ for any $i_o \in I$

P r o o f . It is obvious that $\overline{G}_{i_o} \subseteq \overline{G}_{i_o}^{\delta\delta}$ for any $i_o \in I$. Conversely, let $x > 0$, $x \in \overline{G}_{i_o}^{\delta\delta}$. Assume that $x(i) > 0$ for some $i \in I$, $i \neq i_o$. Because of $x(i) \in \overline{G}_i$ using (5) we obtain $(x(i))(i) = x(i)$ and $(x(i))(j) = 0$ for any $j \in I$, $j \neq i$. Thus we have $(x(i))(j) \leqq x(j)$ for every $j \in I$. Then (4) implies $x(i) \leqq x$, i.e. $x(i) \wedge X = x(i)$, which is impossible, since $\overline{G}_i \subseteq \overline{G}_{i_o}^{\delta}$ for any $i \in I$, $i \neq i_o$. In the same way we get that all negative elements of $\overline{G}_{i_o}^{\delta\delta}$ belong to $\overline{G}_{i_o}$. Let x be an arbitrary element of $\overline{G}_{i_o}^{\delta\delta}$. Then $x = x_1 - x_2$ where $x_1, x_2 \in \overline{G}_{i_o}^{\delta\delta}$, $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$. Since $-x_2 \leqq x \leqq x_1$, and x_1, $-x_2 \in \overline{G}_{i_o}$, by convexity of $\overline{G}_{i_o}$ we have $x \in \overline{G}_{i_o}$.

Under the same notations as above the following assertion holds:

L e m m a 1. The lattice ordered group G is a direct product of l-groups $\overline{G}_{i_o}$ and $\overline{G}_{i_o}^{\delta}$. This fact we write

(6) $$G \simeq \overline{G}_{i_o} \times \overline{G}_{i_o}^{\delta}$$

P r o o f. Evidently,

(7) $$\overline{G}_{i_o} \cap \overline{G}_{i_o}^{\delta} = \{0\}.$$

Choose an arbitrary element $z \in G$, $z \geq 0$ and denote by $z(i_o) = x$ its i-th component in the decomposition (4). In the same way as in the section 2 we get $x \leqq z$. If we denote $z_1 = -x + z \geqq 0$, then

(8) $\quad z = x + z_1$

We have to prove that $z_1 \in \overline{G}_{i_o}^{\delta}$. Assume that $z_1 \notin \overline{G}_{i_o}^{\delta}$. Then there exists an element $u \in \overline{G}_{i_o}$ such that

(9) $\quad z_1 \wedge |u| = z_2 > 0$

The relation $0 < z_2 \leqq |u|$ and the convexity of $\overline{G}_{i_o}$ imply that $z_2 \in \overline{G}_{i_o}$.

Hence

(10) $\quad x + z_2 \in \overline{G}_{i_o}$

From (9) and (8) we obtain $x + z_2 \leqq x + z_1 = z$. By (4) this implies

(11) $\quad (x + z_2)(i) \leqq z(i)$ for any $i \in I$

From (11) and (10) we get $x + z_2 = (x + z_2)(i_o) \leqq z(i_o) = x$, hence $z_2 \leqq 0$, a contradiction. Since the positive elements of $\overline{G}_{i_o}$ and $\overline{G}_{i_o}^{\delta}$ generate $\overline{G}_{i_o}$ and $\overline{G}_{i_o}^{\delta}$, respectively, and as by [1], p. 106 positive orthogonal elements are permutable, we infer that

(12) $\quad g + g^{\delta} = g^{\delta} + g$ for any $g \in \overline{G}_{i_o}$ and $g^{\delta} \in \overline{G}_{i_o}^{\delta}$

Let z be an arbitrary element of G. Using (8) and (12) we obtain

(13) $$z = z^{+} - (-z^{-}) = x + z_1 - (x' + z_1') = x + z_1 - z_1' - x' =$$
$$= (x - x') + (z_1 - z_1') \text{ where } x - x' \in \overline{G}_{i_o} \text{ and } z_1 - z_1' \in \overline{G}_{i_o}^{\delta}$$

In view of (7), (12) and (13) we conclude that G as an abstract group and by [1] Lemma B, p. 117 G as an l-group is the direct product of l-groups $\overline{G}_{i_o}$ and $\overline{G}_{i_o}^{\delta}$.

4. Let $z \in G$, $z \geqq 0$. In the proof of the Lemma 1 we have seen that the element z has the same component in the factor $\overline{G}_{i_0}$ with respect to both decompositions (4) and (6). The same fact is also true for any negative element of l-group G. Take an arbitrary element $z \in G$. If $z(i_0) = x$ in the decomposition (4) and $z(i_0) = x'$ in the decomposition (6), then $z^+ (i_0) = x^+ = x'^+$ and $z^-(i_0) = x^- = x'^-$, hence $x = x'$.

5. For any $x, y \in G$ we have in the decomposition (6)

(14) $$(x + y)(i_0) = x(i_0) + y(i_0)$$

By the section 4 the relation (14) holds also in the decomposition (4). Since the decomposition (6) is true for each $i_0 \in I$, the relation (14) holds for every $i_0 \in I$ in the decomposition (4).

In the sections 1-5 we have proved that following statement is true:

<u>Theorem 1.</u> Let G be an l-group. If a lattice $(G, \leqq)$ is isomorphic to a completely subdirect product of lattices $A_i (i \in I)$, then there exist l-groups G_i such that the l-group G is isomorphic to a completely subdirect product of l-groups G_i and for every $i \in I$ the lattices $(G_i, \leqq)$ and A_i are isomorphic.

6. G. GRÄTZER ([2], p. 230) has defined a concept of a weak direct product of algebras. We shall apply this definition to lattices.

