(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XX, 1970)

UNIVERSITAS COMENIANA

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA

PUBL. XX

1970
SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO
BRATISLAVA

Просим обмена публикаций
Austausch von Publikationen erbeten
Prière d'échanger des publications
We respectfully solicit the exchange of publications
Se suplica el sanje de publicationes

Celý náklad prevzala Ústredná knižnica PFUK v Bratislave

Zborník Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Comenianae. Vydáva Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Sasinkova 5, č. tel.: 645-51. Povolilo Povereníctvo kultúry č. 226/56/1. Tlač. Kníhtlačiareň „Svornosť", n. p., Bratislava. Technický redaktor Adam Hanák.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XX, 1969]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XX — 1969

О колеблемости компонент решений дифференциальной системы

$$y_i'' + A_i y_i = \Psi_i y_{i+1}, \quad y_k + A_k y_k = -\Psi_k y_{k+1} \quad (y_{n+1} \equiv y_1)$$
$$1 \leqslant k \leqslant n, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \quad k+1, \ldots, n.$$

Г. МАМРИЛЛА

В работе мы будем рассматривать колеблемость компонент решений системы

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{ll} y_i'' + A_i y_i = \Psi_i y_{i+1}, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ y_k + A_k y_k = -\Psi_k y_{k+1}, & i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n \\ (y_{n+1} \equiv y_1) & \end{array}$$

где A_i и Ψ_i предполагаются непрерывными на (x_0, ∞), $x_0 \in (-\infty, \infty)$.

Решение этой системы мы будем обозначать $(y_1, y_2, \ldots y_n)$. Функции y_i, $i = 1, \ldots, n$ будем называть компонентами решения системы (a). Из непрерывности функций A_i, Ψ_i, $i = 1, \ldots, n$ на (x_0, ∞) вытекает существование и однозначность решения $(y_1, \ldots, y_n)$ системы (a) на (x_0, ∞).

Мы будем говорить, что компонента y_i, $i = 1, \ldots, n$ колеблется на (x_0, ∞), если в каждом интеграле (a, ∞), $a \geqslant x_0$ компонента y_i имеет по крайней мере один нуль. В противном случае будем говорить, что y_i не колеблется.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $\Psi_i \geqslant A_{i+1} \geqslant 0$, $\int^{\infty} \Psi_i \, \mathbf{dx} = \infty$ $(A_{n+1} \equiv A_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *и пусть уравнения* $y'' + A_i y = 0$, $i = 1, \ldots, k, k+2, \ldots, n$ *неколебательны (уравнение* $y'' + Ay = 0$ *неколебательно, если произвольное его решение не колеблется с исключением* $y \equiv 0$*) на* (x_0, ∞), *то* $(k+1)$*-ая компонента каждого решения* $(y_1, \ldots, y_n)$ *системы* (a) *колеблется на* (x_0, ∞). *Если и уравнение* $y'' + A_{k+1} y = 0$ *неколебательно,* *то любая компонента произвольного решения системы* (a) *колеблется на* (x_0, ∞).

Доказательство. Докажем от противного. Пусть существует решение $(y_1, \ldots, y_k, \bar{y}_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n)$ системы (a) такое, что $\bar{y}_{k+1}$ не колеблется на (x_0, ∞). Поскольку система (a) линейна, можно считать, что $\bar{y}_{k+1}(x) > 0$ для $x > x_1 \geqslant x_0$. Так как уравнение $y'' + A_k\, y = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$ неколебательно, то k-ая компонента y_k рассматриваемого решения не колеблется на (x_0, ∞) [1] и, значит, $y_k > 0$ или $y_k < 0$ для $x > x_2 \geqslant x_1$. Продолжая в этом процессе, мы видим, что предположение $\bar{y}_{k+1} > 0$ влечет за собой не колеблемость компонент y_k, y_{k-1}, $\ldots$ y_1, y_n, $\ldots$, y_{k+2} рассматриваемого решения на (x_0, ∞). Покажем, что этого быть не может. Действительно, если $y_k > 0$, $x > x_2$, то из k-го уравнения системы (a) вытекает $y_k'' < 0$ и, следовательно, $y_k > k_1 > 0$ для $x > x_2$. Интегрируя $(k-1)$-ое уравнение системы (a) и, пользуясь неравенством $y_k > k_1 > 0$, мы видим, что имеет место хотя бы одно из соотношений

$$(b) \qquad \int^{\infty} A_{k-1} y_{k-1}\, \mathrm{dx} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} y_{k-1}' = \infty.$$

Интегрируя теперь $(k-2)$-ое уравнение системы (a) и пользуясь (b) мы видим, что выполнено по крайней мере одно из условий

$$(в_1) \qquad \int^{\infty} A_{k-2} y_{k-2}\, \mathrm{dx} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} y_{k-2}' = \infty.$$

Продолжая в этом процессе, наконец, получим, что имеет место хотя бы одно из соотношений

$$(в_2) \qquad \int^{\infty} A_{k+1} \bar{y}_{k+1}\, \mathrm{dx} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \bar{y}_{k+1}' = \infty.$$

После интеграции k-го уравнения (a) имеем

$$(c) \qquad y_k' + \int_{\bar{x}}^{x} A_k y_k\, \mathrm{dx} = y_k'(\bar{x}) - \int_{\bar{x}}^{x} \Psi_k \bar{y}_{k+1}\, \mathrm{dx},$$

где $\bar{x}$ достаточно велико. Переходя к пределу в (c) при $x \to \infty$ и применив ($в_2$) получим противоречие, так как $\lim_{x\to\infty} \int_{\bar{x}}^{x} A_k y_k\, \mathrm{dx} > 0$ и должно быть $\lim_{x\to\infty} y_k' = -\infty$ (потому что $\int^{\infty} \Psi_k \bar{y}_{k+1}\, \mathrm{dx} = \infty$) и, следовательно, $y_k < 0$ начиная с некоторого x, но мы предполагали, что $y_k > k_1 > 0$ для $x > x_2$.

Если бы $y_k < 0$ для $x > x_2 \geqslant x_1$, то из $(k-1)$-го уравнения (a), в случае $y_{k-1} > 0$ для $x > x_3 \geqslant x_2$, получим $y_{k-1}'' < 0$ и, следовательно, $y_{k-1} > k_1 > 0$ и, повторив те же рассуждения, что высше, получим наконец противоречие.

Значит $y_{k-1} < 0$ для $x > x_3$ Нетрудно видеть, что если бы некоторая из компонент $y_{k-2}, y_{k-3}, \ldots, y_1, y_n, \ldots, y_{k+2}$ была положительной, начиная с некоторого x, то наконец мы получим противоречие.

Пусть все упомянутые компоненты отрицательны. Из $(k+1)$-го уравнения (a) следует $\bar{y}_{k+1} > k_1 > 0$, $x > x_4 \geqslant x_3$. Если бы $\int^{\infty} A_{k+1}\,\mathrm{dx} = \infty$, то из $(k+1)$-го уравнения сразу получим противоречие, но если $\int^{\infty} A_{k+1}\,\mathrm{dx} < \infty$, то из k-го уравнения, после его интеграции, вытекает

$$(c) \qquad y_k' + \int_{\bar{x}}^{x} A_k y_k\,\mathrm{dt} = y_k'(\bar{x}) - \int_{\bar{x}}^{x} \Psi_k \bar{y}_{k+1}\,\mathrm{dt},$$

где $\bar{x}$ достаточно велико.

Из (c) следует, что имеет место хотя бы одно из соотношений

$$(в_3) \qquad \int^{\infty} A_k y_k\,\mathrm{dt} = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} y_k' = -\infty.$$

Повторив те же рассуждения, что и в первой части доказательства, мы получим аналогичные соотношения как соотношения $(в)$, $(в_1)$, $(в_2)$, которые будут отличатся только знаком. И наконец, придя к $(k+1)$-му уравнению, после его интеграции, имеем

$$(c_1) \qquad \bar{y}_{k+1}'(x) + \int_{\bar{\bar{x}}}^{x} A_{k+1}\bar{y}_{k+1}\,\mathrm{dt} = \bar{y}_{k+1}(\bar{\bar{x}}) + \int_{\bar{\bar{x}}}^{x} \Psi_{k+1} y_{k+2}\,\mathrm{dt},$$

где $\bar{\bar{x}}$ достаточно велико. Из (c_1) следует противоречие, так как $\int^{\infty} \Psi_{k+1} y_{k+1}\,\mathrm{dt} = -\infty$. Итак, $\bar{y}_{k+1}$ колеблется на (x_0, ∞).

Если и $y'' + A_{k+1}y = 0$ неколебательно, то из $(k+1)$-го уравнения системы (a) следует колеблемость y_{k+2} и потом из $(k+2)$-го уравнения вытекает, что y_{k+3} колеблется на (x_0, ∞) и т. д. Значит, все компоненты любого решения системы (a) колеблются на (x_0, ∞).

Следствие. В случае системы двух уравнений

$$(a_1) \qquad y_1'' + A_1 y_1 = \Psi_1 y_2, \quad y_2'' + A_2 y_2 = -\Psi_2 y_1,$$

где $A_1 = A_2$ и выполнении условий теоремы 1 получим следующий результат: обе компоненты произвольного нетривиального решения системы (a_1) колеблются и их нулевые точки, начиная с некоторого x, отделяются. Действительно, умножив первое уравнение (a_1) на y_2 и второе на y_1 и, вычитая второе от первого, получим

$$y_2 y_1'' - y_1 y_2'' = (y_2 y_1' - y_1 y_2')' = \Psi_1 y_2^2 + \Psi_2 y_1^2.$$

Обозвачив $W = y_2y_1' - y_1y_2'$, то последнее соотношение можем записать в виде $W' = \Psi_1y_2^2 + \Psi_2y_1^2$ и после его интеграции в $(\bar{x}, x)$ имеем

$$W(x) = W(\bar{x}) + \int\limits_{\bar{x}}^{x} (\Psi_1y_2^2 + \Psi_2y_1^2)\,\mathrm{dt}.$$

Так как $W(x)$ возрастает, то $W(x)$ может иметь больше всего один нуль, обозначим его $\bar{\bar{x}}$. Итак, на интервале $(\bar{\bar{x}}, \infty)$ первая и вторая компоненты любого нетривиального решения (a_1) колеблются и их нулевые точки чередуются.

Замечание. Заметим, что из неколебательности уравнений $y'' = A_iy = 0$ и $\Psi_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ вытекает следующее свойство: если некоторая компонента решения $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ системы (a) колеблется (не колеблется), то и остальные компоненты этого решения колеблются (не колеблются).

Теорема 2. *Пусть* $A_i \geqslant 0$, $\Psi_i \geqslant 0$ и $\int^{\infty} A_i\,\mathrm{dx} = \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *тогда по крайней мере одна из компонент произвольного решения* $(y_1, \ldots, y_n)$ *система* (a) *колеблется на* (x_0, ∞).

Доказательство. Допустим, что существует решение $(y_1, \ldots, y_n)$ системы (a), которого все компоненты не колеблются на (x_0, ∞). Пусть $y_{k+1} > 0$, $x > x_1 \geqslant x_0$. Из k-го уравнения, в случае $y_k > 0$, $x > x_2 \geqslant x_1$ сразу получаем противоречие, так как неравенство $y_k > 0$ влечет за собой $y_k > k_1 > 0$ для $x > x_3 \geqslant x_2$. Проинтегрировав k-ое уравнение и взяв во внимание условие теоремы $\int A_k\,\mathrm{dx} = \infty$ наконец получим $y_k' \to -\infty$ при $x \to \infty$, что противоречит допущенному. Значит $y_k < 0$. Если бы $y_{k-1} > 0$, то повторив те же рассуждения что высше, мы получим противоречие. Пусть $y_k, y_{k-1}, \ldots, y_1, y_n, \ldots, y_{k+2}$ отрицательны, то на основании последнего из $(k+1)$-го уравнения (после его интеграции) следует противоречие.

Следствие. В случае системы (a_1), где $A_1 = A_2$ и $\Psi_1 + \Psi_2$ не равно тождественно нулю ни в каком неограниченом интервале интервала (x_0, ∞), из теоремы 2 вытекает, что компоненты произвольного нетривиального решения (y_1, y_2) этой системы колеблются и их нулевые точки чередуются, начиная с некоторого x.

Доказательство этого следствия то же самое что доказательство следствия теоремы 1.

В следующих теоремах, которые будут касаться только системы

$$(a_1) \qquad y_1'' + A_1y_1 = \Psi_1y_2, \quad y_2'' + A_2y_2 = -\Psi_2y_1$$

с непрерывными A_i, Ψ_i на (x_0, ∞), $x_0 > 0$, $i = 1, 2$ мы будем пользоваться следующими обозначениями

$$B_t = \frac{2}{x^3} + \frac{A_t}{x}, \quad C_t = \frac{2\ln^2 x + 3\ln x + 2}{x^3 \ln x^3} + \frac{A_t}{x\ln x}$$

Теорема 3. *Пусть* $A_1 \geqslant 0$, $\int^{\infty} A_1\,\mathrm{dx} = \infty$, $A_2 \geqslant 0$ *и дифференциальное уравнение* $y'' + A_2 y = 0$ *неколебательно на* (x_0, ∞). *Пусть кроме того* $\Psi_2 \geqslant B_1\,[\Psi_2 \geqslant C_1]$ *и* $\Psi_1 \geqslant 0$, $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\Psi_1}{x}\,\mathrm{dx} = \infty \left[\int^{\infty} \frac{\Psi_1}{x\ln x}\,\mathrm{dx} = \infty\right]$, *то первая компонента произвольного решения* (y_1, y_2) *системы* (a_1) *колеблется на* (x_0, ∞).

Доказательство. Пусть существует решение $(\bar{y}_1, y_2)$ системы (a_1) первая компонента которого не колеблется на (x_0, ∞). Пусть $\bar{y}_1 > 0$ для $x > x_1 \geqslant x_0$. Из второго уравнения системы (a_1) вытекает, что вторая компонента y_2 не колеблется на (x_0, ∞) [1] и, значит, $y_2 > 0$ или $y_2 < 0$ для $x > x_2 \geqslant x_1$. Если бы $y_2 > 0$ для $x > x_2$, то из второго уравнения (a_1) следует $y_2'' < 0$ и, следовательно, $y_2 > k > 0$ для $x > x_2$, k-постоянная. Умножив первое уравнение на $x^{-1}[x\ln x)^{-1}]$, проинтегрируя его в (x_2, x), имеем

$$\frac{\bar{y}_1'}{x} + \frac{\bar{y}_1}{x^2} + \int_{x_2}^{x} B_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt} = k_1 + \int_{x_2}^{x} \frac{\Psi_1 y_2}{t}\,\mathrm{dt} > k_1 + k\int_{x_2}^{x} \frac{\Psi_1}{t}\,\mathrm{dt}.$$

(d)

$$\left[\frac{\bar{y}_1'}{x\ln x} + \frac{1+\ln x}{x^2\ln^2 x}\bar{y}_1 + \int_{x_2}^{x} C_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt} = k_1 + \int_{x_2}^{x} \frac{\Psi_1}{t\ln t}\,\mathrm{dt} > k_1 + k\int_{x_2}^{x} \frac{\Psi_1}{t\ln t}\,\mathrm{dt}\right]$$

Покажем что

$$\int_{x_2}^{\infty} B_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt} = \infty \quad \left[\int_{x_2}^{\infty} C_1\,\mathrm{dt} = \infty\right].$$

Действительно, переходя к пределу в (d) при $x \to \infty$ и принимая во внимание существование $\lim \int_{x_2}^{\infty} B_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt}$ $[\lim \int_{x_2}^{x} C_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt}]$ и условие теоремы $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\Psi_1}{t}\,\mathrm{dt} = \infty \left[\int^{\infty} \frac{\Psi_1}{t\ln t}\,\mathrm{dt} = \infty\right]$, имеем $\displaystyle\int_{x_2}^{\infty} B_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt} = \infty \left]\left[\int_{x_2}^{\infty} C_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt} = \infty\right]\right.$,

так как сходимость последнего интеграла влечет за собой противоречие. Допустим, что $\int_{x_2}^{\infty} B_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt} < \infty$ $[\int_{x_2}^{\infty} C_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt} < \infty]$, то функция

$$(e)\qquad \frac{\bar{y}_1'}{x} + \frac{\bar{y}_1}{x^2} = g\,(x) \quad \left[\frac{\bar{y}_1'}{x\ln x} + \frac{1 + x\ln x}{x^2\ln^2 x}\,\bar{y}_1 = g(x)\right]$$

имеет бесконечный предел ∞ при $x \to \infty$. Соотношение (e) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для $\bar{y}_1$. Решение этого уравнения

$$\bar{y}_1 = \left(\int_{x_3}^{x} g(t)t^2\,\mathrm{dt} + k_3\right)\frac{1}{x} \quad \left[= \left(\int_{x_3}^{x} g(t)t^2\ln^2 t\,\mathrm{dt} + k_3\right)\frac{1}{x\ln x}\right],$$

где x_3 выбрано так, что $g(x) > 0$ при $x > x_3$ и $k_3 = x_3\bar{y}_1(x_3)$ $[= x_3\ln x\,.$ $.\,\bar{y}_1(x_3)]$ и, значит, $\bar{y}_1 > k_4x^2[> k_4x^2\ln^2 x]$ для $x > x_4 \geqslant x_3$ и $k_4 > 0$ [потому что $\lim \dfrac{\bar{y}_1}{x^2} > 0$; $\lim \dfrac{\bar{y}_1}{x^2\ln^2 x} > 0$]. Подставив $\bar{y}_1 > k_4x^2[> k_4x^2\ln^2 x]$ в $\int_{x_2}^{x} B_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt}[\int_{x_2}^{x} C_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt}]$ получим противоречие. Итак, $\int_{x_2}^{\infty} B_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt} = \infty$ $[\int_{x_2}^{\infty} C_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt} = \infty]$.

Интегрируя второе уравнение (a_1) и принимая во внимание расходимость интерала $\int_{x_2}^{\infty} B_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt}$ $[\int_{x_2}^{\infty} C_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt}]$, имеем

$$(f)\qquad y_2' + \int_{x_2}^{x} A_2y_2\,\mathrm{dt} = y_2'(x_2) - \int_{x_2}^{x} \Psi_2\bar{y}_1\,\mathrm{dt} \leqslant y_2'(x_2) - \int_{x_2}^{x} B_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt}\ [\leqslant y_2'(x_2) - \int_{x_2}^{x} C_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt}].$$

Переходя к пределу в (f) при $x \to \infty$ мы получим $\lim\limits_{x\to\infty} y_2' = -\infty$, но это противоречит допущенному $y_2 > 0$ для $x > x_2$. Итак, если существует решение системы (a_1) с неколеблющейся первой компонентой, то вторая компонента этого решения должна быть отрицательной. Покажем, что $y_2(x) < 0$, $x > x_2$ ведет к противоречию.

Действительно, пусть $y_2(x) < 0$, $x > x_2$ и $\bar{y}_1(x) > 0$. Из первого уравнения (a_1) следует $\bar{y}_1'' < 0$ и, следовательно, $\bar{y}_1 > k > 0$ для $x > x_3 > x_2$. Интегрируя в (x_3, x) первое уравнение (a_1) и применив последнее неравенство мы имеем

$$\bar{y}_1' = \bar{y}_1'(x_3) - \int_{x_3}^{x} A_1\bar{y}_1\,\mathrm{dt} + \int_{x_3}^{x} \Psi_1y_2\,\mathrm{dt} \leqslant \bar{y}_1'(x_3) - k\int_{x_3}^{x} A_1\,\mathrm{dt} + \int_{x_3}^{x} \Psi_1y_2\,\mathrm{dt}$$

∞

Принимая во внимание условие теоремы $\int A_1\,\mathrm{d}t = \infty$, после перехода к пределу при $x \to \infty$ из последнего неравенства вытекает $\bar{y}_1' \to -\infty$ и подавно $y_1 \to -\infty$ при $x \to \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 4. *Пусть выполнено хотя бы одно из условий*

(g_1) $A_1 \geqslant 0,\ \Psi_2 \geqslant C_1,\ \Psi_1 \geqslant m_1 > 0,\ 0 \leqslant A_2x^2 \leqslant m_2,\ m_1,\ m_2$ — *пост.*

(g_2) $A_1 \geqslant 0,\ \Psi_2 \geqslant C_1,\ \Psi_1 \geqslant A_2x^2 + 2,\ A_2 \geqslant 0,$

$$(g_3)\quad A_1 \geqslant 0,\ \Psi_2 \geqslant B_1,\ \int^{\infty} \Psi_2\,\mathrm{dx} = \infty,\ 0 \leqslant A_2 \leqslant \Psi_1,\ \int^{\infty} \frac{\Psi_1}{x}\,\mathrm{dx} = \infty,$$

$$(g_4)\quad A_1 \geqslant 0,\ \Psi_2 \geqslant C_1,\ \int^{\infty} \Psi_2\,\mathrm{dx} = \infty,\ 0 \leqslant A_2 \leqslant \Psi_1,\ \int^{\infty} \frac{\Psi_1}{x\ln x}\,\mathrm{dx} = \infty,$$

$$(g_5)\quad A_i \geqslant 0,\ \Psi_1 \geqslant B_2,\ \Psi_2 \geqslant B_1,\ \int^{\infty} \frac{\Psi_i}{x}\,\mathrm{dx} = \infty,\ i = 1, 2$$

и пусть уравнение $y'' + A_2y = 0$ *неколебательно на* (x_0, ∞), *тогда первая компонента произвольного решения* (y_1, y_2) *системы* (a_1) *колеблется на* (x_0, ∞).

Если кроме того предположим, что уравнение $y'' + A_1y = 0$ *неколебательно, то и вторая компонента любого решения системы* (a_1) *колеблется.*

Доказательство этой теоремы проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 3.

Допустим, что существует решение $(\bar{y}_1, y_2)$ первая компонента которого положительна, начиная с некоторого x, т. е. $\bar{y}_1 > 0$ для $x > x_1 \geqslant x_0$. Из второго уравнения (a_1) следует, что вторая компонента произвольного решения системы (a_1) не колеблется на (x_0, ∞), т. е. $y_2 > 0$ или $y_2 < 0$ для $x > x_2 \geqslant x_1$. Если бы $y_2 > 0$ для $x > x_2$, то из второго уравнения (a_1) вытекает $y_2 > k > 0$. Повторив те же рассуждения что в теореме 3, мы приходим к противоречию.

Рассмотрим теперь случай $y_2 < 0$, $x > x_2$. Из первого уравнения (a_1) следует $\bar{y}_1'' < 0$ и так как $\bar{y}_1 > 0$, то $\bar{y}_1 > k > 0$ для $x > x_2 \geqslant x_1$. Умножив второе уравнение (a_1) на x^2 и интегрируя его в (x_2, x) мы получим

$$x^2y_2' - 2xy_2 + \int_{x_2}^{x} (2 + Bt^2)y_2\,\mathrm{dt} = k_1 - \int_{x_2}^{x} \Psi_2 t^2 \bar{y}_1\,\mathrm{dt}.$$

Правая часть последнего соотношения стремится к ∞ при $x \to \infty$ и так как $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} (2 + Bt^2)y_2\,\mathrm{dt}$ существует, то нетрудно видеть, что $\int\limits_{x_0}^{\infty} (2 + Bt^2)y_2\,\mathrm{dt} = -\infty$. Интегрируя первое уравнение (a_1) и принимая во внимание $\int\limits^{\infty} (2 + Bt^2)y_2\,\mathrm{dt} = -\infty$ получим $\bar{y}_1 \to -\infty$, что противоречит допущенному.

Итак при выполнении условия (g_1) или условия (g_2) первая часть теорёмы доказана.

В случае выполнения условия (g_3) или (g_4) доказательство совершенно аналогично, различие только в том, что второе уравнение (a_1) мы не будем умножать на x^2, но только интегрировать.

Мы уже показали, что если уравнения $y'' + A_i y = 0$, $i = 1, 2$ неколебательны, то колеблемость одной компоненты влечет за собой колеблемость другой.

Замечание 1. Заметим, что утверждения некоторых теорем (теорема 3, теорема 4 при выполнении условия (g_3) или (g_4), остаются верными и в случае системы

$$(a_2) \qquad y_1'' + A_1 y_1 = \Psi_1 y_2\,; \quad y_2^{(2n)} + A_2 y_2 = -\Psi_2 y_1\,,$$

если заменить условие о неколеблемости уравнения $y'' + A_2 y = 0$ условием, что $y^{(2n)} + A_2 y = 0$, $A_2 \geqslant 0$ неколебательно.

Замечание 2. Рассмотрим теперь нелинейную систему вида

$$(a_3) \qquad y_1'' + A_1 y_1 = \Psi_1(x)\Phi_1(y_2)\,; \quad y_2'' - A_2 y_2 = -\Psi_2(x) y_1\,,$$

где функции A_i, Ψ_i, $i = 1, 2$ выполняют условия наложенные на них в теоремах 3 и 4 и функция Φ_1 непрерывна на $(-\infty, \infty)$, обладающая следующими свойствами

1. $\qquad \Phi_1(u) = -\Phi_1(-u)\,,$
2. $\qquad$ если $u < 0$, $\quad$ то $\quad \Phi_1(u) < 0$,
3. $\qquad$ если $u > k > 0$, $\quad$ то $\quad \Phi_1(u) > k_1 > 0$,

то если существует решение (y_1, y_2) системы (a_3) на (x_0, ∞), то первая, соот. первая и вторая компоненты этого решения колеблются на (x_0, ∞).

За функцию $\Phi_1(u)$ мы могли бы взять, например, $u + \sin u$, $\sqrt[3]{u}$ и другие. При этих функциях существует решение системы (a_3) на (x_0, ∞).

Очевидно, что предшествующее утверждение верно и для более общей нелинейной системы вида

$$(a_4) \qquad y_1'' + A_1 y_1 = \Psi_1(x)\Phi_1(y_2)\Theta_1(y_1)\,; \quad y_2'' + A_2 y_2 = -\Psi_2(x)\Phi_2(y_1)\Theta_2(y_2),$$

где Φ_2, Θ_1, Θ_2 непрерывны на $(-\infty, \infty)$ и Φ_2 обладает тем же свойством что Φ_1. Функции Θ_1, Θ_2 — четны и положительны.

В заключение автор приносит глубокую благодарность доц. В. Шеде за ценные советы при подготовке настоящей статьи.

Литература

[1] M. Švec: *On various properties of the solutions of third- and fourth — order linear differential equations, Differential Equations and Their Applications, Proceeding of the Conference held in Prague in September 1962, 187—198.*

Adresa autora: Katedra matematickej analýzy PFUK, Bratislava, Šmeralova 2.
Do redakcie došlo: 15. januára 1968.

O oscilatoričnosti zložiek riešení diferenciálneho systému

$$y_i'' + A_i y_i = \psi_i y_{i+1} \qquad y_k'' + A_k y_k = -\psi_k y_{k+1} \quad (y_{n+1} \equiv y_1)$$
$$1 \leqslant k \leqslant n, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad k-1, \quad k+1, \ldots, n.$$

J. MAMRILLA

Zhrnutie

V práci sú uvedené postačujúce podmienky pri ktorých riešenie lineárneho systému (a) a (a_1), resp. nelineárneho systému (a_3) a (a_4) má aspoň jednu zložku oscilatorickú.

Über die Oszillationsfähigkeit der Elemente der Lösung des Differentialsystems

$$y_1'' + A_i y_i = \psi_i y_{i+1}, \quad y_1'' + A_k y_k = -\psi_k y_{k+1} \quad (y_{n+1} \equiv y_1)$$
$$1 \leqslant k \leqslant n, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad k-1, \quad k+1, \ldots, n.$$

J. MAMRILLA

Zusammenfassung

In der Arbeit sind hinreichend Bedingungen angeführt, unter welchen die Lösung des linearen Systems (a) und (a_1) bezw. des nichtlinearen Systems (a_3) und (a_4) wenigstens ein oszill atorisches Element hat.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XX, 1969)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XX — 1969

Eine Involution auf der Quadrik

J. ČIŽMÁR

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener kommutativer Körper von der Charakteristik 0, Ω — ein Universalkörper über K, S_n — ein n-dimensionaler projektiver Raum (über Ω), $(X_0, \ldots, X_n)$ — ein System von homogenen Variablen, $(x_0, \ldots, x_n) \not\equiv (0, \ldots, 0)$ — ein Punkt aus S_n mit den Koordinaten $x_i \in K$, ξ_i, η_j, ... — über K transzendente Elemente aus Ω.

Die Punktkoordinaten seien immer auf eine gelegene Weise normiert, z. B. hinsichtlich x_0, wenn es möglich ist.

I. Definition und Transformationsgleichungen

1. Es sei

$$Q_{n-1} : f(X) \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} X_i X_j = 0; \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij} \in K, \tag{1}$$

$$A = |a_{ij}| \neq 0,$$

eine reguläre Quadrik in S_n;

$$S_r : X_i = 0, \quad i = r + 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$S_{n-r-1} : X_i = 0, \quad i = 0, \ldots, r; \quad 1 \leqq r \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]; \tag{3}$$

seien zwei disjunkte Unterräume des Raumes S_n. (Aus der Bedingung über r ist es natürlich $n \geqq 3$.) Q_{n-1} sei in einer möglichst allgemeinen Lage zu den Unterräumen S_r, S_{n-r-1}.

2. Die einzige durch den Punkt $(x) \notin S_r$, S_{n-r-1} gehende Transversale von den Unterräumen S_r, S_{n-r-1} ist durch die Gleichungen

$$X_0 : \ldots : X_r = x_0 : \ldots : x_r, \tag{4}$$

$$X_{r+1} : \ldots : X_n = x_{r+1} : \ldots : x_n$$

bestimmt und kann als die Verbindungsgerade der Punkte

$$({}^r x) \equiv (x_0, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \in S_r$$

und

$$({}^{n-r-1}x) \equiv (0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_n) \in S_{n-r-1}$$

betrachtet werden.

Wenn ein Punkt $(x) \in S_r$ ist, bilden alle durch ihn gehenden Transversalen den Verbindungsraum $((x), S_{n-r-1})$.

3. Eine Transformation T sei folgendermaßen definiert:

Der Transformationsgraph von T ist die Menge aller derjenigen Punkte $(x, y) \in Q_{n-1} \times Q_{n-1}$, für welche die Gerade $p \equiv (x)(y)$ eine Transversale der Unterräume S_r, S_{n-r-1} ist.

Satz I, 1. *T ist eine birationale Transformation der Quadrik Q_{n-1} auf sich.*

Beweis. Der Beweis wird in diesem Teil nur für die Punkte durchgeführt, die in der Transformation biholomorph sind.

Bezeichne man durch F eine durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} \sum_{h=0}^{r} \sum_{k=0}^{r} a_{hk} X_h X_k = 0 \\ \sum_{h=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} a_{hk} X_h X_k = 0, \\ f(X) = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

definierte Varietät.

Durch einen Punkt $(x) \in Q_{n-1} - F$ geht genau eine Transversale p^x, deren Parameterdarstellung eine Form

$$\begin{gathered} X_i = k_1 x_i, \quad i = 0, \ldots, r, \\ X_i = k_2 x_i, \quad i = r+1, \ldots, n, \quad (k_1, k_2) \not\equiv (0, 0), \ k_1, k_2 \in \Omega, \end{gathered} \tag{6}$$

hat und deren Schnittpunkte mit der Quadrik Q_{n-1} durch die Gleichung

$$k_1^2 f({}^r x) + 2k_1k_2 \sum_{i=0}^{r} x_i f_i({}^{n-r-1}x) + k_2^2 f({}^{n-r-1}x) = 0 \tag{7}$$

[f_i ($i = 0, \ldots, n$) sind die adjungierten Linearformen von f] bestimmt sind. Die Gleichungswurzeln $(1, 1)$ und $(f({}^{n-r-1}x), f({}^r x))$ führen zu Schnittpunkten (x) und (y), wo (y) Koordinaten

$$y_i = x_i \sum_{h=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} a_{hk} x_h x_k, \quad i = 0, \ldots, r, \tag{8}$$

$$y_i = x_i \sum_{h=0}^{r} \sum_{k=0}^{r} a_{hk} x_h x_k, \quad i = r+1, \ldots, n,$$

hat. Der Punkt (y) ist ein Bild des Punktes (x) in der Transformation T.

Umgekehrt, wenn (y) als ein Urbild betrachtet wird, entspricht es ihm ein Punkt (z):

$$z_i = y_i \sum_{h=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} a_{hk} y_h y_k, \quad i = 0, \ldots, r, \tag{9}$$

$$z_i = y_i \sum_{h=0}^{r} \sum_{k=0}^{r} a_{hk} y_h y_k, \quad i = r+1, \ldots, n,$$

der mit (x) zusammenfällt.

An den allgemeinen Punkt $(\xi) \in Q_{n-1}$ angewandte Transformation gibt den Punkt (η):

$$\eta_i = \xi_i \sum_{h=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} a_{hk} \xi_h \xi_k, \quad i = 0, \ldots, r, \tag{8'}$$

$$\eta_i = \xi_i \sum_{h=0}^{r} \sum_{k=0}^{r} a_{hk} \xi_h \xi_k, \quad i = r+1, \ldots, n;$$

umgekehrt

$$\xi_i = \eta_i \sum_{h=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} a_{hk} \eta_h \eta_k, \quad i = 0, \ldots, r, \tag{9'}$$

$$\xi_i = \eta_i \sum_{h=0}^{r} \sum_{k=0}^{r} a_{hk} \eta_h \eta_k, \quad i = r+1, \ldots, n.$$

Also ist der Punkt (ξ, η) ein allgemeiner Punkt der Transformation T (ihres Graphen), $K(\xi) = K(\eta)$ und die Transformation ist birational und über K irreduzibel. Daneben zeigen die Formeln (8) und (9) noch:

Satz I, 2. *Die Transformation T ist eine Involution des* 3. *Grades auf der Quadrik Q_{n-1}.*

Die Transformation T wird von jetzt an durch das Symbol I_{3-3} oder kurz I bezeichnet werden.

II. Fundamentalvarietäten und irreguläre Varietäten

In diesem Teil werden diejenigen Varietäten untersucht, in denen die Transformation nicht holomorph ist (Fundamentalvarietäten) und in denen holomorph aber nicht biholomorph ist (irreguläre Varietäten) (in Terminologie von [3]). Schließlich wird es noch die invariante Varietät angeführt sein.

1. Bezeichne man:

$$Q_{n-1} \cap S_r \equiv Q_{r-1} : X_i = 0, \quad i = r+1, \ldots, n, \qquad (10)$$
$$f(X) = 0;$$

$$Q_{n-1} \cap S_{n-r-1} \equiv Q_{n-r-2} : X_i = 0, \quad i = 0, \ldots, r, \qquad (11)$$
$$f(X) = 0;$$

$$(Q_{r-1}, S_{n-r-1}) \equiv {}^1Q_{n-1} : \sum_{h=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} a_{hk} X_h X_k = 0 \qquad (12)$$

(${}^1Q_{n-1}$ ist die „Kreuzverbindung" [im Sinn von [1], S. 169] der quadratischen Varietät Q_{r-1} mit dem Unterraum S_{n-r-1} und stellt eine die Varietät Q_{n-1} aus dem Unterraum S_{n-r-1} projizierende Quadrik dar);

$$(Q_{n-r-2}, S_r) \equiv {}^2Q_{n-1} : \sum_{h=0}^{r} \sum_{k=0}^{r} a_{hk} X_h X_k = 0; \qquad (13)$$

$${}^3Q_{n-1} : \sum_{h=0}^{r} \sum_{k=r+1}^{n} a_{hk} X_h X_k = 0. \qquad (14)$$

Über die Quadrik ${}^3Q_{n-1}$ sei es bemerkt, daß sie immer singulär ist, sobald n gerade ist.

Satz II, 1. *Die Fundamentalvarietät der Involution I_{3-3} ist*

$$F \equiv {}^1Q_{n-1} \cap {}^2Q_{n-1} \cap Q_{n-1} \equiv {}^1Q_{n-1} \cap {}^2Q_{n-1} \cap {}^3Q_{n-1}.$$

Beweis. Zuerst ist es offenbar, daß die Gleichungssysteme (12), (13), (1) und (12), (13), (14) äquivalent sind.

Ein Punkt (x) der Qaudrik Q_{n-1} ist fundamental, wenn alle durch ihn gehenden Transversalen mit der Quadrik Q_{n-1} unendlich viele Punkte gemeinsam haben. Dieser Fall tritt ein, wenn

1. entweder durch den Punkt unendlich viele in der Tangentialhyperebene des Punktes (x) nicht liegenden Transversalen gehen,

2. oder eine durch den Punkt (x) gehende Transversale auf der Quadrik Q_{n-1} liegt.

Die Punkte von der Art 1. müssen entweder in S_r (dadurch in Q_{r-1}) oder in S_{n-r-1} (dadurch in Q_{n-r-2}) liegen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Punkte (x) von der Art 2. ist die Erfüllung von

$$f({}^r x) = 0,$$
$$f({}^{n-r-1} x) = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{r} x_i f({}^{n-r-1} x) = 0,$$

d. h. (12), (13) und (14). Dieser Fall heißt aber, daß die Transversale in der Tangentialhyperebene jedes seinen Punktes liegt; also kann jeder Punkt dieser Transversale als Doppelschnittpunkt der Quadrik Q_{n-1} mit der Transversale betrachtet werden. In diesem Sinn ist jeder Punkt der Transversale (außer $({}^r x)$ und $({}^{n-r-1}x)$) in der Transformation invariant. Also im echten Sinn sind nur die Varietäten Q_{r-1} und Q_{n-r-2} fundamental.

Nun ist es offenbar, daß das direkte Einsetzen von (12) und (13) (diese Bedingungen sind auf Q_{r-1} und Q_{n-r-2} erfüllt) in (8) (bei der Voraussetzung (1)) samt Null gibt.

2. Bezeichne man noch:

$$
\begin{aligned}
{}^1V_{n-2} &\equiv {}^1Q_{n-1} \cap Q_{n-1};\\
{}^2V_{n-2} &= {}^2Q_{n-1} \cap Q_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Satz II, 2. *Die irreguläre Varietät der Involution I ist*

$$H \equiv {}^1V_{n-2} \cup {}^2V_{n-2} - ({}^1V_{n-2} \cap {}^2V_{n-2}).$$

Beweis. Die direkte Anwendung der Formeln (8) zeigt, daß ${}^1V_{n-2} - ({}^1V_{n-2} \cap {}^2V_{n-2})$ auf Q_{n-r-2} und ${}^2V_{n-2} - ({}^1V_{n-2} \cap {}^2V_{n-2})$ auf Q_{r-1} abgebildet wird. Dabei wird es z. B. auf den Punkt $(x) \in Q_{r-1}$ eine durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x_i X_0 - x_0 X_i = 0, \quad i = 0, \ldots, r;\\
f(X) = 0 \qquad\qquad (15)
\end{aligned}
$$

gegebene Varietät $Q_{n-r}^{(x)}$ abgebildet.

Die Bedeutung der Varietät ${}^1V_{n-2} \cap {}^2V_{n-2}$ wurde im Teil II, 1 besprochen.

3.

$$
\begin{aligned}
{}^iV_{n-2}: \sum_{h=0}^{r}\sum_{k=0}^{r} a_{hk}X_hX_k - \sum_{h=r+1}^{n}\sum_{k=r+1}^{n} a_{hk}X_hX_k = 0, \qquad (16)\\
\sum_{h=0}^{r}\sum_{k=0}^{r} a_{hk}X_hX_k \neq 0,\\
f(X) = 0.
\end{aligned}
$$

Satz II, 3. *Die invariante Varietät der Involution I ist ${}^iV_{n-2}$.*

Beweis ist offenbar. Die Erfüllung der Bedingung

$$
\begin{aligned}
\sum_{h=0}^{r}\sum_{k=0}^{r} a_{hk}x_hx_k = \sum_{h=r+1}^{n}\sum_{k=r+1}^{n} a_{hk}x_hx_k,\\
\sum_{h=0}^{r}\sum_{k=0}^{r} a_{hk}x_hx_k \neq 0
\end{aligned}
$$

ist eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein Punkt (x) invariant sei.

Andere Fragen wie auch weitere Beziehungen zwischen Fundamentalvarietäten und irregulären Varietäten werden hier nicht untersucht werden.

Literatur

[1] В. Ходж—Д. Пидо: *Методы алгебраической геометрии II, Москва, 1954*

[2] H. P. Hudson: *Cremona transformations, Cambridge, 1927*

[3] S. Lang: *Introduction to algebraic geometry, New York, 1958*

Adresa autora: Katedra geometrie PFUK, Šmeralova 2/b, Bratislava

Do redakcie došlo 15. októbra 1967.