Let $A_i (i \in I)$ be lattices. Form a direct product $\prod A_i (i \in I)$. A sublattice S of $\prod A_i (i \in I)$ is said to be a weak direct product of lattices $A_i (i \in I)$ if

(i) $f, g \in S \Rightarrow \{i : f(i) \neq g(i)\}$ is a finite subset of I,

(ii) $f \in S$, $g \in \prod A_i (i \in I)$ and $\{i : f(i) \neq g(i)\}$ is finite $\Rightarrow g \in S$.

J. HASHIMOTO [3] has defined a concept of an L-restricted product of algebras. If this definition is applied to lattices it reads as follows:

Let $A_i (i \in I)$ be lattices and let L be an ideal of the Boolean algebra of all subsets of I. A sublattice S of a direct product

$\prod A_i (i \in I)$ is said to be an L-restricted direct product of lattices $A_i (i \in I)$ if

(i) $f, g \in S \Rightarrow \{i : f(i) \neq g(i)\} \in L$,

(ii) $f \in S$, $g \in \prod A_i (i \in I)$ and $\{i : f(i) \neq g(i)\} \in L \Rightarrow g \in S$.

If in the above definitions $A_i (i \in I)$ are l-groups and S is an l-subgroup of $\prod^* A_i (i \in I)$, we obtain the definitions of a weak direct product and of an L-restricted direct product of l-groups A_i $(i \in I)$, respectively.

Let S be an L-restricted direct product of lattices $A_i (i \in I)$. A set of all i-th components of all elements x S shall be denoted by $\bar{A}_i \subseteq A_i$. If $\bar{A}_i$ is a one-element set for some $i \in I$, then in the direct product we can omit the factor A_i. Suppose that $\bar{A}_i$ is different from one-element set for each $i \in I$. Evidently, $\{i\} \in L$ for each $i \in I$. Namely, if $\{i\} \notin L$ for asome $i \in I$, then $f(i) = g(i)$ for arbitrary $f, g \in S$. Thus $\bar{A}_i$ is a one-element set, a contradiction.

<u>L e m m a 2.</u> Let S be an L-restricted direct product of lattices $A_i (i \in I)$. Then S is a completely subdirect product of lattices $A_i (i \in I)$.

<u>P r o o f.</u> Let $x_o \in S$. Form the sets $A_i(x_o)$. Choose an arbitrary element $a \in A_i(x_o)$ for a fixed $i \in I$. Evidently, $\{i : a(i) \neq x_o(i)\} = \{i\}$. Using the statement mentioned above we get $\{i\} \in L$. The definition of an L-restricted direct product implies $a \in S$ and thus $A_i(x_o) \subseteq S$. This inclusion is true for every $i \in I$.

A converse statement is not true. Let us consider the following example.

<u>E x a m p l e.</u> Let $\prod A_i (i \in I)$ be a direct product of lattices $A_i (i \in I)$ and let j,k be fixed elements of I, $j \neq k$. Assume that card $A_i > 1$ for each $i \in I$ and further that $A_j(A_k)$ has the least (greatest) element which we denote by m(n). Form the set

$$S = \{x \in \prod A_i (i \in I) : \text{either } x(j) = m \text{ or } x(k) = n\}.$$

It is evident that S is a completely subdirect product of lattices $A_i (i \in I)$ with respect to an arbitrary element $x_0 \in \prod A_i (i \in I)$ for which $x_0(j) = m$ and in the same time $x_0(k) = n$.

Assume that S is an L-restricted direct product. Choose an element $x \in S$ such that $x(j) = m$, $x(k) \neq n$ and an element $y \in \prod A_i (i \in I)$ such that $\{i : x(i) \neq y(i)\} = \{J\}$. Since $\{j\} \in L$, the definition of the L-restricted direct product implies $y \in S$, contraty to $y(j) \neq m$ and $y(k) \neq n$.

Every weak direct product of lattices $A_i (i \in I)$ is an L-restricted direct product of lattices $A_i (i \in I)$, if L is equal to the ideal of all finite subsets of I. In view of this fact and of the Lemma 2, Theorem 1 holds for L-restricted direct products and for weak direst products.

R E F E R E N C E S

[1] ФУКС Л., Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва 1965.

[2] GRÄTZER G., Universal algebra. The Pensylvania State University, 1966

[3] HASHIMOTO J., Direct, Subdirect Decompositions and Congruence Relations. Osaka Mathematical Journal 9 (1957), 87-112

[4] ЯКУБИК Я., Прямые разложения частично упорядоченных групп. Чехослов. мат. журнал 86 (1961), 490 - 513.

[5] ЯКУБИК Я., Об одном свойстве структурно упорядоченных групп. Časopis pro pěstování matematiky 85 (1960), 51 - 59

[6] ŠIK F., Über Semmen einfach geordneter Gruppen.

Author's address: Katedra matematiky SF VŠT, Košice,
nám. Februárového víťazstva 9

Received: March 8, 1971

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UC

MATHEMATICA XXVI 1971

03/2 - Prvé vydanie - Náklad 874 - Rukopis zadaný v auguste 1971 - Vytlačené v júni 1972 - - Tlačili Nitrianske tlačiarne, n.p., Nitra - Tlačené ofsetom - Typ písma strojopis - Strán 128 - AH 5,342 - VH 5,870 - Schválené výmerom SÚKK č. 46/I-OR-72

Celý náklad prevzala Ústredná knižnica PFUK, Bratislava, ul. 29.augusta č. 5. Vydala Prírodovedecká fakulta UK v Bratislave ako účelovú publikáciu v Slovenskom pedagogickom nakladateľstve v Bratislave - Technický redaktor Adam Hanák

67 - 172 - 72