Involúcia na nadkvadrike

J. ČIŽMÁR

Zhrnutie

V práci sa skúma involúcia I_{3-3}, ktorú na regulárnej nadkvadrike Q_{n-1} vytínajú priečky disjunktných podpriestorov S_r, S_{n-r-1}. Sú nájdené fundamentálne a iregulárne variety.

Об одной инволюции на квадрике

Я. ЧИЖМАР

Выводы

В предлагаемой работе рассмотрена инволюция I_{3-3}, в которой отвечают друг другу точки пересечения неособенной квадрики Q_{n-1} с прямой пересекающей независимые подпространства S_r, S_{n-r-1}. Рассмотрены фундаментальные и иррегулярные многообразия.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XX, 1969]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA XX — 1969

Klasifikácia zobrazovacích metód na základe všeobecných princípov

L. BERGER

1. Začneme príkladom. V trojrozmernom konformnom priestore K^3 popíšeme stredové premietanie. Bodu A sú známym spôsobom priradené dva priemety: kolmý priemet A_1 a stredový priemet A_s. Zapisujeme:

$$A \to (A_1, A_s) \qquad (*)$$

Zobrazenie (*) je definované pre všetky body $A \in K^3$ okrem bodov $A \in \omega$, kde ω je rovina, pre ktorú $S \in \omega \parallel \pi$. Body A_1 a A_s sú viazané podmienkou P: A_s, A_1, S_1 ležia na priamke. Pri rozšírení π na projektívnu rovinu P^2 bolo by možné premietať i body $A \in \omega$ okrem $A \equiv S$.

S uvedeným premietaním (*) bude nás zaujímať i inverzné zobrazenie:

$$(A_1, A_s) \to A, \qquad (**)$$

ktoré nazveme konštrukciou. Podľa tejto konštrukcie ku každej dvojici bodov A_1, A_s v π splňujúcich podmienku P a $A_1 \not\equiv S_1 \not\equiv A_s$ možno priradiť podľa (**) jediný bod A. V prípade, že $A_1 \equiv S_1 \not\equiv A_s$, alebo $A_1 \not\equiv S_1 \equiv A_s$ bod A neexistuje. V prípade podľa (**) $A_1 \equiv S_1 \equiv A_s$ možno k dvojici A_1, A_s priradiť nekonečne mnoho bodov$A$.

Ak teda $A \in q \equiv SS_1$ potom $A_1 \equiv S_1 \equiv A_s$ a zobrazenie (**) má pre tento bod zmysel, ale konštrukcia (**) nie je jednoznačná.

Uvedený príklad stredového premietania podáva úvahy pre riešenie dvoch problémov: priradiť danému objektu (u nás bodu A) dvojicu objektov (bodov A_1, A_s) a inverzne, k danej dvojici objektov A_1, A_s, konštruovať (priradiť) objekt (A). Pri tom pristupuje i ďalší, nie menej dôležitý problém: spôsob tohto priradenia! Okrem úvah o týchto problémoch vidíme na uvedenom príklade i možnosť širšieho zovšeobecnenia. Zovšeobecnenie prevedieme tak, aby boli obsiahnuté všetky klasické prípady zobrazovania a faktory zovšeobecnenia sú tri:

1. Štruktúra a dimenzia pracovného priestoru.
2. Spôsob premietania.
3. Charakter zobrazovaných objektov.

2. Pokúsime sa o definíciu pojmu „deskriptívny priestor". Pod týmto termínom chceme mať na mysli taký, dostatočne všeobecný geometrický priestor, v ktorom možno prevádzať deskriptívne úvahy. Je pochopiteľné požadovať od takého priestoru, aby 1. obsahoval priemetňu = rovinu a 2. poznal pojem premietania, t. j. pojem priamky. Niektoré ďalšie požiadavky sú diskutabilné a definíciu „deskriptívneho priestoru", ktorú tu podáme, nepovažujeme za jedine možnú.

Geometrickým priestorom $(\mathbf{M}, G\mathbf{M})$ nazývame dvojicu ktorej prvý člen $\mathbf{M}$ je bodová množina a druhý člen $G\mathbf{M}$ grupa (nie nutne všetkých) bijektívnych zobrazení $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$. Základným geometrickým priestorom v našich úvahách bude reálny projektívny priestor n-rozmerný $(\mathbf{P}^n, G\,\mathbf{P}\,(n))$. Geometrický priestor $(\mathbf{M}^n, G\mathbf{M}\,(n))$ nazveme subpriestorom, ak

1. $\mathbf{M}^n \subset \mathbf{P}^n$, pričom v $\mathbf{M}^n$ existuje $n + 1$ lineárne nezávislých bodov.
2. Existuje grupa $\tilde{G}$ transformácií $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ tak, že $\tilde{G}$ je podgrupou grupy $G\,\mathbf{P}^n$ a $\mathbf{M}^n$ je invariantná voči každému $\sigma \in \tilde{G}$, t. j. $X \in \mathbf{M}^n$, $\sigma \in \tilde{G} \Rightarrow \sigma(X) \in \in \mathbf{M}^n$
3. $G\mathbf{M}\,(n)$ je zúženie $\tilde{G}$ na $\mathbf{M}^n$, t. j. $G\mathbf{M}\,(n)$ je množina všetkých tých zobrazení $\mathbf{M}^n \to \mathbf{M}^n$, ktoré možno písať v tvare $\sigma|_{\mathbf{M}^n}$, kde $\sigma \in \tilde{G}$.

Definícia. Subpriestor $(\mathbf{M}^n, G\mathbf{M}\,(n)$ (nazveme deskriptívnym priestorom ak

1. $\mathbf{M}^n$ je otvorená a konvexná podmnožina v $\mathbf{P}^n$ a
2. ku každým dvom bodom X, $Y \in \mathbf{M}^n$ existuje $\sigma \in G\mathbf{M}\,(n)$ tak, že $\sigma X = Y$.

Poznamenajme, že $\mathbf{M}^n$ je určite jednonásobne súvislá podmnožina v $\mathbf{P}^n$. Samotný $(\mathbf{P}^n, G\,\mathbf{P}\,(n))$ ako aj jeho euklidovský, afinný, lobačevského či konformný subpriestor je deskriptívnym priestorom. V ďalšom pracujeme v deskriptívnom priestore $(\mathbf{M}^n, G\mathbf{M}\,(n))$. V tomto priestore budeme študovať zobrazovaciu deskriptívnu metódu ako množinové zobrazenie

$$f : \mathfrak{m} \to \mathfrak{n} \tag{1}$$

množiny zobrazovacích objektov $\mathfrak{m}$ do množiny obrazov $\mathfrak{n}$.

Postupne budeme analyzovať každý z týchto troch pojmov a hľadať ich charakteristické vlastnosti.

3. Objekty, ktoré zobrazujeme sú body, priamky, roviny, ale aj trojuholníky, kružnice, telesá a i. Nakoľko by táto rôznorodosť pri nami vytýčenej úvahe zovšeobecnenia bola príťažou, nebudeme uvažovať celú množinu spomínaných objektov. Stačilo by, keby sme preštudovali zobrazenie bodu, nakoľko tento je základnou stavebnou jednotkou všetkých ďalších objektov. Niekedy je vhodné (priamková geometria) za základný element zobrazenia brať

priamku, alebo iné lineárne útvary. V každom prípade sa však zdá rozumné voliť za základné prvky buď iba body, alebo iba priamky — všeobecne iba objekty toho istého druhu. Presne povedané: Dve podmnožiny $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subset \mathbf{M}^n$ nazveme objektami toho istého druhu, ak existuje transformácia $\sigma \in G\mathbf{M}(n)$ tak, že $\sigma \mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Nakoľko $G\mathbf{M}(n)$ je grupou, je posledný vzťah ekvivalenciou, t. j. platí 1. $\mathbf{X} \sim \mathbf{X}$; 2. $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{Y} \sim \mathbf{X}$; 3. $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \sim \mathbf{Z} \Rightarrow \mathbf{X} \sim \mathbf{Z}$.

Po týchto úvahách môžeme precizovať množinu $\mathfrak{m}$.

Nech množina $\mathfrak{m}$ zo vzťahu (1) sa skladá z lineárnych objektov toho istého druhu v množine $\mathbf{M}^n$, potom množinu $\mathfrak{m}$ budeme nazývať *množina zobrazovacích objektov*, alebo krátko: *zobrazovacia množina*.

Nie nutne všetky objekty z $\mathbf{M}^n$ toho istého druhu ako sú objekty z $\mathfrak{m}$ náležia do $\mathfrak{m}$. Tak napr. v uvedenom stredovom premietaní do $\mathfrak{m}$ náležia všetky body z $\mathbf{K}^3$ okrem bodov roviny ω. Ďalej z uvedeného príkladu vyplýva aj to, že nie všetky objekty z $\mathfrak{m}$ sa dajú konštruovať zo svojho obrazu v množine $\mathfrak{n}$. Preto je žiadúce, aby sme zároveň s množinou $\mathfrak{m}$ uvažovali ešte dve ďalšie množiny, ktoré označíme $\tilde{\mathfrak{m}}$ a $\mathfrak{m}^*$.

Množinu všetkých objektov toho istého druhu v $\mathbf{M}^n$ ako sú objekty z $\mathfrak{m}$ označíme $\tilde{\mathfrak{m}}$ a nazveme *totalizáciou množiny* $\mathfrak{m}$.

Množinu všetkých tých objektov $X \in \mathfrak{m}$, ktoré sú jednoznačne určené svojim obrazom $f(X)$ nazveme *regulárnou časťou množiny* $\mathfrak{m}$ a označíme $\mathfrak{m}^*$. Prvky z $\mathfrak{m}^*$ nazveme *regulárnymi*, prvky z $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^*$ *singulárnymi*. Množinu $\tilde{\mathfrak{m}} - \mathfrak{m}^*$ nazveme *defektom zobrazovacej metódy* (1).

Tak v uvedenom prípade stredového premietania je $\tilde{\mathfrak{m}} \ldots$ množina všetkých bodov $\mathbf{K}^3$, $\mathfrak{m} \ldots$ množina všetkých bodov $\mathbf{K}^3 - (\omega)$, $\mathfrak{m}^* \ldots$ množina všetkých bodov $\mathbf{K}^3 - (\omega) - (q)$ a teda pre stredové premietanie platí

$$\mathfrak{m}^* \subset \mathfrak{m} \subset \tilde{\mathfrak{m}} \tag{2}$$

Priamo zo zavedenia množín $\tilde{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^*$ vyplýva, že vzťah (2) platí v každom premietaní.

Inak povedané: Nie nutne všetky objekty priestoru $\mathbf{M}$ možno zobraziť. Z tých, ktoré možno zobraziť, nie nutne všetky možno spätne konštruovať z ich obrazov.

Intuitívne možno povedať, že z hľadiska zobrazovanej množiny je zobrazovacia metóda tým výhodnejšia, čím „menšia" je množina $\tilde{\mathfrak{m}} - \mathfrak{m}^*$. Tak napr. zo skúseností vieme, že stredové premietanie je zložitejšie ako premietanie Monge-ho práve preto, že v stredovom premietaní je $\tilde{\mathfrak{m}} - \mathfrak{m}^* = (\omega) \cup \cup (q)$, zatiaľ čo pri Mongeho premietaní je defekt $\tilde{\mathfrak{m}} - \mathfrak{m}^* = \emptyset$, t. j.

$$\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^*$$

Defekt zobrazenia (1) je prázdnou množinou práve vtedy ak $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^*$.

Po zavedení množiny $\mathfrak{m}$ budeme uvažovať o množine $\mathfrak{n}$.

4. Ak študujeme obrazy zobrazenia (1) študujeme množinu $\mathfrak{n}$. Zo základného princípu zobrazenia priestoru do roviny vyplýva, že množina $\mathfrak{n}$ musí byť realizovaná na papieri — teda v rovine. Zobrazovacie metódy, pri ktorých zobrazujeme napr. na guľovú plochu nebudeme tu považovať za striktne deskriptívne, aj keď mnohé spoločné rysy s nami študovanou problematikou tu iste existujú.

Papier, na ktorom budeme realizovať množinu $\mathfrak{n}$ nazveme *priemetňou* a označíme π. Môžeme ju považovať za rovinu projektívnu, afinnú, konformnú, a i. Požiadavka názornosti vedie na zložitosť množiny $\mathfrak{n}$. Tak v uvedenom stredovom premietaní skladá sa $\mathfrak{n}$ z bodových dvojíc, ktoré sú viazané tam uvedenou podmienkou P. V prípade axonometrie je množina $\mathfrak{n}$ tvorená dokonca štvoricami bodov a väzobných podmienok je podstatne viac.

Elementami množiny $\mathfrak{n}$ nemusia však byť vždy len body, alebo skupina bodov. Tak napr. v prípade cyklografie množina $\mathfrak{n}$ sa skladá z dvojíc (cyklus, stred cyklu), poprípade sa $\mathfrak{n}$ skladá iba z prvkov typu (cyklus).

Na množinu $\mathfrak{n}$ budeme teda nazerať ako na skupinu objektov $(a_1, a_2, \dots a_k)$, pričom každý z týchto objektov je prvkom istej množiny v poradí $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \dots, \mathfrak{n}_k$, ktorá patrí dvojrozmernému, alebo jednorozmernému priestoru $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_k$. Priestormi $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_k$ môžu byť roviny, či priamky, pričom nemusia byť tej istej grupovej štruktúry, musia však byť súmiestne s jedinou „rovinou" — priemetňou π. V našich úvahách rovinu π budeme najčastejšie považovať za rovinu rovnakej štruktúry ako priestor, v ktorom zobrazenie prevádzame.

Úvahy budeme precizovať. Nech v pracovnom deskriptívnom priestore $(\mathbf{M}^n, G\mathbf{M}(n))$, $n \geqq 3$ je daná neprázdna množina $\pi \equiv \mathbf{M}^n \cap \mathbf{P}^2$, kde $\mathbf{P}^2$ je projektívna rovina toho priestoru $(\mathbf{P}^n, G\,\mathbf{P}(n))$, ktorého subpriestorom je zvolený pracovný priestor $(\mathbf{M}^n, G\mathbf{M}(n))$. Potom množinu π nazveme priemetňou. Nakoľko $\mathbf{M}^n$ je otvorená a konvexná podmnožina v $\mathbf{P}^n$, je π dvojrozmerná bodová množina, otvorená a konvexná v $\mathbf{P}^2$, ako aj v $\mathbf{M}^n$. Priestor $(\mathbf{N}^i, G\,\mathbf{N}(i))$ nazveme priemetným priestorom (v π) ak $\mathbf{N}^i \subset \pi$ a $i = 2$, alebo $i = 1$ (prípad $i < 1$ vylúčime). V prvom prípade hovoríme o priemetnej rovine, v druhom o priemetnej priamke.

Nech každému objektu $X \in \mathfrak{m}$ je predpisom f_0 priradená podmnožina $f_0(X) \subset \mathbf{N}_0$ priemetného priestoru $(\mathbf{N}_0, G\,\mathbf{N}_0)$ (dimenziu vypúšťame zo zápisu) tak, že všetky množiny $f_0(X) \subset \mathbf{N}_0$ pre $X \in \mathfrak{m}$ sú toho istého druhu (vzhľadom na grupu $G\,\mathbf{N}_0$). Potom množinu

$$\mathfrak{n}_0 = \{f_0(X) \mid X \in \mathfrak{m}\}$$

nazveme *množina obrazov zobrazenia f_0 v priemetnom priestore* $(\mathbf{N}_0, G\,\mathbf{N}_0)$. Symbolom $\tilde{\mathfrak{n}}_0$ značíme totalizáciu množiny $\mathfrak{n}_0$, t. j. množinu všetkých tých podmnožín $X \subset \mathbf{N}_0$, ktoré možno písať v tvare $X = \sigma Y$, kde $\sigma \in G\,\mathbf{N}$ a $Y \in \mathfrak{n}_0$

Množinu $\mathfrak{n}$ zo vzťahu (1) nazveme obrazovou množinou zobrazenia (1), ak platí

1. $$\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2 \times \ldots \times \mathfrak{n}_k \quad 1 \leqq k < \infty,$$

kde $\mathfrak{n}_i$ je množina obrazov zobrazenia f_i v priemetnom priestore $(\mathbf{N}_i, G\,\mathbf{N}_i)$ pre $i = 1, \ldots, k$ a

2. pre každé $X \in \mathfrak{m}$ je

$$f(X) = (f_1(X), \ldots, f_k(X)) \tag{4}$$

Množinu $\mathfrak{n}_1 \times \ldots \times \mathfrak{n}_k$ nazveme tiež totalizáciou množiny $\mathfrak{n}$ a označíme $\tilde{\mathfrak{n}}$. Miesto $f_i(X)$ píšeme často X_i.

Je teda podľa (1) každému objektu $X \in \mathfrak{m}$ priradená usporiadaná k-tica objektov

$$f(X) \doteq (X_1, \ldots, X_k),$$

ktoré budeme stručne nazývať: *prvý, druhý, tretí, ..., k-tý obraz, či priemet objektu X.*

Objekt $f(X)$ nazveme proste *obraz objektu X pri zobrazení* (1).

Obrazová množina $\mathfrak{n}$ je podmnožinou kartézskeho súčinu všetkých množín obrazov $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k$ v uvedenom poradí.

Množinu $\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}$ nazveme *väzbou obrazov.* Často budeme o väzbe hovoriť nie ako o množine, ale ako o predpise V, pomocou ktorého z množiny $\tilde{\mathfrak{n}}$ získame množinu $\mathfrak{n}$.

Číslo $\dim \tilde{\mathfrak{n}} - \dim \mathfrak{n}$ nazveme počet väzieb zobrazenia (1) a označíme $|\mathsf{V}|$. Zrejme platí relácia

$$|\mathsf{V}| = \dim \mathfrak{n}_1 + \ldots + \dim \mathfrak{n}_k - \dim \mathfrak{m} \tag{3}$$

V uvedenom prípade stredového premietania je priemetňa π súmiestna s konformnými rovinami $\mathbf{N}_1^2$, $\mathbf{N}_2^2$. Množina obrazov $\mathfrak{n}_2$ je množina všetkých bodov v $\mathbf{N}_2$. Teda $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2$ je množina všetkých bodových dvojíc (A_1, A_2) $A_2 \equiv A_s$ z π. Obrazová množina $\mathfrak{n}$ je tvorená iba tými dvojicami (A_1, A_2), pre ktoré platí buď $A_1 \equiv A_2 \equiv S_1$, alebo $A_1 \not\equiv S_1 \not\equiv A_2$ a A_1, A_2, S_1 ležia na priamke. Posledné obmedzenie množiny $\tilde{\mathfrak{n}}$ na $\mathfrak{n}$ sa nazýva väzbou stredového premietania.

5. Po objasnení pojmu množín $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{n}$ ostáva nám vyšetriť ešte funkciu f v zobrazení (1), t. j. spôsob, akým je objektu $X \in \mathfrak{m}$ priradená k-tica $f(X) = (X_1 \ldots X_k) \in \mathfrak{n}$, ktorá tvorí jeho obraz.

Nech je daná neprázdna množina $\mathfrak{a}$ objektov toho istého druhu v deskriptívnom priestore $(\mathbf{M}^n, G\,\mathbf{M}(n))$. Nech v tomto priestore $\mathbf{M}^n$ je ďalej daná neprázdna bodová množina $\mathbf{U}$ tak, že pre každé $X \in \mathfrak{a}$ je $\{X\} \cap \mathbf{U} = 0$. Potom množinu všetkých priamok $XY \in \mathbf{M}^n$, kde $X \in \mathfrak{a}$ a $Y \in U$ nazveme vejár objektu X so stredom $\mathbf{U}$ a označíme $\varphi_U(X)$. Funkciu φ_U budeme nazývať *vejárová funkcia so stredom* $\mathbf{U}$. Definičným oborom tejto funkcie je množina všetkých objektov X z $\mathbf{M}^n$, pre ktoré má symbol $\varphi_U(X)$ zmysel. Aby priamka XY bola jednoznačne určená je nutná podmienka $\{X\} \cap \mathbf{U} = 0$!

Nech $\mathfrak{x}$ je neprázdna množina priamok v priestore $\mathbf{M}^n$ a nech $(\mathbf{R}^r, G\mathbf{R}\,(r))$ je subpriestor priestoru $(\mathbf{M}^n, G\mathbf{M}\,(n))$. Potom bodovú množinu $\mathfrak{x} \cap \mathbf{R}^r$ nazveme *stopnou množinou* množiny $\mathfrak{x}$ v $\mathbf{R}^r$ a označíme ju $\psi_R(\mathfrak{x})$. Poznamenajme že stopná množina $\psi_R(\mathfrak{x})$ môže byť i prázdna. Funkciu $\mathfrak{x} \to \psi_R(\mathfrak{x})$ budeme nazývať *stopnou funkciou* (v $\mathbf{R}^r$); definičným oborom tejto funkcie je množina všetkých objektov v $\mathbf{M}^n$.

Podľa (4) je každému $i = 1, \ldots, k$ priradená funkcia

$$f_i : \mathfrak{m} \to \mathfrak{n}_i$$

ktorá objektu $X \in \mathfrak{m}$ priradí objekt $X_i = f_i(X) \in \mathfrak{n}_i$. Túto funkciu budeme nazývať *h-členná premietacia funkcia zobrazenia* (1) *s indexom i* práve vtedy, keď f_i je zložením (superpozíciou) h funkcií z ktorých každá je buď vejárová, alebo stopná.

Budeme teda písať napr. $f_i = \varphi_{U'}\, \psi_R\, \varphi_U$, pričom skladanie čítame odzadu

$$f(X) = \varphi_{U'}\, \{\psi_R[\varphi_U(X)]\}$$

V tomto prípade zobrazenie (4) budeme nazývať h-členným premietaním. Každú z funkcií, ktoré sa vo vyjadrení funkcie f_i vyskytnú, nazveme *premietacím členom*.

Po týchto úvahách môžeme definovať deskriptívne zobrazenie.

Definícia. *Nech je daný deskriptívny priestor* $(\mathbf{M}^n, G\mathbf{M}\,(n))$ *a v ňom zobrazovaná množina* $\mathfrak{m}$, *obrazová množina* $\mathfrak{n}$ *a množiny obrazov* $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k$ *zobrazenia* (1). *Nech ku každému* $i = 1, 2, \ldots, k$ *je priradená* h_i*-členná premietacia funkcia zobrazenia* (1). *Túto funkciu označíme* f_i. *Potom funkciu*

$$X \to f(X) = [f_1(X), f_2(X), \ldots, f_k(X)]; \quad X \in \mathfrak{m} \tag{5}$$

nazveme deskriptívnou a zobrazenie (1) *deskriptívnym zobrazením, alebo deskriptívnou zobrazovacou metódou. Usporiadanú k-ticu prirodzených čísel*

$$\chi(f) = (h_1, \ldots, h_k)$$

nazveme charakterom deskriptívneho zobrazenia (1).

6. Aplikáciu uvedeného prevedieme na tri klasické premietania a v závere práce ukážeme prehľad viacerých zobrazení v tabuľke.

Budeme síce pracovať v $\mathbf{E}^3$, ale zároveň pripustíme existenciu všetkých nevlastných objektov, t. j. podľa Čecha rozšírime priestor $\mathbf{E}^3$ na $\bar{\mathbf{E}}^3$. Fakt,

že grupa priestorov s ktorými máme teraz do činenia je euklidovská, mlčky v ďalšom predpokladáme.

a) Mongeho premietanie je zobrazenie dané dvoma rovinami $\varrho \perp \pi$ s priesečnicou x a nevlastnými bodmi S_1, S_2 a S_2', pričom $S_1 \perp \pi$; $S_2 \perp x$ a $\sphericalangle S_2\pi = \sphericalangle S_2\varrho = 45°$ a $S_2' \perp \varrho$.

Pre Mongeho premietanie platí:

$\mathbf{M}^3 \equiv \mathbf{E}^3$;

$\mathfrak{m}$ množina všetkých bodov v $\mathbf{E}^3$

$\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^*$

$\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \ldots$ euklidovské roviny vnorené do π, t. j. $\mathbf{N}_1 \equiv \pi \equiv \mathbf{N}_2$

$\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2 \ldots$ množiny bodov v $\mathbf{N}_1$ resp. $\mathbf{N}_2$

$\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2 \ldots$ množina bodových dvojíc, pre ktoré platí väzba V: buď $A_1 \equiv A_2$, alebo $A_1 \not\equiv A_2$ a $A_1A_2 \perp x$, pričom $A_1 \in \mathfrak{n}_1$ a $A_2 \in \mathfrak{n}_2$.

Keďže $\dim \mathfrak{n}_1 = \dim \mathfrak{n}_2 = 2$ a $\dim \mathfrak{m} = 3$, bude podľa (3)

$$|\mathsf{V}| = 2 + 2 - 3 = 1$$

Ďalej platí (pri úplnom zaznačení postupu):

Pre obrazovú množinu $\mathfrak{n}_2$ a funkciu $f_2 : \mathfrak{m} \to \mathfrak{n}_2$

$\varphi_{S_2'}(A) \ldots$ priamka idúca bodom A vo smere S_2'

$\psi_\varrho\varphi_{S_2'}(A) \equiv A_2' \;(\equiv \varphi_{S_2'} \cap \varrho) \ldots$ priesečník priamky $\varphi_{S_2'}(A)$ s rovinou ϱ

$\varphi_{S_2}(A_2') \ldots$ priamka idúca bodom A_2' vo smere S_2 a zvierajúca s ϱ a π uhol 45°

$\psi_\pi\varphi_{S_2}(A_2') \equiv A_2(\equiv \varphi_{S_2}(A_2') \cap \pi)$.

Pre obrazovú množinu $\mathfrak{n}_1$ a funkciu $f_1 : \mathfrak{m} \to \mathfrak{n}_1$

$\varphi_{S_1}(A) \ldots$ priamka idúca bodom A vo smere S_1

$$\psi_\pi\varphi_{S_1}(A) \equiv A_1 \;(\equiv \varphi_{S_1}(A) \cap \pi)$$

Tak Mongeho premietanie klasifikujeme na základe uvedených funkcií typu φ a ψ:

$$f = (f_1, f_2)$$

pri

$$f_1(A) = \psi_\pi\varphi_{S_1}(A)$$

$$f_2(A) = \psi_\pi\varphi_{S_2}(A_2')\psi_\varrho\varphi_{S_2'}(A)$$

a charakteristika pri jednotlivých funkciach $\chi(f_1) = 2$, $\chi(f_2) = 4$ je

$$\chi(f) = (2, 4)$$

b) Pri stredovom premietaní uvedenom v úvode bude $\dim \mathfrak{n}_1 = \dim \mathfrak{n}_2 = 2$, $\dim \mathfrak{m} = 3$

$$|\mathsf{V}| = 2 + 2 - 3 = 1$$

a pri S, $SS_1 \equiv q \perp \pi$

$$f = (f_1, f_2),$$

$$f_1 = \psi_\pi \varphi_S(A) \equiv A_2 \equiv A_s$$

$$f_2 = \psi_\pi \varphi_{SS_1}(A) \equiv A_1;$$

$$\chi(f_1) = 2, \quad \chi(f_2) = 2$$

$$\chi(f) = (2, 2)$$

c) Zobrazenie v ortogonálnej axonometrii je dané trojicou navzájom kolmých priamok ${}^1x$, ${}^2x$, ${}^3x$ idúcich bodom O a rovinou π pre ktorú platí $\pi \cap {}^\alpha x \equiv {}^\alpha X \not\equiv 0$ pre $\alpha = 1, 2, 3$.

Označme $\varrho^\alpha \equiv ({}^\beta x, {}^\gamma x)$, kde (α, β, γ) je permutácia trojice $(1, 2, 3)$ a S nevlastný bod kolmý na π a S_i nevlastný bod priamky ${}^i x$, pre $i = 1, 2, 3$, potom pre ortogonálnu axonometriu platí:

$\boldsymbol{M}^3 \equiv \boldsymbol{E}^3$

$\mathfrak{m}\ldots$ množina všetkých bodov v $\boldsymbol{E}^3$

$\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^*$

$\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\ \boldsymbol{N}_3, \boldsymbol{N}_4 \equiv \boldsymbol{N}_a$ euklidovské roviny vnorené do π. I tu je

$\boldsymbol{N}_1 \equiv \boldsymbol{N}_2 \equiv \boldsymbol{N}_3 \equiv \pi$

$\mathfrak{n}_i\ldots$ množina všetkých bodov v $\boldsymbol{N}_i$ pre $i = 1, 2, 3, 4$; $\mathfrak{n}_4 = \mathfrak{n}_a$.

$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2 \times \mathfrak{n}_3 \times \mathfrak{n}_4$; $\mathfrak{n} \subset \tilde{\mathfrak{n}}$; do $\mathfrak{n}$ patria iba tie bodové štvorice (A_1, A_2, A_3, A^a) z π, pre ktoré platia všetky väzby

$$\mathsf{V}: \quad [(A^a A^a \parallel {}^\alpha x^a) \quad \text{a} \quad (a_{\alpha\beta} \cap a_{\beta\alpha} \in {}^\gamma x^a), \quad \text{kde} \quad (\alpha, \beta, \gamma)$$

je permutácia trojice 1, 2, 3. ($a_{\alpha\beta}\ldots$ priamka idúca bodom A^a_α rovnobežné s ${}^\beta a^\alpha$).

Keďže $\dim \mathfrak{n}_1 = \dim \mathfrak{n}_2 = \dim \mathfrak{n}_3 = \dim \mathfrak{n}_4 = 2$ a $\dim \mathfrak{m} = 3$ bude

$$|\mathsf{V}| = \dim \mathfrak{n}_1 + \dim \mathfrak{n}_2 + \dim \mathfrak{n}_3 + \dim \mathfrak{n}_4 - \dim \mathfrak{m} =$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 - 3 = 5.$$

Teda zo 6 hore uvedených väzbových podmienok je nezávislých 5. Ak pre body A^a_1, A^a_2: A^a_3, A^a sú splnené všetky vyššie uvedené podmienky väzieb okrem napr. podmienky $a_{12} \cap a_{21} \in {}^3x^k$, potom táto posledná je dôsledkom podmienok predošlých podľa známych faktov geometrie euklidovskej roviny. Ďalej pre ortogonálnu axonometriu platí:

$$f_\alpha = (f_1, f_2, f_3, f_4), \quad f_4 = f_a$$

$$f_\alpha = \psi_\pi \varphi_s \psi_{\rho\alpha} \varphi_{s\alpha}(A) \ldots \quad \text{pre} \quad = 1, 2, 3 \quad \chi(f_\alpha) = 4$$

$$f_a = f_4 = \psi_\pi \varphi_s(A) \ldots \quad \chi(f_a) = 2 \quad \chi(f_\alpha) = (4, 4, 4, 2)$$

Podobne by sme mohli v 2. časti uvedené aplikovať aj na ostatné základné zobrazovacie metódy a to či už by išlo o zobrazovanie bodov a či priamok, alebo rovín — zásadne však objektov toho istého druhu.

V prehľadnej tabuľke uvedieme ako príklad charakterizáciu niektorých základných zobrazovacích metód v E^3.

Zobrazenie	Objekt z $\mathfrak{m}$	Priradený objekt z $\mathfrak{n}$ v π	Počet priemetní	Väzba $\lvert V \rvert$	Charakteristika $\chi(f)$
stredové	bod	2 body	1	1	(2, 2)
kótované	bod	2 body	2	0	(2, 4)
Mongeho	bod	2 body	2	1	(2, 4)
kosouhlé	bod	4 body	4	5	(4, 2, 4, 2)
ortogonálna axonometria	bod	4 body	4	5	(4, 4, 4, 2)
cyklografia	bod	cyklus	1	0	(2)
dvojstredové	bod	2 body	1	1	(2, 2)
dvojstopové	priamka	2 body	2	0	(1, 3)
dvojstopové	rovina	2 priamky	2	1	(1, 3)

Z tabuľky je zrejmé, že čím názornejší je obraz zobrazovaného objektu, tým zložitejší je symbol charakterizujúci uvažované zobrazenie, t. j. tým zložitejšia je funkcia, podľa ktorej priraďujeme zobrazovanému objektu objekt obrazový.

V ďalších úvahách sa dotkneme zovšeobecnenia klasických zobrazovacích metód a to z hľadiska dimenzie a grupy pracovného priestoru ako i z hľadiska charakteru zobrazovaných objektov a charakterú obrazovej množiny. Tu by išlo o zatriedenie zobrazovacích metód do jednotlivých charakteristických skupín podľa určitých hľadísk a potom pre jednotlivé triedy stanoviť základné princípy. O spracovanie tejto problematiky sa pokúsim v budúcnosti.

Literatúra

[1] Kadeřávek F., Klíma J., Kounovský J.: *„Deskriptivní geometrie I. a II."* — *Praha 1928, 1932.*

[2] Klíma J.: *„Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii"*, — *JČMF — 1961.*

[3] Modenov P. S. — A. S. Parchomenko: *„Geometričeskie preobrazovanija"* — *Moskva 1961.*

Adresa autora: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie SET, VŠD Žilina, Závodie 196.

Do redakcie došlo: 15. decembra 1967.

Резюме

Л. БЕРГЕР

Классификация изобразительных методов на основе всеобщих принципов

Под понятием „начертательная геометрия" можно понимать всеобщее изображение

$$f : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{n}$$

то есть, для f, $\mathfrak{m}$ и для $\mathfrak{n}$ создаются условия, которые характеризуют начертательную геометрию. Теоретические рассуждения илюстрируются на трех классических методах. Наконец здесь показано и преминяемость приведенных трех методов при всяком ином (особом) методе.

Zusammenfassung

Die Klassifikation der darstellenden Methoden auf Grund der allgemeinen Prinzipien

L. BERGER

Unter dem Begriff die „darstellende Geometrie" sucht man die möglichst allgemeine Abbildung

$$f\colon \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{n}$$

also die Bedingungen für f, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, die für die darstellende Geometrie als charakteristische zum Vorschein kommen.

In der Arbeit werden diese theoretischen Betrachtungen mit drei klassischen Methoden illustriert und schliesslich wird hier auf die Anwendbarkeit jeder eigenartigen Methode hingewiesen.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XX, 1969]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA XX — 1969

On the Solution of the Linear Differential Equation of the Second Order by Means of Airy's integrals

BY

K. R. AYCOUB and N. I. GIRGIS

1. Introduction

Several problems of mathematical physics involve types of linear differential equations. The differential equations which occur frequently are those of the second order namely

$$\frac{d^2w}{dx^2} + P\frac{dw}{dx} + Qw = 0, \tag{1.1}$$

where P and Q are functions of x.

It is well known that by means of the transformation

$$w = y\, e^{-\frac{1}{2}\int P dx}$$

the above differential equation transforms to

$$\frac{d^2y}{dx^2} - f(x)y = 0, \tag{1.2}$$

where

$$f(x) = {}^1/_4\, P^2 + {}^1/_2 \frac{dP}{dx} - Q.$$

We can assume, without loss of generality, that $f(x)$ has a zero at $x = 0$. [If $f(x)$ vanishes at $x = c$, then by the transformation $X = x - c$ the function $f(x)$ will be transformed to a function, say, $F(X)$ which has a zero at $X = 0$]. Suppose that, in the neighbourhood of $x = 0$, $f(x)$ has the Taylor's expansion

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

Equation (1.2) may therefore be written in the form

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)\, y = 0. \tag{1.3}$$

The coefficient a_1 may be absorbed in y and the problem of linear differential equations of the second order (1.1) may be reduced to that of differential equations of the type

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)\, y = 0 \tag{1.4}$$

A simple equation of the type (1.4) is that in which $a_i = 0$ for $i \geqslant 2$. In this case the differential equation (1.4) will be

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0 \tag{1.5}$$

Equation (1.5) is satisfied by the Airy's integrals ([1], [2])

$$\mathrm{Ai}\, x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(xt + \frac{t^3}{3}\right) dt,$$

$$\mathrm{Bi}\, x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\sin\left(xt + \frac{t^3}{3}\right) + \exp\left(xt - \frac{t^3}{3}\right)\right\} dt.$$

Evidently, for $a_i \neq 0$, equation (1.4) is no further satisfied by $\mathrm{Ai}\, x$ or $\mathrm{Bi}\, x$. It is however of special interest for the authors to reveal some connection, if any, between equation (1.4) and the Airy's integrals $\mathrm{Ai}\, x$, $\mathrm{Bi}\, x$.

For the purpose of approximate solutions Z. Mursi [2] obtained the first four approximate solutions y_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ for the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (x + a_2x^2)\, y = 0 \tag{1.6}$$

He also obtained the first three approximate solutions y_n $(n = 1, 2, 3)$ for equation (1.4). These approximations are easily obtained and they depend in fact on the Airy's integrals $\mathrm{Ai}\, x$, $\mathrm{Bi}\, x$ and their derivatives.

For approximate solutions of higher order, the situation seems to be more complicated and laborious. This happens not only for the general equation (1.4) but also for the special equation (1.6).

However, a method which simplifies the determination of y_n for such equations will be given. This method is applied in this paper to the simple differential equations

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (x + ax^m)\, y = 0 \tag{1.7}$$

with $m = 2$ and 3.

The main results in this paper are Theorems 1 and 2 [see §§ 4, 5]. Theorem 1 gives an expression which connects the solutions y_n and y_{n+1} of equation (1.7) when $m = 2$. Theorem 2 gives such a connection when $m = 3$.

In a following paper such a discussion will be done to the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_mx^m)\, y = 0 \tag{1.8}$$

for m in general.

These are in fact the first two steps towards the treatment of the general problem in concern with the differential equation (1.4).

Although the method we use here and afterwards simplifies the determination of y_n for any of the differential equations under consideration, yet this is not our purpose. Our aim is to discuss the behaviour of the solution y_n as n tends to ∞ and set conditions under which a solution (in terms of Airy's integrals and their derivatives) exist for the differential equation (1.4) or equally well for the linear differential equation of the second order (1.1) in general.

2. Preliminary Results

In this section, we collect together some unrelated results mainly for subsequent use.

Lemma 1. *The complete solution of the differential equation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$$

is

$$y = c_1 \operatorname{Ai} x + c_2 \operatorname{Bi} x \equiv u(x).$$

where c_1 and c_2 are arbitrary constants.

Lemma 2. *Let the notation be as in Lemma 1, and let $u^{(n)}$ denotes the n^{th} derivative of $u(x)$ with respect to x. Then*

$$(i) \quad x^2u^{(n)} = u^{(n+4)} - 2(n+1)\,u^{(n+1)} + (n-1)_2u^{(n-2)},$$

$$(ii) \quad x^3u^{(n)} = u^{(n+6)} - 3(n+2)^{(n+3)} + \omega(n)u^{(n)} - (n-2)_3u^{(n-3)}$$

where $\omega(n) = 3n^2 + 3n + 2,\ (r)_p = r(r+1)(r+2)\ldots(r+p-1).$

Proof. By Lemma 1, $u(x)$ satisfies the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0,$$

and therefore

$$u^{(2)} = xu.$$

Now, if we differentiate this relation n times with respect to x, we have

$$u^{(n+2)} = xu^{(n)} + nu^{(n-1)},$$

i. e.

$$xu^{(n)} = u^{(n+2)} - nu^{(n-1)} \tag{2.1}$$

Then Lemma 2(i) follows directly if we multiply both sides of (2.1) by x and then apply (2.1) twice for the R. H. S. of the resulting relation. Also, Lemma 2 (ii) will follow directly from Lemma 2 (i) if we multiply by x and use again (2.1).

Lemma 3. *Let Θ be the operator* $D^2 - x$, *and Θ^{-1} be the inverse operator. Then with the notation of Lemmas* 1,2

$$\Theta^{-1}u^{(n)} = \frac{u^{(n+1)}}{n+1}.$$

([2], Chapter II).

3. Method of Successive Approximations

In this section, we explain in brief the method of successive approximations that will be used for the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (x + ax^m)y = 0, \tag{3.1}$$

where $m = 2,3$.

For this purpose, we write the differential equation (3.1) in the form

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = ax^my \tag{3.2}$$

If a is small enough, then for a first approximation, the above equation may be written in the form

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$$

The solution of this equation is, by Lemma 1, $y = u(x) = u$ and may be regarded as the first approximation. Denoting this approximation by y_1, we have $y_1 = u$.

For a second approximation, we insert this expression for y in the R. H. S. of (3.2), thus having

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = ax^m u$$

Now, if we use Lemma 2 for the R. H. S. of this equation, then apply Lemma 3, we can easily find the particular integral of this equation. Also the complementary function is, by Lemma 1, $u(x)$. The complete solution of the last equation may be regarded as the second approximation and will be denoted by y_2.

Further, if we insert this expression for y_2 in the R. H. S. of (3.2) and use the above process we obtain the third approximation y_3, and so on for higher approximations.

The details of this method will be given in the following articles. We deal separately with the cases $m = 2$, $m = 3$.

4. The case m = 2

In this case the differential equation will be

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = ax^2y \tag{4.1}$$

Direct application of the method described in the previous article gives the following lemma.

Lemma 4. *The first three successive approximate solutions of the differential equation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = ax^2y,$$

may be written in the form

$$y_1 = u(x) \equiv u\,,$$

$$y_2 = y_1 + a\left\{\frac{u^{(5)}}{5} - 2\,\frac{u^{(2)}}{2}\right\},$$

$$y_3 = y_2 + a^2\left\{\frac{1}{5}\,\frac{u^{(10)}}{10} - \frac{17}{5}\,\frac{u^{(7)}}{7} + 10\,\frac{u^{(4)}}{4} - 2\,\frac{u^{(1)}}{1}\right\}.$$

This lemma leads to the following theorem.

Theorem 1. *Let y_n and y_{n+1} be the n^{th} and $(n+1)^{th}$ approximate solutions of the differential equation*

$$(\mathrm{D}^2 - x)\,y = ax^2y\,, \quad D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

Then $y_1 = u(x) \equiv u$,

$$y_{n+1} = y_n + a^nF_n\,\{u(x)\}\,, \quad n \geqslant 1\,,$$

where

$$F_n\{u(x)\} = a_{n,0}\,\frac{u^{(n)}}{5n} - a_{n,1}\,\frac{u^{(5n-3)}}{5n-3} + a_{n,2}\,\frac{u^{(5n-6)}}{5n-6}$$

$$- \ldots + (-)^i\,a_{n,i}\,\frac{u^{(5n-3i)}}{5n-3i} - \ldots.$$

$$+ (-)^p\,a_{n,p}\,\frac{u^{(5n-3p)}}{5n-3p},$$

with suitable expressions for $a_{n,i}$ and with p depending on n. In fact,

$$F_n\{u(x)\} = \sum_{i=0}^{p}\,(-)^i\,a_{n,i}\,\frac{u^{(5n-3i)}}{5n-3i},$$

where

$$p = 5N - 1 \qquad \textit{if } n = 3N,$$

$$p = 5N + 1 \qquad \textit{if } n = 3N + 1,$$

$$p = 5N + 3 \qquad \textit{if } n = 3N + 2.$$

Proof. By Lemma 4, we have

$$y_1 = u,$$

$$y_2 = y_1 + a\left\{\frac{u^{(5)}}{5} - 2\frac{u^{(2)}}{2}\right\}.$$

Thus the theorem is true for $n = 1$, where

$$a_{1,0} = 1, \quad a_{1,1} = 2.$$

We complete the proof by induction. Assume therefore that the theorem is true for some value of n, i. e. assume that

$$y_{n+1} = y_n + a^n F_n\{u(x)\}.$$

In order to obtain the $(n+2)^{th}$ approximation y_{n+2}, put $y = y_{n+1}$ in the R. H. S. of the differential equation

$$(D^2 - x)y = ax^2 y,$$

thus having

$$(D^2 - x)y = ax^2 y_{n+1},$$

i. e.

$$(D^2 - x)y = ax^2 y_n + a^{n+1} x^2 F_n\{u(x)\},$$

by assumption. The complete solution of this equation is y_{n+2}. It consists of two parts namely the complementary function $u(x)$ and the particular integral which may be obtained by applying the operator Θ^{-1} to the R. H. S. Thus

$$y_{n+2} = u = a\,\Theta^{-1}(x^2 y_n) + a^{n+1}\,\Theta^{-1}[x^2 F_n\{u(x)\}]. \tag{4.1}$$

Also y_{n+1} is the complete solution of the equation

$$(D^2 - x)y = ax^2\, y_n,$$

thus

$$y_{n+1} = u + a\,\Theta^{-1}(x^2 y_n). \tag{4.2}$$

Then if we insert (4.2) into (4.1), we obtain

$$y_{n+2} = y_{n+1} + a^{n+1}\,\Theta^{-1}[x^2 F_n\{u(x)\}]. \tag{4.3}$$

Moreover, if we multiply both sides of

$$F_n\{u(x)\} = \sum_{i=0}^{p} (-)^i a_{n,i} \frac{u^{(5n-3i)}}{5n-3i}$$

by x^2 and use Lemma 2 (i) for the R. H. S., we have

$$x^2F_n\{u(x)\} = \sum_{i=0}^{p} (-)^i \frac{a_{n,i}}{5n-3i} \cdot x^2 u^{(5n-3i)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{p} (-)^i \frac{a_{n,i}}{5n-3i} \{u^{(5n-3i+4)} - 2\,(5n-3i+1)\,u^{(5n-3i+1)} + (5n -$$

$$- 3i)\,(5n-3i-1)\,u^{(5n-3i-2)}\},$$

Then by applying the operator Θ^{-1}, and by using Lemma 3, we obtain

$$\Theta^{-1}[x^2F_n\{u(x)\}] = \sum_{i=0}^{p} (-)^i \frac{a_{n,i}}{5n-3i} \left\{ \frac{u^{(5n-3i+5)}}{5n-3i+5} - \right.$$

$$- 2(5n-3i+1)\,\frac{u^{(5n-3i+2)}}{5n-3i+2} +$$

$$\left. + (5n-3i)(5n-3i-1)\,\frac{u^{(5n-3i-1)}}{5n-3i-1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{5n}\,a_{n,0}\,\frac{u^{(5n+5)}}{5n+5} -$$

$$- \left\{ \frac{1}{5n-3}\,a_{n,1} + 2\,\frac{5n+1}{5n}\,a_{n,0} \right\} \frac{u^{(5n+2)}}{5n+2} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{p} (-)^i \left\{ \frac{1}{5n-3i}\,a_{n,i} + 2\,\frac{5n-3i+4}{5n-3i+3}\,a_{n,i-1} + \right.$$

$$\left. + (5n+5-3i)\,a_{n,i-2} \right\} \frac{u^{(5n+5-3i)}}{5n+5-3i} +$$

$$+ (-)^{p+1} \left\{ 2\,\frac{5n-3p+1}{5n-3p}\,a_{n,p} + (5n+2-3p)a_{n,p-1} \right\} \frac{u^{(5n+2-3p)}}{5n+2-3p} +$$

$$+ (-)^{p+2} \left\{ (5n-1-3p)a_{n,p-2} \right\} \frac{u^{(5n-1-3p)}}{5n-1-3p}$$

Now if we introduce the coefficients $a_{n+1,i}$ by

$$a_{n+1,i} = \frac{1}{5n-3i}\,a_{n,i} + 2\,\frac{5n-3i+4}{5n-3i+3}\,a_{n,i-1} + (5n+5-3i)a_{n,i-2}, \tag{4.4}$$

and set the following

$$\left.\begin{array}{ll} a_{n,i} = 0 & \text{for negative integral values of } i \\ a_{n,i} = 0 & \text{for } i > p \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

we obtain directly

$$a_{n+1,0} = \frac{1}{5n} a_{n,0}, \tag{4.6}$$

$$a_{n+1,1} = \frac{1}{5n-3} a_{n,1} + 2\frac{5n+1}{5n} a_{n,0}, \tag{4.7}$$

$$a_{n+1,p+1} = 2\frac{5n-3p+1}{5n-3p} a_{n,p} + (5n+2-3p)a_{n,p-1}, \tag{4.8}$$

$$a_{n+1,p+2} = (5n-1-3p)a_{n,p-2} \tag{4.9}$$

In this notation, we can write

$$\Theta^{-1}[x^2F_n\{u(x)\}] = \sum_{i=0}^{p+2} (-)^i a_{n+1,i} \frac{u^{(5n+5-3i)}}{5n+5-3i} = F_{n+1}\{u(x)\}. \tag{4.10}$$

Then, if we combine together (4.3) and (4.10), we obtain directly

$$y_{n+2} = y_{n+1} + a^{n+1}F_{n+1}\{u(x)\}.$$

Thus we have shown that if the theorem is true for a certain value of n, then it will be true for $n + 1$ in place of n; but the theorem is true for $n = 1$ and therefore it is true for all positive integral values of n. This completes the proof of the theorem.

Cor. 1.

$$a_{n+1,0} = \frac{1}{5^n n!}$$

This follows directly if we apply (4.6) in succession and remark that $a_{1,0} = 1$.

Cor. 2.

$$a_{n+1,i} = \frac{1}{5n-3i} a_{n,i} + 2\frac{5n-3i+4}{5n-3i+3} a_{n,i-1}$$
$$+ (5n+5-3i)a_{n,i-2}.$$

By means of this theorem, these two corollaries, and in virtue of (4.5) we can easily calculate the coefficients $a_{n,i}$ for all n and all possible values for i.

For instance, if $n = 1$, we have

$$a_{2,0} = \frac{1}{5},$$

$$a_{2,i} = \frac{1}{5 - 3i} a_{1,i} + 2 \frac{9 - 3i}{8 - 3i} a_{1,i-1} + (10 - 3i) a_{1,i-2}.$$

Now, if we remember that $a_{1,1} = 2$, $a_{1,0} = 1$, we obtain directly

$$a_{2,1} = \frac{17}{5}, \quad a_{2,2} = 10, \quad a_{2,3} = 2.$$

Thus for the third approximation y_3, we have

$$y_3 = y_2 + a^2 \left\{ \frac{1}{5} \frac{u^{(10)}}{10} - \frac{17}{5} \frac{u^{(7)}}{7} + 10 \frac{u^{(4)}}{4} - 2 \frac{u^{(1)}}{1} \right\}.$$

(see § 3, Lemma 4)

Similarly for $n = 2$, we have

$$a_{3,0} = \frac{1}{5^2\, 2} = \frac{1}{50},$$

$$a_{3,i} = \frac{1}{10 - 3i} a_{2,i} + 2 \frac{14 - 3i}{13 - 3i} a_{2,i-1} + (15 - 3i) a_{2,i-2}.$$

Then by using the coefficients already obtained for $n = 1$, we get directly

$$a_{3,1} = \frac{162}{175}, \quad a_{3,2} = \frac{169}{14}, \quad a_{3,3} = \frac{237}{5}, \quad a_{3,4} = 38.$$

Thus for the fourth approximation, we have

$$y_4 = y_1 + a^3 \left\{ \frac{1}{50} \frac{u^{(15)}}{15} - \frac{162}{175} \frac{u^{(12)}}{12} + \frac{169}{14} \frac{u^{(9)}}{9} - \frac{237}{5} \frac{u^{(6)}}{6} + 38 \frac{u^{(3)}}{3} \right\},$$

and so on for higher approximations.

5. The case $m = 3$

In this case the differential equation will be

$$(D^2 - x)\, y = a x^3 y.$$

Then by using the method of successive approximation described in § 3, we get

Lemma 5. *The first three successive approximate solutions of the differential equation*

$$(D^2 - x)\, y = ax^3y$$

are

$$y_1 = u,$$

$$y_2 = y_1 + a\left\{\frac{u^{(7)}}{7} - 6\,\frac{u^{(4)}}{4} + 2\,\frac{u^{(1)}}{1}\right\},$$

$$y_3 = y_2 + a^2\left\{\frac{1}{7}\,\frac{u^{(14)}}{14} - \frac{75}{14}\,\frac{u^{(11)}}{11} + \frac{373}{7}\,\frac{u^{(8)}}{8} - 141\,\frac{u^{(5)}}{5} + 52\,\frac{u^{(2)}}{2}\right\}.$$

This lemma leads to the following theorem.

Theorem 2. *Let y_n and y_{n+1} be the n^{th} and $(n+1)^{\text{th}}$ approximate solutions of the differential equation.*

$$(D^2 - x)y = ax^3y.$$

Then

$$y_1 = u,$$

$$y_{n+1} = y_n + a^n\, G_n\{u(x)\}, \quad n \geqslant 1,$$

where

$$G_n\{u(x)\} = \sum_{i=0}^{q} (-)^i b_{n,i}\, \frac{u^{7n-3i}}{7n-3i},$$

with suitable expressions for $b_{n,i}$ and with q depending on n. In fact

$$q = 7N - 1 \qquad \text{if } n = 3N,$$

$$q = 7N + 2 \qquad \text{if } n = 3N + 1,$$

$$q = 7N + 4 \qquad \text{if } n = 3N + 2.$$

Proof. By Lemma 5, we have

$$y_1 = u,$$

$$y_2 = y_1 + a\left\{\frac{u^{(7)}}{7} - 6\,\frac{u^{(4)}}{4} + 2\,\frac{u^{(1)}}{1}\right\}.$$

Thus the theorem is true for $n = 1$, where

$$b_{1,0} = 1, \quad b_{1,1} = 6, \quad b_{1,2} = 2.$$

The theorem can be established in general by induction. Assume therefore that the theorem is true for some value of n, thus assume that

$$y_{n+1} = y_n + a^n G_n\{u(x)\}.$$

Following the same process as in Theorem 1, we easily obtain

$$y_{n+2} = y_{n+1} + a^{n+1}\Theta^{-1}[x^3 G_n\{u(x)\}]. \tag{5.1}$$

Now if we multiply both sides of

$$G_n\{u(x)\} = \sum_{i=0}^{q} (-)^i \frac{b_{n,i}}{7n - 3i} u^{(7n-3i)}$$

by x^3 and use Lemma 2 (ii) for the R. H. S., we have

$$x^3 G_n\{u(x)\} = \sum_{i=0}^{q} (-)^i \frac{b_{n,i}}{7n - 3i} \,.\, x^3 u^{(7n-3i)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-)^i \frac{b_{n,i}}{7n - 3i} \{u^{(7n-3i+6)} - 3(7n - 3i + 2)u^{(7n-3i+3)} +$$

$$+ \omega(7n - 3i)u^{(7n-3i)} - (7n - 3i - 2)_3 u^{(7n-3i-3)}\}.$$

Then applying the operator Θ^{-1}, and using Lemma 3, we obtain

$$\Theta^{-1}[x^3 G_n\{u(x)\}] = \sum_{i=0}^{q} (-)^i \frac{b_{n,i}}{7n - 3i} \left\{\frac{u^{(7n-3i+7)}}{7n - 3i + 7} - 3\,\frac{7n - 3i + 2}{7n - 3i + 4} u^{(7n-3i+4)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega(7n - 3i)}{7n - 3i + 1} u^{(7n-3i+1)} - \frac{(7n - 3i - 2)_3}{7n - 3i - 2} u^{(7n-3i-2)}\right\},$$

but if we observe that

$$\frac{1}{7n - 3i} \; \frac{(7n - 3i - 2)_3}{7n - 3i - 2} = \frac{(7n - 3i - 2)_2}{7n - 3i - 2},$$

the above expression may be written

$$\Theta^{-1}[x^3 G_n\{u(x)\}] = \sum_{i=0}^{q} (-)^i b_{n,i} \left\{\frac{1}{7n - 3i} \; \frac{u^{(7n-3i+7)}}{7n - 3i + 7} - \right.$$

$$- 3\,\frac{7n - 3i + 2}{7n - 3i} \; \frac{u^{(7n-3i+4)}}{7n - 3i + 4} + \frac{\omega(7n - 3i)}{7n - 3i} \; \frac{u^{(7n-3i+1)}}{7n - 3i + 1} -$$

$$\left. - (7n - 3i - 2)_2 \frac{u^{(7n-3i-2)}}{7n - 3i - 2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{7n} b_{n,0} \frac{u^{(7n+7)}}{7n+7} - \left\{ \frac{1}{7n-3} b_{n,1} + 3 \frac{7n+2}{7n} b_{n,0} \right\} \frac{u^{(7n+4)}}{7n+4} +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{7n-6} b_{n,2} + 3 \frac{7n-1}{7n-3} b_{n,1} + \frac{\omega(7n)}{7n} b_{n,0} \right\} \frac{u^{(7n+1)}}{7n+1} +$$

$$+ \sum_{i=3}^{q} (-)^i \left\{ \frac{1}{7n-3i} b_{n,i} + 3 \frac{7n-3i+5}{7n-3i+3} b_{n,i-1} + \frac{\omega(7n-3i+6)}{7n-3i+6} b_{n,i-2} \right.$$

$$\left. + (7n-3i+7)_2 b_{n,i-3} \right\} \frac{u^{(7n+7-3i)}}{7n+7-3i} +$$

$$+ (-)^{q+1} \left\{ 3 \frac{7n-3q+2}{7n-3q} b_{n,q} + \frac{\omega(7n-3q+3)}{7n-3q+3} b_{n,q-1} + \right.$$

$$\left. + (7n-3q+4)_2 b_{n,q-2} \right\} \frac{u^{(7n+4-3q)}}{7n+4-3q} +$$

$$+ (-)^{q+2} \left\{ \frac{\omega(7n-3q)}{7n-3q} b_{n,q} + (7n-3q+1)_2 b_{n,q-1} \right\} \frac{u^{(7n+1-3q)}}{7n+1-3q} +$$

$$+ (-)^{q+3} \left\{ (7n-3q-2)_2 b_{n,q} \right\} \frac{u^{(7n-2-3q)}}{7n-2-3q}.$$

Now if we introduce the coefficients $b_{n+1,i}$ by

$$b_{n+1,i} = \frac{1}{7n-3i} b_{n,i} + 3 \frac{7n-3i+5}{7n-3i+3} b_{n,i-1} + \frac{\omega(7n-3i+6)}{7n-3i+6} b_{n,i-2} + $$
$$+ (7n-3i+7)_2 b_{n,i-3} \tag{5.2}$$

and set the following

$$\left. \begin{array}{ll} b_{n,i} = 0 & \text{for negative integral values of } i \\ b_{n,i} = 0 & \text{for } i > q \end{array} \right\} \tag{5.3}$$

we obtain directly

$$b_{n+1,0} = \frac{1}{7n} b_{n,0}, \tag{5.4}$$

$$b_{n+1,1} = \frac{1}{7n-3} b_{n,1} + 3 \frac{7n+2}{7n} b_{n,0}, \tag{5.5}$$

$$b_{n+1,2} = \frac{1}{7n-6} b_{n,2} + 3 \frac{7n-1}{7n-3} b_{n,1} + \frac{\omega(7n)}{7n} b_{n,0}, \tag{5.6}$$

$$b_{n+1,q+1} = 3\,\frac{7n - 3q + 2}{7n - 3q}\,b_{n,q} + \frac{\omega(7n - 3q + 3)}{7n - 3q + 3}\,b_{n,q-1} +$$
$$+ (7n - 3q + 4)_2 b_{n,q-2} \tag{5.7}$$

$$b_{n+1,q+2} = \frac{\omega(7n - 3q)}{7n - 3q}\,b_{n,q} + (7n - 3q + 1)_2 b_{n,q-1}, \tag{5.8}$$

$$b_{n+1,q+3} = (7n - 3q - 2)_2 b_{n,q}. \tag{5.9}$$

In this notation, we may write

$$\Theta^{-1}[x^3 G_n\{u(x)\}] = \sum_{i=0}^{q+3} (-)^i b_{n+1,i}\,\frac{u^{(7n+7-3i)}}{7n + 7 - 3i} = G_{n+1}\{u(x)\} \tag{5.10}$$

Then, if we combine together (5.1) and (5.10), we obtain directly

$$y_{n+2} = y_{n+1} + a^{n+1}\, G_{n+1}\{u(x)\}$$

The theorem is thus established by induction.

Cor. 1.

$$b_{n+1} = \frac{1}{7^{\,n} n!}$$

This follows directly if we apply (5.4) in succesion and remark that $b_{1,0} = 1$.

Cor. 2.

$$b_{n+1,i} = \frac{1}{7n - 3i}\,b_{n,i} + 3\,\frac{7n - 3i + 5}{7n - 3i + 3}\,b_{n,i-1} +$$
$$+ \frac{+\,\omega(7n - 3i + 6)}{7n - 3i + 6}\,b_{n,i-2} + (7n - 3i + 7)_2 b_{n,i-3}.$$

By means of this theorem and these two corollaries one can easily calculate the coefficients $b_{n,i}$ for all n and all possible values of i.

For instance if we take $n = 1$, we have

$$b_{2,0} = \frac{1}{7},$$

$$b_{2,i} = \frac{1}{7 - 3i}\,b_{1,i} + 3\,\frac{12 - 3i}{10 - 3i}\,b_{1,i-1} + \frac{\omega(13 - 3i)}{13 - 3i}\,b_{1,i-2} +$$
$$+ (14 - 3i)_2 b_{1,i-3}.$$

Then if we remark that

$$b_{1,0} = 1, \quad b_{1,1} = 6, \quad b_{1,2} = 2,$$

we obtain directly

$$b_{2,1} = \frac{75}{14}, \quad b_{2,2} = \frac{373}{7}, \quad b_{2,3} = 141, \quad b_{2,4} = 52.$$

Thus for the third approximation y_3, we have

$$y_3 = y_2 + a^2 \left\{ \frac{1}{7} \frac{u^{(14)}}{14} - \frac{75}{14} \frac{u^{(11)}}{11} + \frac{373}{7} \frac{u^{(8)}}{8} - 141 \frac{u^{(5)}}{5} + 52 \frac{u^{(2)}}{2} \right\}.$$

and so on for higher approximations.

References

[1] G. N. Watson *Theory of Bessel Functions*, 1958, § 6.4

[2] Mursi, Z. *On successive approximations of a given differential equation by means o Airy's integrals and its derivatives. Ph. D. Thesis, Alexandria University*, 1946.

Authors address: Mathematical Department, Faculty of Science Cairo University

Cairo U. A. R.

The Editor's office received On the 20-th November 1967

O riešení lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu pomocou Airyho integrálov

K. R. YACOUB a N. I. GIRGIS

Zhrnutie

V práci je uvedená metóda na výpočet približného riešenia diferenciálnej rovnice $\frac{d^2y}{dx^2} - (x + ax^m)\, y = 0$, $m = 2$ a 3 pomocou Airyho integrálov.

Резюме

О решений линейного дифференциального уравнения второго порядка при помощи интегралов Эйри

К. Р. ЯКУБ и Н. И. ДЖИРЖИС

В работе дан метод как найти приближенное решение дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + (x + ax^m)\, y = 0$, $m = 2$ и 3 при помощи интегралов Эйри.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XX, 1969]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XX — 1969

Eine quadratische Transformation

J. ČIŽMÁR

1. Es sei K der Körper der komplexen Zahlen (Grundkörper), Ω — ein Universalkörper (über K), S_n — ein n-dimensionaler projektiver Raum (über Ω) ($n \geqq 3$); $(X_0, \ldots, X_n)$ — ein System von homogenen Variablen, $(x_0, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ — ein Punkt aus S_n mit Koordinaten $x_i \in K$; ζ_i, $\eta_j, \ldots$ — über K transzendente Elemente aus Ω.

Die Punktkoordinaten seien immer gelegenweise normiert.

2. In dieser Arbeit wird eine birationale Transformation zwischen zwei Hyperebenen in S_n untersucht, die sich für $n = 3$ in [1] (Kap. II, S. 41) kurz syntetisch beschreibt befindet. Man untersucht das Problem in einer verallgemeinerten Form, die auch zu reicheren und vollkommeneren Resultaten führt. Im ersten Teil definiert man die Transformation und sucht die Transformationsgleichungen. Im zweiten Teil werden Fundamentalvarietäten und irreguläre Varietäten gefunden. Im dritten Teil wird das homaloidsche System, die Postulation, die Äquivalenz und die Abbildung der Unterräume untersucht.

I. Definition und Transformationsgleichungen

1. Es seien in S_n eine reguläre Quadrik

$$Q_{n-1} : \sum_{j=0}^{n} X_j^2 = 0, \tag{1}$$

zwei verschiedene in bezug auf die Quadrik Q_{n-1} zueinander nicht konjugierten Hyperebenen

$$^1S_{n-1} : X_0 + X_n = 0, \tag{2}$$

$$^2S_{n-1} : X_{n-1} + X_n = 0 \tag{3}$$

und zwei verschiedene auf der Quadrik Q_{n-1} liegenden Punkte $^1O = (1, 0, \ldots, 0, i)$, $^2O = (i, 0, \ldots, 0, 1)$ gegeben. Die Hyperebenen $^1S_{n-1}$, $^2S_{n-1}$ schneiden sich in einem durch die Gleichungen (2) + (3) gegebenen $(n - 2)$-dimensionalen Unterraum S_{n-2}. Die Gerade ${}^1O{}^2O$ schneidet die Hyperebenen ${}^1S_{n-1}$, ${}^2S_{n-1}$ der Reihe nach in Punkten ${}^1O'$, ${}^2O'$:

$$
{}^1O{}^2O \cap {}^1S_{n-1} \equiv {}^1O' = (1, 0, \ldots, 0, -1);
$$

$$
{}^1O{}^2O \cap {}^2S_{n-1} \equiv {}^2O' = (1, 0, \ldots, 0, 0).
$$

Die Tangentialhyperebenen der Quadrik Q_{n-1} in den Punkten ${}^1O$, ${}^2O$ der Reihe nach sind

$$
{}^1\tau : X_0 + iX_n = 0, \tag{4}
$$

$$
{}^2\tau : iX_0 + X_n = 0. \tag{5}
$$

Offenbar ist es ${}^1O \notin {}^1S_{n-1}$, ${}^1O \notin {}^2S_{n-1}$, ${}^2O \notin {}^1S_{n-1}$, ${}^2O \notin {}^2S_{n-1}$, ${}^1O' \notin S_{n-2}$, ${}^2O' \notin S_{n-2}$.

2. Eine Transformation $T : {}^1S_{n-1} \to {}^2S_{n-1}$ sei durch die folgende Zuordnung eines Punktes $(y) \in {}^2S_{n-1}$ zu einem Punkt $(x) \in {}^1S_{n-1}$ definiert:

Der Punkt (y) ist die Projektion eines von ${}^1O$ verschiedenen Schnittpunktes der Quadrik Q_{n-1} mit der Gerade $p^x \equiv {}^1O(x)$ aus dem Punkt ${}^2O$ in die Hyperebene ${}^2S_{n-1}$.

Bemerkungen:

1. Liegt p^x auf der Quadrik Q_{n-1}, so kann ein beliebiger von ${}^1O$ verschiedener Punkt der Gerade p^x als Schnittpunkt der Gerade p^x mit der Quadrik Q_{n-1} betrachtet werden.

2. Ist der Punkt ${}^2O$ ein Schnittpunkt der Gerade p^x mit Q_{n-1}, so wird ${}^2O$ aus ${}^2O$ durch eine beliebige Tangente der Quadrik Q_{n-1} im Punkt ${}^2O$ projiziert.

Die Transformation T ist (im Sinn von [2]) die Menge aller derjenigen Punkte $(x, y) \in {}^1S_{n-1} \times {}^2S_{n-1}$, für welche die Punkte $(x) \in {}^1S_{n-1}$ und $(y) \in {}^2S_{n-1}$ durch die eben beschreibte Zuordnung verknüpft sind.

3.

Satz I, 1. *T ist eine irreduzible quadratische birationale Korrespondenz zwischen den Hyperebenen ${}^1S_{n-1}$, ${}^2S_{n-1}$.*

Beweis. Man bezeichne durch ${}^1Q^f_{n-3}$ die $(n - 3)$-dimensionale Quadrik, die ein Durchschnitt der Varietäten ${}^1S_{n-1}$, ${}^1\tau$, Q_{n-1} ist. Sie ist durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
{}^1Q^f_{n-3} : X_0 + X_n &= 0,\\
X_0 + iX_n &= 0,\\
\sum_{j=0}^{n} X_j^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{6}
$$

gegeben.

Es sei ein Punkt $(x) \in {}^1S_{n-1}$, $(x) \not\equiv {}^1O'$, $(x) \notin {}^1Q'_{n-3}$, gegeben: $(x) = (x_0, \ldots, x_{n-1}, -x_0)$.

Im Parametersystem auf der Gerade p^x mit den Basispunkten ${}^1O$, (x) ist der zweite Schnittpunkt $(\bar{x})$ der Gerade p^x mit der Quadrik Q_{n-1} durch die Parameter

$$(k_1, k_2) = (2x_0^2 + \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2, \, 2(i-1)x_0)$$

eindeutig bestimmt. Also besitzt der Punkt $(\bar{x})$ Koordinaten:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= 2ix_0^2 + \sum_{n=1}^{j-1} x_j^2, \\ \bar{x}_j &= 2(i-1)x_0x_j, \quad j = 1, \ldots, n-1; \\ \bar{x}_n &= 2x_0^2 + i \sum_{n-1}^{j=1} x_j^2 \end{aligned} \tag{7}$$

und ist offenbar vom Punkt ${}^2O$ verschieden. Also ist die Gerade $p^{\bar{x}} \equiv {}^2O(\bar{x})$ eindeutig bestimmt und im Parametersystem auf ihr mit Basispunkten ${}^2O$, $(\bar{x})$ ist ihr Schnittpunkt (y) mit der Hyperebene ${}^2S_{n-1}$ durch die Parameter

$$(t_1, t_2) = \left(2x_0[x_0 + (i-1)x_{n-1}], \, i \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2\right)$$

gegeben, also besitzt er Koordinaten:

$$\begin{aligned} y_0 &= (1+i)x_0x_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2, \\ y_j &= (i-1)x_0x_j, \quad j = 1, \ldots, n-1; \\ y_n &= (1-i)x_0x_{n-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Formeln (8) drücken die Zuordnung $T : (x) \to (y)$ aus; man zeichnet auch $T(x) = (y)$.

In der umgekehrten Ordnung durchgeführte Schritte ordnen dem Punkt $(y) \in {}^2S_{n-1}$ den Punkt $(x) \in {}^1S_{n-1}$ zu; die Abhängigkeit der Koordinaten ist durch die Formeln

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2, \\ x_j &= (1+i)(iy_0 + y_n)y_j, \quad j = 1, \ldots, n-1; \\ x_n &= -\sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 \end{aligned} \tag{9}$$

gegeben. Diese Formeln werden als Gleichungen der Transformation $T^{-1} : (y) \to \to (x)$ gefaßt werden. Man zeichnet: $T^{-1}(y) = (x)$.

Einem allgemeinen Punkt $(\xi) \in {}^1S_{n-1}$ ist nach den Formeln (8) ein Punkt $(\eta) \in {}^2S_{n-1}$ zugeordnet, der ein allgemeiner Punkt der Hyperebene ${}^2S_{n-1}$ ist. Umgekehrt, einem allgemeinen Punkt $\vartheta \in {}^2S_{n-1}$ entspricht nach den Formeln (9) ein allgemeiner Punkt (ζ) der Hyperebene ${}^1S_{n-1}$. Also besitzt die Transformation $T : {}^1S_{n-1} \to {}^2S_{n-1}$ auch eine umgekehrte Transformation $T^{-1} : {}^2S_{n-1} \to {}^1S_{n-1}$ und dann spricht man einfach über die Korrespondenz T. Die Korrespondenz T ist fast überall auf ${}^1S_{n-1}$ auch ${}^2S_{n-1}$ definiert, nach den Formeln (8) und (9) ist sie birational und quadratisch. Da sie einen allgemeinen Punkt (ξ, η) [oder ζ, ϑ] besitzt, so ist sie irreduzibel.

II. Fundamentalvarietäten und irreguläre Varietäten

Die Menge aller Punkte, in denen die Korrespondenz T nicht holomorph ist, heißt Fundamentalvarietäten der Korrespondenz. Alle Punkte, in denen die Korrespondenz holomorph, aber nicht biholomorph ist, bilden irreguläre Varietäten.

1. Fundamentalvarietäten

Man bezeichne neben früher angeführten Bezeichnungen noch:

$$\begin{aligned} {}^2Q^f_{n-3} : X_{n-1} + X_n &= 0, \\ iX_0 + X_n &= 0, \\ \sum_{j=0}^{n} X_j^2 &= 0; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} {}^1Q^i_{n-2} : X_0 + X_n &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n-1} X_j^2 &= 0; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} {}^1S^i_{n-2} : X_0 + X_n &= 0, \\ X_0 + iX_n &= 0; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} {}^2Q^i_{n-2} : X_{n-1} + X_n &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n-1} X_j^2 &= 0; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} {}^2S^i_{n-2} : X_{n-1} + X_n &= 0, \\ iX_0 + X_n &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Bedeutung aller dieser Varietäten ist klar: ${}^2Q^f_{n-3} \subset {}^2S_{n-1}$ ist eine $(n-3)$-dimensionale Quadrik, ${}^1Q^i_{n-2}$ bzw. ${}^2Q^i_{n-2}$ sind $(n-2)$-dimensionale Quadriken in ${}^1S_{n-1}$ bzw. ${}^2S_{n-1}$, ${}^1S^i_{n-2} \subset {}^1S_{n-1}$ bzw. ${}^2S^i_{n-2} \subset {}^2S_{n-1}$ sind $(n-2)$-dimensionale Unterräume.

Man muß bemerken, daß das Gleichungssystem (6) mit einem System

$$X_0 = 0,$$

$$X_n = 0, \tag{6'}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} X_j^2 = 0 \tag{6'}$$

und das System (10) mit einem System

$$X_{n-1} + X_n = 0,$$

$$iX_0 + X_n = 0, \tag{10'}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} X_j^2 = 0$$

äquivalent ist.

Satz II, 1.

a) *Die Fundamentalvarietäten der Korrespondenz T in der Hyperebene ${}^1S_{n-1}$ sind:*

1. ${}^1Q^f_{n-3}$;

2. ${}^1O'$.

b) *Die Fundamentalvarietäten der Korrespondenz T in der Hyperebene ${}^2S_{n-1}$ sind:*

1. ${}^2Q^f_{n-3}$;

2. ${}^2O'$.

Beweis wird z. B. für die Fundamentalvarietäten der Hyperebene ${}^2S_{n-1}$ durchgeführt werden.

Damit die Formeln (9) für $x_0, \ldots, x_n$ lauter Null geben, ist es für Koordinaten des Punktes $(y) \in {}^2S_{n-1}$ notwendig und hinreichend:

$$y_{n-1} + y_n = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 = 0,$$

$$(iy_0 + y_n)y_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Es sind drei Fälle möglich:

1. $y_{n-1} + y_n = 0$,

$$y_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n-1;$$

$iy_0 + y_n = 0$;

daraus folgt es noch $y_n = 0$, $y_0 = 0$. Dieser Fall ist geometrisch sinnlos.

2. $y_{n-1} + y_n = 0$,

$$y_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n-1;$$

$iy_0 + y_n \neq 0$;

daraus folgt es $y_n = 0$, $y_0 \neq 0$ und das heißt: $(y) \equiv {}^2O'$.

3. $y_{n-1} + y_n = 0$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 = 0 \text{ und } y_j \neq 0 \text{ mindestens einmal für } j = 1, \ldots, n-1;$$

$iy_0 + y_n = 0$.

Diese Bedingungen führen zur Quadrik ${}^2Q^j_{n-3}$.

2. Irregulare Varietäten

Satz II, 2.

a) *Irreguläre Varietäten der Korrespondenz T in der Hyperebene ${}^1S_{n-1}$ sind:*

1. ${}^1Q^i_{n-2}$, *die durch T auf die Quadrik ${}^2Q^j_{n-3}$ abgebildet wird;*
2. ${}^1S^i_{n-2}$, *der durch T auf den Punkt ${}^2O'$ abgebildet wird.*

b) *Irreguläre Varietäten der Korrespondenz T in der Hyperebene ${}^2S_{n-1}$ sind:*

1. ${}^2Q^i_{n-2}$, *die durch T^{-1} auf die Quadrik ${}^1Q^j_{n-3}$ abgebildet wird;*
2. ${}^2S^i_{n-2}$, *der durch T^{-1} auf den Punkt ${}^1O'$ abgebildet wird.*

Beweis führt man z. B. für ${}^1Q^i_{n-2}$ und ${}^1S^i_{n-2}$ durch. Das direkte Einsetzen von (11) in (8) gibt die Punkte von ${}^2Q^j_{n-3}$ und keine Punkte außer ${}^1Q^i_{n-2}$ solche Eigenschaft besitzen.

Analog ist es mit dem Unterraum ${}^1S^i_{n-2}$ und seinem Bild ${}^2O'$ in der Transformation T.

3. Inzidenzbeziehungen zwischen Fundamental- und irregulären Varietäten

Satz II, 3. *Es gelten zwischen Fundamental- und irregulären Varietäten in der Hyperebene* ${}^1S_{n-1}$ *bzw.* ${}^2S_{n-1}$ *diese Beziehungen:*

1. a) ${}^1Q^f_{n-3} \subset {}^1Q^i_{n-2}$;

${}^1O' \in {}^1Q^i_{n-2}$;

b) ${}^1Q^f_{n-3} \subset {}^1S^i_{n-2}$;

${}^1O' \notin {}^1S^i_{n-2}$.

2. a) ${}^2Q^f_{n-3} \subset {}^2Q^i_{n-2}$;

${}^2O' \in {}^2Q^i_{n-2}$;

b) ${}^2Q^f_{n-3} \subset {}^2S^i_{n-2}$;

${}^2O' \notin {}^2S^i_{n-2}$.

Beweis. Die Behauptungen sind offenbar.

Weiter ist es offenbar:

1. ${}^1O' \notin {}^1Q^f_{n-3}$;

${}^1Q^i_{n-2} \cap {}^1S^i_{n-2} \equiv {}^1Q^f_{n-3}$.

2. ${}^2O' \notin {}^2Q^f_{n-3}$;

${}^2Q^i_{n-2} \cap {}^2S^i_{n-2} \equiv {}^2Q^f_{n-3}$.

4. Die Arten der Punkte auf den Fundamental- und irregulären Varietäten

Die Betrachtungen werden nur für die Punkte der Hyperebene ${}^1S_{n-1}$ durchgeführt werden.

Die Punkte der Fundamentalvarietäten in der Hyperebene ${}^1S_{n-1}$ sind von zwei Arten:

1. Für einen beliebigen Punkt $(x) \in {}^1Q^f_{n-3}$ liegt die ganze Gerade $p^x \equiv {}^1O(x)$ auf der Quadrik Q_{n-1} und nach der Bemerkung 2 in II, 2 kann jeder von ${}^1O$ verschiedene Punkt von p^x als ein Schnittpunkt der Gerade p^x mit der Quadrik Q_{n-1} betrachtet werden. Ein beliebiger Punkt der Gerade, die eine Schnittgerade der Ebene $(p^x, {}^2O)$ mit der Hyperebene ${}^2S_{n-1}$ ist, wird durch T^{-1} auf den Punkt (x) abgebildet. (Die gennante Gerade liegt auf der Quadrik ${}^2Q^i_{n-2}$.) Also auf den Punkt (x) wird eine Gerade der Fundamentalpunkte abgebildet.

2. Auf den Punkt ${}^1O'$ wird $(n-2)$-dimensionaler irreguläre Unterraum ${}^2S^i_{n-2}$ als ein Ganzes abgebildet.

Es geben keine anderen Arten der Fundamentalpunkte in $^1S_{n-1}$.

Einzelne irregulären Varietäten der Hyperebene $^1S_{n-1}$ werden als Ganzes auf zugehörige Fundamentalvarietäten der Hyperebene $^1S_{n-1}$ abgebildet. Die Punkte der irregulären Varietäten in $^1S_{n-1}$ sind von zwei Arten:

1. Diejenigen Punkte, die zugleich fundamental sind. Aus dem Satz II, 3 ist es klar, daß alle Fundamentalpunkte zu dieser Menge gehören. Die Bilder dieser Punkte können nicht eindeutig festgestellt werden.

2. Diejenigen Punkte, die rein irregulär, d. h. irregulär und nicht fundamental sind. Es sind die Punkte, die in den Mengen $^1Q^i_{n-2} - {}^1Q^f_{n-3} - {}^1O'$ (d. h. es gelten die Gleichungen (11) und $x_0 + ix_n \neq 0$, $x_j \neq 0$ mindestens einmal für $j = 1, \ldots, n-1$) und $^1S^j_{n-2} - {}^1Q^f_{n-3}$ (d. h. es gelten die Gleichungen (12) und $\sum\limits_{j=1}^{n-1} x_j^2 \neq 0$) liegen. Jeder von diesen Punkten hat ein einziges Bild in einer Fundamentalvarietät der Hyperebene $^2S_{n-1}$.

Dasselbe kann man auch über Fundamental- und irreguläre Punkte der Hyperebene $^2S_{n-1}$ sagen.

III. Homaloidsches System

1. Das Bild eines (n — 2)-dimensionalen Unterraumes $^aS_{n-2} \subset {}^1S_{n-1}$

Es sei durch die Gleichungen

$$X_0 + X_n = 0, \tag{15}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j X_j = 0, \quad a_j \in K,$$

ein $(n-2)$- dimensionaler Unterraum $^aS_{n-2}$ in $^1S_{n-1}$ gegeben, der den folgenden Bedingungen genügt:

a) $^1O' \notin {}^aS_{n-2}$, d. h. $a_0 - a_n \neq 0$;

b) $^1Q^f_{n-3} \subset {}^aS_{n-2}$, d. h. die Bedingungen

$$x_0 + ix_n = 0,$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^2 = 0$$

sind für nicht alle Punkte des Unterraumes $^aS_{n-2}$ erfüllt. Daraus folgt es noch, daß $^aS_{n-2} \neq {}^1S^i_{n-2}$ ist, d. h. $a_j \neq 0$ mindestens einmal für $j = 1, \ldots, n-1$ gilt.

c) $^aS_{n-2} \not\equiv S_{n-2}$.

Satz III, 1. *Durch die Transformation T entspricht es dem den Bedingungen* a)—c) *genügenden Unterraum $^aS_{n-2} \subset {}^1S_{n-1}$ eine irreduzible $(n-2)$-dimen-*

sionale Quadrik ${}^aQ_{n-2} \subset {}^2S_{n-1}$, die die Fundamentalvarietäten der Hyperebene ${}^2S_{n-1}$ enthält.

Beweis. Durch die Transformation T entspricht es dem Unterraum ${}^aS_{n-2}$ nach den Formeln (9) eine durch die Gleichungen

$$X_{n-1} + X_n = 0, \tag{16}$$

$$(a_0 - a_n) \sum_{j=1}^{n-1} X_j^2 + (1 + i)(iX_0 + X_n) \sum_{j=1}^{n-1} a_j X_j = 0$$

bestimmte Varietät der Hyperebene ${}^2S_{n-1}$. Es ist offensichtlich eine $(n - 2)$-dimensionale Quadrik ${}^2Q_{n-2}$.

1. Aus den Gleichungen (16), (10′) und Koordinaten des Punktes ${}^2O'$ ist es offenbar, daß die Quadrik ${}^aQ_{n-2}$ die Quadrik ${}^2Q^f_{n-3}$ und den Punkt ${}^2O'$ enthält.

2. Bei den gegebenen Voraussetzungen ist der Rang der Quadrik ${}^aQ_{n-2}$ größer als 2, weil die Unterdeterminate

$$\begin{vmatrix} 0 & a_j & a_k \\ a_j & 2(a_0 - a_n) & 0 \\ a_k & 0 & 2(a_0 - a_n) \end{vmatrix} = -2(a_0 - a_n)(a_j^2 + a_k^2)$$

der Quadriksdiskriminante mindestens für ein Paar (j, k) $(j = 1, \ldots, n - 2;$ $k = 2, \ldots, n - 1)$ von Null verschieden ist. Das heißt aber, daß die Quadrik ${}^aQ_{n-2}$ irreduzibel ist.

Es sei noch bemerkt, daß nicht alle homaloiden Quadriken ${}^2Q_{n-2}$ im Punkt ${}^2O'$ einen gemeinsamen $(n - 2)$-dimensionalen Tangentialunterraum besitzen (wie kann man durch direkte Berechnung überzeugen).

Satz III, 2. *Geht der Unterraum ${}^aS_{n-2}$ durch den Punkt ${}^1O'$ hindurch, so zerfällt die Quadrik ${}^aQ_{n-2}$ in zwei $(n - 2)$-dimensionale Unterräume: ${}^2S^i_{n-2}$ und ${}^aS'_{n-2} \subset {}^2S_{n-1}$.*

Beweis. Geht der Unterraum ${}^aS_{n-2}$ durch den Punkt ${}^1O'$ hindurch, so ist $a_0 - a_n = 0$ und die Quadrik ${}^aQ_{n-2}$ Gleichungen

$$X_{n-1} + X_n = 0, \tag{17}$$

$$(iX_0 + X_n) \sum_{j=1}^{n-1} a_j X_j = 0$$

besitzt, die eine in die Unterräume ${}^2S^i_{n-2}$ und

$${}^aS'_{n-2} : X_{n-1} + X_n = 0, \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j X_j = 0$$

zerfallende $(n - 2)$-dimensionale Quadrik darstellen.

Bemerkung. Ein einziger die Quadrik ${}^1Q^f_{n-3}$ enthaltende und durch die Gleichungen (12) bestimmte $(n-2)$-dimensionale Unterraum ist der irreguläre Unterraum ${}^1S^i_{n-2}$, der durch die Transformation T auf die Fundamentalquadrik ${}^2Q^f_{n-3}$ abgebildet wird.

2. Postulation

Die Fundamentalvarietäten in den Hyperebenen ${}^1S_{n-1}$, ${}^2S_{n-1}$ müssen bekannten Postulationsbedingungen genügen. Ein $(n-2)$-dimensionaler Unterraum ${}^aS_{n-2} \subset {}^1S_{n-1}({}^aS_{n-2} \not\equiv {}^1S^i_{n-2}, {}^aS_{n-2} \not\equiv S_{n-2}, {}^1O' \notin {}^aS_{n-2})$ ist durch $(n-1)$ linear unabhängige Punkte (die infundamental vorausgesetzt worden sein können) bestimmt. Eine dem Unterraum ${}^aS_{n-2}$ entsprechende Quadrik ${}^aQ_{n-2} \subset$ $\subset {}^2S_{n-1}$ ist durch die $(n-1)$ entsprechende Punkte eindeutig bestimmt. Da solche Quadrik insgesamt durch $\binom{n+1}{2} - 1$ für die Bestimmung der Quadrik unabhängige Punkte (d. h. durch $\binom{n+1}{2} - 1$ „einfache" Bedingungen) bestimmt ist, müssen die Fundamentalvarietäten der Hyperebene ${}^2S_{n-1}$ $\binom{n+1}{2} - 1 - (n-1) = \binom{n+1}{2} - n$ für die Bestimmung der Quadrik unabhängige Bedingungen vertreten.

Satz III, 3. *Die Postulation der Fundamentalvarietäten in ${}^2S_{n-1}$ ist dies:*

1. ${}^2Q^f_{n-3}: \binom{n}{2} - 1$;

2. ${}^2O' : 1$.

Beweis. Beide Behauptungen 1 und 2 sind offenbar. Es ist noch zu zeigen, daß $\binom{n}{2} - 1 + 1 = \binom{n+1}{2} - n$ ist. Das ist aber offensichtlich.

3. Invariante Varietäten

Eine notwendige Bedingung, damit eine Varietät $U \subset {}^1S_{n-1}$ invariant sei, ist $U \subset S_{n-2}$; das heißt für alle Punkte $(x) \in U$ die Erfüllung der Bedingungen: $x_0 = x_{n-1} = -x_n$.

a) Damit ein Punkt (x) invariant sei, muß

$$\varrho x_0 = (2+i)x_0^2 + \sum_{j=1}^{n-2} x_j^2,$$

$$\varrho x_j = (i-1)x_0 x_j, \quad j = 1, \ldots, n-2;$$

$$\varrho x_{n-1} = (i-1)x_0 x_{n-1} = (i-1)x_0^2 = \varrho x_0,$$

$$\varrho x_n = -(i-1)x_0^2 = -\varrho x_0, \quad \varrho \neq 0,$$

eintreten. Das ist aber unmöglich, da die Bedingungen

$$\varrho = (2+i)x_0,$$
$$\varrho = (i-1)x_0,$$
$$\varrho = -(i-1)x_0$$

nicht gleichzeitig erfüllt sein können, solange $x_0 \neq 0$ ist. Der Fall $x_0 = 0$ führt zum Fundamentalpunkt. Also gibt es keine in echtem Sinn invarianten Punkte.

b) Damit eines Varietät U als Ganzes invariant sei, muß sie einer notwendigen Bedingung genügen: $(U \times {}^1O) \cap Q_{n-1} = (U \times {}^2O) \cap Q_{n-1}$. Diese Bedingung ist offensichtlich auch hinreichend.

c) Z. B. invariant sind die Unterräume, welche die Durchschnitte des Unterraumes S_{n-2} mit den durch den Punkt ${}^1O'$ hindurchgehenden Unterräumen von ${}^1S_{n-1}$ sind. Ein solcher Unterraum ${}^1S_r$ ist durch die Gleichungen

$$ {}^1S_r : X_0 + X_n = 0, \tag{19}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j^{(h)} X_j = 0, \quad a_0^{(h)} - a_n^{(h)} = 0, \quad h = 1, \ldots, n-r-1;$$

bestimmt und der Durchschnitt ${}^1S_r \cap S_{n-2}$ ist durch die Gleichungen (19) + + (3) gegeben, die mit dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} X_0 + X_n &= 0, \\ X_{n-1} + X_n &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{(h)} X_j &= 0, \quad h = 1, \ldots, n-r-1, \end{aligned} \tag{20}$$

äquivalent sind.

Die dem Unterraum ${}^1S_r$ entsprechende Varietät besteht nach dem Satz III, 2 neben dem Unterraum ${}^2S_{n-2}^i$ aus einem Hyperebenendurchschnitt

$$X_{n-1} + X_n = 0, \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j^{(h)} X_j = 0, \quad h = 1, \ldots, n-r-1,$$

der einen r-dimensionalen Unterraum ${}^2S_r \subset {}^2S_{n-1}$ darstellt. Es ist offenbar ${}^1S_r \cap S_{n-2} \equiv {}^2S_r \cap S_{n-2}$, wie folgt es aus dem Vergleich des Systems (20) mit dem System (2) + (21).

4. Äquivalenz

Satz III, 4. *Die Äquivalenz der Fundamentalvarietäten in* ${}^2S_{n-1}$ *ist dies:*

1. ${}^2O' : 1$;

2. ${}^2Q^f_{n-3} : 2(2^{n-2} - 1)$.

Beweis.

1. Je zwei homaloide Quadriken haben im Punkt ${}^2O'$ einen einfachen Schnittpunkt.

2. $(n - 1)$ linear unabhängige und den bekannten Beschränkungen genügende Unterräume ${}^1S^{(j)}_{n-2} \subset {}^1S_{n-1}$ $(j = 1, \ldots, n - 1)$ schneiden sich in einem Punkt; er sei nicht fundamental. Die den Unterräumen ${}^1S^{(j)}_{n-2}$ entsprechenden Quadriken $Q^{(j)}_{n-2}$ müssen ebenso nur einen freien Schnittpunkt haben. Deshalb müssen die Fundamentalvarietäten $2^{n-1} - 1$ Schnittpunkte der Quadriken $Q^{(j)}_{n-2}$ $(j = 1, \ldots, n - 1)$ vertreten. Davon fällt es dem Punkt ${}^2O$ die Zahl 1 zu, also gehört der Rest $2^{n-1} - 2$ als Äquivalenz zur Quadrik ${}^2Q^f_{n-3}$.

5.

Es sei ein r-dimensionaler Unterraum $S_r \subset {}^1S_{n-1}$ durch die Gleichungen

$$X_0 + X_n = 0, \tag{22}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j^{(h)} X_j = 0, \quad h = 1, \ldots, n - r - 1,$$

(der Rang der Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ a_0^{(1)} & a_1^1 & \cdots\cdots & a_{n-1}^{(1)} & a_n^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^{(n-r-1)} & a_1^{(n-r-1)} & & a_{n-1}^{(n-r-1)} & a_n^{(n-r-1)} \end{vmatrix}$$

ist $n - r$) gegeben. Jeder von Unterräumen $S^{(h)}_{n-2}$ $(h = 1, \ldots, n - r - 1)$

$$S^{(h)}_{n-2} : X_0 + X_n = 0, \tag{23}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j^{(h)} X_j = 0,$$

genüge den Bedingungen a)—c) in III, 1.

Satz III, 5. *Das Bild eines solchen r-dimensionalen Unterraumes* $S_r \subset \subset {}^1S_{n-1}$ $(n-2 \geqq r \geqq 1)$ *ist nach der Abspaltung der Fundamentalvarietäten in* ${}^2S_{n-1}$ *eine r-dimensionale Quadrik* $Q_r \subset {}^2S_{n-1}$.

Beweis. Nach den Formeln (9) entspricht es jedem Unterraum $S_{n-2}^{(h)}$ $(h = 1, \ldots, n-r-1)$ eine Quadrik $Q_{n-2}^{(h)}$

$$Q_{n-2}^{(h)} : X_{n-1} + X_n = 0, \tag{24}$$

$$(a_0^{(h)} - a_n^{(h)}) \sum_{j=1}^{n-1} X_j^2 + (1+i)(iX_0 + X_n) \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{(h)} X_j = 0,$$

$$h = 1, \ldots, n-r-1.$$

Alle diese Quadriken haben die Fundamentalvarietäten gemeinsam und daneben schneiden sich noch in einer r-dimensionalen Varietät V_r, was aus dem Gleichungssystem (24) offenbar ist.

Alles, was ist noch zu zeigen, ist die Behauptung über die Ordnung der Varietät V_r.

Man wende zum Beweis eine vollständige Induktion nach $n - r - 1$ an.

1. a) $n - r - 1 = 1$, d. h. $r = n - 2$.

Für diesen Fall ist die Behauptung der Inhalt des Satzes III, 1.

b) $n - r - 1 = 2$, d. h. $r = n - 3$.

Man muß in diesem Fall ein allgemeines Verfahren feststellen, das im weiteren gebraucht werden wird.

Der $(n-3)$-dimensionale Durchschnitt $Q_{n-2}^{(1)} \cap Q_{n-2}^{(2)}$ enthält als eine $(n-3)$-dimensionale Komponente die Quadrik ${}^2Q_{n-3}^f$, deshalb muß er zerfallen. Man bezeichne: $V_{n-3} \equiv (Q_{n-2}^{(1)} \cap Q_{n-2}^{(2)}) - {}^2Q_{n-3}^f$. Ein in bezug auf V_{n-3} und ${}^2Q_{n-3}^f$ allgemeiner und den Punkt ${}^2O'$ nicht enthaltender Unterraum $S_2 \subset {}^2S_{n-1}$ schneidet die Quadrik ${}^2Q_{n-3}^f$ in zwei Punkten $({}^1y)$, $({}^2y)$ und die Quadriken $Q_{n-2}^{(1)}$, $Q_{n-2}^{(2)}$ in verschiedenen Kegelschnitten $Q_1^{(1)}$ bzw. $Q_1^{(2)}$.

$$S_2 \cap V_{n-3} \equiv (S_2 \cap Q_{n-2}^{(1)}) \cap (S_2 \cap Q_{n-2}^{(2)}) - (S_2 \cap {}^2Q_{n-3}^f) \equiv$$

$$\equiv (Q_1^{(1)} \cap Q_1^{(2)}) - [({}^1y), ({}^2y)].$$

Aber $({}^1y)$, $({}^2y) \in Q_1^{(1)}$, $Q_1^{(2)}$, also $(Q_1^{(1)} \cap Q_1^{(2)}) - [({}^1y), ({}^2y)] \equiv [({}^1x), ({}^2x)]$. Das heißt: V_{n-3} ist von der Ordnung 2.

Bemerkung. Solange $n \geqq 5$ ist, schneiden sich V_{n-3} und ${}^2Q_{n-3}^f$ in einer Varietät von der Dimension $\geqq n - 5$.

2. **Induktionsvoraussetzung:**

$V_{r+1} \equiv (Q^{(1)}_{n-2} \cap \ldots \cap Q^{(n-r-2)}_{n-2}) - {}^2Q^f_{n-3}$ ist eine $(r + 1)$-dimensionale Quadrik Q_{r+1}, d. h. ein in bezug auf sie allgemeiner $(n - r - 2)$-dimensionale Unterraum $S_{n-r-2} \subset {}^2S_{n-1}$ schneidet sie in zwei Punkten.

Es sei $V_r \equiv (Q^{(1)}_{n-2} \cap \ldots \cap Q^{(n-r-2)}_{n-2} \cap Q^{(n-r-1)}_{n-2}) - {}^2Q^f_{n-2} \equiv (Q^{(1)}_{n-2} \cap \ldots \cap Q^{(n-r-2)}_{n-2}) \cap (Q^{(n-r-2)}_{n-2}) \cap Q^{(n-r-1)}_{n-2}) - {}^?Q^f_{n-3} \equiv Q_{r+1} \cap Q_{n-3}$ bei der Voraussetzung $Q_{r+1} \subset Q^{(n-r-1)}_{n-2}$.

Für einen in bezug auf V_r und ${}^2Q^f_{n-3}$ allgemeinen Unterraum $S_{n-r-1} \subset {}^2S_{n-1}$ gilt es:

$$S_{n-r-1} \cap V_r \equiv (S_{n-r-1} \cap Q_{r+1}) \cap (S_{n-r-1} \cap Q_{n-3}) \equiv Q_1 \cap Q_{n-r-3}.$$

Q_1 bzw. Q_{n-r-3} ist eine 1- bzw. $(n - r - 3)$-dimensionale Quadrik auf der Quadrik $Q^{(n-r-2)}_{n-2}$. Der Durchschnitt $Q_1 \cap Q_{n-r-3}$ besitzt eine Dimension $\geqq 0$, also sind es entweder endlich viele Punkte oder $Q_1 \subset Q_{n-r-3}$. Wäre es $Q_1 \subset Q_{n-r-3}$ für jeden Unterraum S_{n-r-1}, so wäre es $Q_{r+1} \subset Q_{n-3} \subset Q^{(n-r-1)}_{n-2}$ gegen der Voraussetzung. Also $Q_1 \not\subset Q_{n-r-3}$. (25)

Die Zahl der gemeinsamen Punkte der Quadriken Q_1 und Q_{n-r-3} (auf der Quadrik $Q^{(n-r-2)}_{n-2}$) ist höchstens 2. Nämlich, die Quadrik Q_{n-r-3} liegt in einem bestimmten Unterraum S'_{n-r-2}. Hätten die Quadriken Q_1, Q_{n-r-3} mindestens drei Punkte gemeinsam, so läge die Ebene S'_2 des Kegelschnittes Q_1 im Unterraum S'_{n-r-2}, also $Q_1 \subset S'_{n-r-2}$. Wäre es $Q_1 \subset S'_{n-r-2}$, so wäre es $Q_1 \subset S'_{n-r-2} \cap Q^{(n-r-2)}_{n-2} \equiv Q_{n-r-3}$. Das ist aber im Widerspruch mit der Beziehung (25).

Schluß: Der Durchschnitt $Q_1 \cap Q_{n-r-3} \equiv S_{n-r-1} \cap V_r$ besteht höchstens aus zwei Punkten. Also ist die Ordnung von V_r gleich 2.

Literatur

[1] **H. P. Hudson:** *Cremona transformations, Cambridge, 1927*

[2] **S. Lang:** *Introduction to algebraic geometry, New York, 1958*

Adresa autora: Katedra geometrie PFUK, Šmeralova 2/b, Bratislava

Do redakcie došlo: 10. októbra 1967.

Istá kvadratická transformácia

J. ČIŽMÁR

Resumé

V práci sa skúma nasledujúca korešpondencia medzi dvoma rôznymi nadrovinami ${}^1S_{n-1}$, ${}^2S_{n-1}$ v S_n: Je daná regulárna nadkvadrika Q_{n-1}, na nej dva rôzne body ${}^1O$, ${}^2O$, ktoré neležia v nadrovinách ${}^1S_{n-1}$, ${}^2S_{n-1}$. Bodu $(x) \in {}^1S_{n-1}$ odpovedá priesečník nadroviny ${}^2S_{n-1}$ s priamkou ${}^2O(\bar{x})$, kde $(\bar{x}) \not\equiv {}^1O$ je spoločný bod nadkvadriky Q_{n-1} s priamkou ${}^1O(x)$.

Skúmajú sa otázky obvyklé pri biracionálnych transformáciách.

Об одном квадратическом преобразовании

Я. ЧИЖМАР

Резюме

В этой работе рассмотрено следующее соответствие между двумя разными гиперплоскостями ${}^1S_{n-1}$, ${}^2S_{n-1}$ в пространстве S_n: Пусть Q_{n-1} — неособенная квадрика, ${}^1O$, ${}^2O$ — две разные точки квадрики, не лежащие на гиперплоскостях ${}^1S_{n-1}$, ${}^2S_{n-1}$. Точке $(x) \in {}^1S_{n-1}$ отвечает точка пересечения гиперплоскости ${}^2S_{n-1}$ с прямой ${}^2O(\bar{x})$; здесь $(\bar{x}) \not\equiv {}^1O$ — точка прямой ${}^1O(x)$, лежащая на квадрике Q_{n-1}.

Рассмотрены вопросы, обыкновенно связанные с бирациональным преобразованием.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XX, 1969]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XX — 1969

Совместная номограмма трех канонических уравнений третьего номографического порядка

П. ГАЛАЙДА (P. GALAJDA)

И. А. Вильнер в работе [1] и в других своих работах разработал методы номографирования систем уравнений и функций комплексного переменного на базе метода бинарных полей и определителя Массо [2]. Эти методы расширяют класс номографируемых систем и аналитических функций.

И. А. Вильнер, разработал, что если имеем систему n уравненний с неизвестными

(1.1) $$x, y, z_1, z_2, \dots, z_n,$$

которую возьмем в виде

(1.2) $$f_1(x; y; z_1) = 0, \quad f_2(x; y; z_2) = 0, \dots, \quad f_n(x; y; z_n) = 0$$

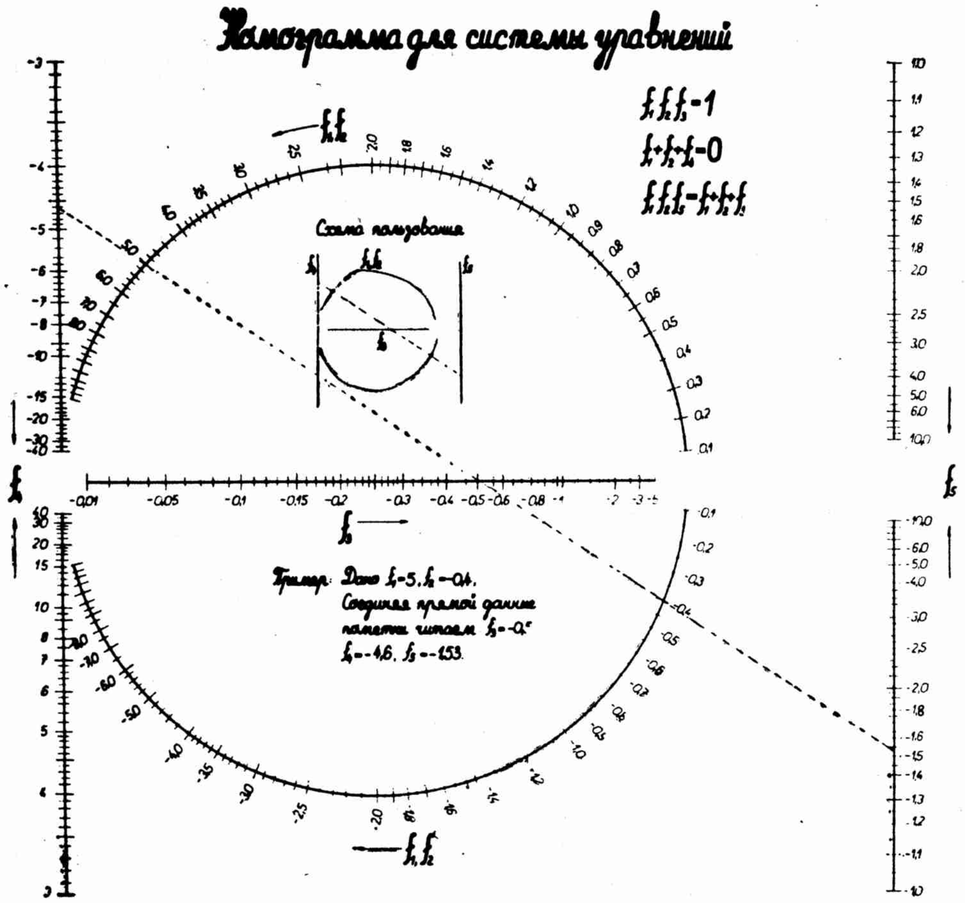
разрешима одним выравниванием. (Система не розрешается, если даны x и y и какое — нибуть из переменных $z_i (i = 1, 2, \dots, n)$).

Цель настоящей статьи построить совместную номограмму для системы трех канонических уравнений третьего номографического порядка

(1.3) $$\begin{aligned} f_1 f_2 f_3 &= 1 \\ f_1 + f_2 + f_4 &= 0 \\ f_1 f_2 f_5 &= f_1 + f_2 + f_5 \end{aligned}$$

Хотя номограмма для системы (1.3) проста, но все же не была построена.

Применяя все типы номограмм, которые можно построить для канонических уравнений системы (1.3) получаем, что система разрешима одним выравниванием на конической номограмме второго жанра, состоящей из пяти шкал. Шкалы z_1 и z_2 будут на одном коническом сечении. Шкала z_3 на прямой, пересекающей коническое сечение в двух различных действительных точках. Шкала z_4 на прямой касательной к коническому сечению в одной из двух точек пересчения шкалы z_3 с коническим сечением. На конец, шкала z_5 прямолинейная не пересекающая коническое сечение (черт. 1).



черт. 1.

При помощи различных преобразований уравнений, можно достигнуть того, что общим носителем кривых шкал для уравнений (1.3) будет служить окружность, что представляет большое удобство при вычерчивании номограммы.

В результате получаем уравнения шкал номограммы

(1.4)
$$\xi_1 = \frac{\alpha a}{a^2 + f_1^2}, \qquad \eta_1 = \frac{\alpha f_1}{a^2 + f_1^2};$$

$$\xi_2 = \frac{\alpha a}{a^2 + f_2^2}, \qquad \eta_2 = \frac{\alpha f_2}{a^2 + f_2^2};$$

$$\xi_3 = \frac{\alpha a}{a^2 - \dfrac{1}{f_3}}, \qquad \eta_3 = 0;$$

$$\xi_4 = 0, \qquad \eta_4 = -\frac{\alpha}{f_4};$$

$$\xi_5 = \frac{\alpha a}{a^2 - 1}, \qquad \eta_5 = \frac{\alpha}{(a^2 - 1) f_5},$$

где α — модуль а a — произвольное чи̑сло различное от ± 1.

Носителем первых двух шкал (z_1, z_2), опуская индексы является окружность

$$\eta^2 + \left(\xi - \frac{\alpha}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2a}\right)^2 \tag{1.5}$$

с центром на оси ξ на расстоянии $\frac{\alpha}{2a}$ от начала; окружность касается оси η. Третья шкала z_3 есть проективная шкала функции f_3, расположенная на оси ξ. Четвертая шкала z_4 есть проективная шкала функции f_4, расположенная на оси η, касающейся этой окружности. Пятая шкала z_5, проективная для функции f_5, расположена на прямой, параллельной оси η, на растоянии $\frac{\alpha a}{a^2 - 1}$ от нее и не пересекает окружность.

Номограмма черт. 1 была построена на основании уравнений шкал (1.4) а значение модуля выбрано $\alpha = 40$, $a = 2$. На номограмме разрешимы задачи пятих типов на определение трех из пятих величин по данным значениям двух других вуличин.

Пример. Для даного $f_1 = 5$, $f_2 = -0{,}4$; на номограмме читаем $f_5 = 1{,}53$, $f_4 = -4{,}6$, $f_3 = -0{,}5$.

Литература

[1] И. А. Вильнер: *Номограммы систем уравнений и аналитических функций. ДАН СССР, 58, № 5, (1947).*

[2] И. А. Вильнер: *Номографирование систем уравнений и аналитических функций. Номографический сборник (1951).*

[3] И. А. Вильнер и П. Галайда: *Неэлементарные соотношения уравнений третьего номографического порядка и их автоморофные преобразования.* Mat. fyz. časopis SAV, 14 (1964) č. 1, 6-43.

[4] Н. А. Глаголев: *Курс номографии. Изд. Высшая школа (1961).*

Adresa autora: Katedra matematiky SF VŠT Košice, Nám. Februárového víťazstva 9

Do redakcie došlo 15. apríla 1967

Spoločný nomogram troch kanonických rovníc tretieho nomografického rádu

P. GALAJDA

Výťah

V práci je zostrojený spoločný nomogram pre systém troch kanonických rovníc tretieho nomografického rádu.

The common nomogram of three canonical equations of the third nomographic genus

P. GALAJDA

Summary

In the paper, the common nomogram for the system of three canonical equations of third nomographic genus is constructed.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XX, 1969]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA XX — 1969

Some Convergence Theorems for Positive Operators

ATA AL-HUSSAINI

1 — Introduction:

Unless otherwise stated $(\Omega, \mathfrak{P}, \mu)$ will denote a σ-finite measure space, L_p or L_p $(\Omega, \mathfrak{P}, \mu)$ is the usual Banach space, $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ of real or complex valued functions.

T with or without subscripts will stand for a linear operator defined on $L_1 \cap L_\infty$ such that T is positive definite, satisfying $\|T\|_1 \leqslant 1$, $\|T\|_\infty \leqslant 1$. Thus we see at once that such a T has a bounded linear extension to L_p $(1 \leqslant \leqslant p < \infty)$, also denoted by T, satisfying $\|T\|_p \leqslant 1$ $(1 \leqslant p < \infty)$ using the Riez convexity theorem. (5)

For the operator defined above, the following:

$$\int (\sup|T^n f|)^p \leqslant K_p \int |f|^p \tag{1.1}$$

$p > 1$ is true, where K_p is independent of $f \varepsilon L_p$ for fixed p [7].

In section 4 we shall prove (1.1) by a method entirely different from that in (7).

BURKHOLDER AND CHOW (4) have shown that if $f \varepsilon L_2$ then $T^n f$ converges almost everywhere and in the norm of L_2 as $n \to \infty$. Later E. M. STEIN showed that these hold true for $f \varepsilon L_p$ $(1 < p < \infty)$.

We first give a proof concerning the convergence of $T^n f$, $f \varepsilon L_p$ $(1 < p < < \infty)$, then extend these results to the case $T_2^{n_2} T_1^{n_1} f$ where T_1, T_2 are not necessarily commutative.

We will actually show that $T_2^{n_2} T_2^{n_1} f$ converges almost everywhere, and in the norm of $L_p (1 < p < \infty)$ as $n_1, n_2 \to \infty$. In a later section we construct an example showing that $T_2^{n_2} T_1^{n_1} f$ diverges almost everywhere as n_1, $n_2 \to \infty$, when $f \varepsilon L_1$. We write $X \sim Y$ to mean that X and Y have the same distribution.

2 — **Case** $p > 1$:

$T^n f$ converges almost everywhere, and in the norm of L_p for $f \varepsilon L_p$ ($1 < < p < \infty$).

Proof: Considering T as acting in L_2, we take the square root of T and denote it by $T^{\frac{1}{2}}$, for which we have (2.1) $\sum_{n=1}^{\infty} n \, \| (T^{\frac{1}{2}})^n f - (T^{\frac{1}{2}})^{n+2} f \|^2 < \infty$ (using lemma (2) in (4)), which implies that $| T^n f - T^{n+1} f |$ converges to zero almost everywhere as $n \to \infty$.

Let

$$M_1 = \{ f \varepsilon L_2 : Tf = f \}$$

$$M_2 = \{ g : g = f - Tf, \, f \varepsilon L_2 \}.$$

It is known that $M_1 + M_2$ is dense in L_2, and that $L_1 \cap L_\infty$ is dense in L_p ($1 \leqslant p \leqslant \infty$). Thus it follows from Banach's theorem (page 332 [5]) that $T^n f$ converges almost everywhere [using (1.1)] as $n \to \infty$.

Applying (1.1) again and the Lebesgue dominated convergence theorem, $T^n f$ converges in the norm of L_p ($1 < p < \infty$) as $n \to \infty$ also.

Remark 2.1:

Let Q denote the strong limit of T^n as $n \to \infty$, i. e. $T^n f$ converges to Qf in the norm of L_p ($1 < p < \infty$). Then it is easily seen that: $TQ = QT = Q$. Before proceeding to prove anything concerning $T_1^{m_1} T_2^{m_2} f$, $f \varepsilon L_p$ ($1 < p < \infty$), we establish the following lemma.

Lemma 2.1:

Let T be a self-adjoint operator in $L_1 \cap L_\infty$ whose L_1 and L_∞ norms do not exceed one. Then there is a positive ($Pf \geqslant 0$ if $f \geqslant 0$) self-adjoint operator P in L_p ($1 \leqslant p < \infty$) whose L_1 and L_∞ norms do not exceed those of T, such that:

$$|T^n f| \leqslant P^n |f|, \; f \varepsilon L_p \; (1 \leqslant p < \infty)$$

Proof: For $\varepsilon \leqslant f \varepsilon L_1 \cap L_\infty$, as in Lemma 4 (page 672 [5]) we define:

$$Pf = \operatorname*{ess.\,sup}_{|g| \leqslant f} RT\,g = \operatorname*{ess.\,sup}_{|g| \leqslant f} |Tg|$$

Using the same lemma, and Riez convexity theorem, and by the usual arguments, we see that P is positive and $|T^n f| \leqslant P^n |f|$ $f \varepsilon L_p$ ($1 \leqslant p < \infty$) satisfying $\|P\|_1 \leqslant 1$, $\|P\|_\infty \leqslant 1$.

It remains to prove that P is self-adjoint. Let $0 \leqslant f_1, f_2 \in L_1 \cap L_\infty$, $\varnothing_N$ be the indicator function of A_N where $A_1 \subset A_2 - \subset A_N \to \Omega$, and $\mu(A_N) < < \infty$. Now $\int Pf_1 . f_2 = \int \operatorname{ess\,sup}_{|g| \leq f} RTg . f_2 = \int \sup_n RTg_n . f_2$

$$= \lim_{N \to \infty} \int \sup_{1 \leq n \leq N} RTg_n . f_2$$

for some choice of $g_1, g_2, \ldots; g_1 = 0$, and $|g_n| \leqslant f_1$.

But $\int \sup_{1 \leq n \leq N} RTg_n . f_2 . \varnothing_N = \int \sum_{n=1}^{N} RTg_n . f_2 . hnN$ for some choice of hnN $(n = 1, \ldots N)$ satisfying:

$$0 \leqslant hnN, \sum_{n=1}^{N} hnN \leqslant 1$$

$$\sum_{n=1}^{N} hnN = 0 \text{ if } \sup RTg_n = 0$$

or if outside A_N.

Thus $\sum_{n=1}^{N} hnN$ is an integrable, bounded and:

$$\int \sup_{1 \leq n \leq N} RTg_n . f_2 . \varnothing_n = \sum_{n=1}^{N} R \int Tg_n . f_2 . hnN$$

$$= \sum_{n=1}^{N} R \int g_n . T(f_2 . hnN)$$

(since T is self-adjoint)

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} \int |f_1| \, |T(f_2 . h_{nN})|$$

$$\leqslant \sum_{1=1}^{N} \int |f_1| \, P(f_2 . hnN)$$

$$\leqslant \int f_1 . Pf_2$$

therefore $\int Pf_1 . f_2 \leqq \int f_1 . Pf_2$. By the symmetry we have $\int Pf_1 . f_2 = = \int f_1 . Pf_2$.

For general $f_1, f_2 \in L_1 \cap L_\infty$ we write $f_n = (Rf_n)^+ - (Rf_n)^- + i(If_n)^+ - - i(If_n)^-$ $n = 1, 2$. Using the continuity of inner product, P is self-adjoint in $L_2(\Omega, \mathfrak{P}, \mu)$.

Theorem 2.2

$T_2^{n_2} T_1^{n_1} f$ converges almost everywhere and in the norm of L_p for $f \varepsilon L_p$ $(1 < < p < \infty)$; as n_2, $n_1 \to \infty$.

Proof: Let $M_1 = \{f \varepsilon L_2 : T_1 f = f\}$ $M_2 = \{f - T_1 f : f \varepsilon L_2\}$. Put $g = = f_1 + f_2$, $f_1 \varepsilon M_1$, $f_2 \varepsilon M_2$. Now $T_2^{n_2} T_1^{n_1} f_1$ converges almost everywhere as n_1, $n_2 \to \infty$ (using theorem 2.1). Using the same theorem $T_2^{n_2} T_1^{n_1} f_2$ converges almost everywhere for each n_1 as $n_2 \to \infty$. According to (1—1),

$$\int (\sup_{n_2} |T_2^{n_2} T_1^{n_1} f_2|)^2 \leqslant K_2 \int |T_1^{n_1} f_2|^2.$$

Applying (2.1) we have:

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \int \ (\sup_{n_2} |T_2^{n_2} T_1^{n_1} f_2|)^2 \leqslant K_2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \int |T_1^{n_1} f_2|^2 < \infty$$

from which it follows that $T_2^{n_2} T_1^{n_1} f_2$ converges almost everywhere as $n_1 \to \infty$, uniformly in n_2.

Thus $T_2^{n_2} T_1^{n_1} g$ converges almost everywhere as n_1, $n_2 \to \infty$ for g in a dense subset of L_2. Now let $f \varepsilon L_p$ $(1 < p < \infty)$, P_1, P_2 related to T_1 and T_2 through Lemma (2.1).

Now

$$|T_2^{n_2} T_1^{n_1} f| \leqslant P_2^{n_2} P_1^{n_1} |f|$$

Therefore

$$\sup_{n_1, n_2} |T_2^{n_2} T_2^{n_1} f| \leqslant \sup_{n_2} P_2^{n_2} \sup_{n_1} P_1^{n_1} |f| < \infty \ \text{[using (1.1)]}.$$

By Banach's theorem (page 332 [5]) $T_2^{n_2} T_1^{n_1} f$ converges almost everywhere as n_1, $n_2 \to \infty$. Using (1—1) once more and the Lebesgue dominated convergence theorem, $T_2^{n_2} T_2^{n_1} f$ converges in the norm of L_p $(1 < p < \infty)$.

3 — Case $p = 1$:

In this section we obtain first some results concerning non-atomic probability spaces, on the basis of which we extend a theorem due to Blackwell and Dubins [1], which will be used later in the connection with an example constructed for $p = 1$ case.

Lemma 3.1

Let $(\Omega, \mathfrak{P}, P)$ be a non-atomic probability space, X be a countable valued random variable defined on Ω. Then there is a sequence of random variables W_1, W_2, ..., such that each W_i is uniformly distributed over $[0, 1)$, and such that X, W_1, W_2, ... are independent.

Proof: It follows from the hypothesis that there is a set I of positive integer, and a set $\{\alpha_i : i \varepsilon I\}$ of distinct numbers such that $\Omega_i = \{X = \alpha_i\}$ has a positive probability, $P(\Omega - \bigcup_{i \varepsilon I} \Omega_i) = 0$

Let $\mathfrak{P}_i = \{A \cap \Omega_i \mid A \varepsilon \mathfrak{P}\}$; define:

$$P_i(B) = \frac{P(B)}{P(\Omega_i)} \quad B \varepsilon \mathfrak{P}_i, \quad i \varepsilon I.$$

It is easy to see that $(\Omega_i, \mathfrak{P}_i, P_i)$ are non-atomic probability spaces, so by the theory of non-atomic spaces there are random V_i $(i \varepsilon I)$ defined on Ω_i $(i \varepsilon I)$ such that:

$$P_i[V_i \leqslant t] = t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Define $U(\omega) = V_i(\omega)$ if $\omega \varepsilon \Omega_i$ $i \varepsilon I$

$= 0$ otherwise

We will show that U is uniformly distributed over the unit interval and X, U are independent. Let t be any number in the unit interval, and suppose s is any real number.

$$\begin{aligned} \text{Now } P[U \leqslant t, X \leqslant s] &= \sum_{\alpha_i \leq s} P[U \leqslant t, x = \alpha_i] \\ &= \sum_{\alpha_i \leq s} P[V_i \leqslant t, x = \alpha_i] \text{ (using the definition of } U) \\ &= \sum_{\alpha_i \leq s} P_i[V_i \leqslant t]\, P(\Omega_i) \\ &= tP[X \leqslant s] \end{aligned}$$

This shows that U and X are independent and U is uniformly distributed over the unit interval. Now let $S_1, S_2, \ldots$ be a sequence of independent random variables defined on the unit interval, such that each S_i is uniformly distributed over the unit interval.

Set $W_i = S_i(U)$, it is easy to verify that X, W_1, W_2, ... meets our requirement.

Theorem 3.1

Let $(\Omega, \mathfrak{P}, P)$ be a non-atomic probability space. Suppose $f_1, f_2, \ldots$ is a sequence of non-negative integrable functions, f_n converges to f almost everywhere, and $E \sup_n f_n = \infty$. Then there is a sub-σ-field β such that $E\{f_n | \beta\}$ diverges almost everywhere as $n \to \infty$.

Blackwell and **Dubius** assume less and obtain somewhat less as a conclusion. They do not assume that the space is non-atomic. They conclude that there is some possibly different probability space (Ω^*, $\mathfrak{P}^*$, P^*) on which is defined a sequence $f_3^*, f_2^*, \ldots \sim f_1, f_2, \ldots$ and for which there is some σ-field $\beta^* \subset \mathfrak{P}^*$ such that $E\{_n^*|\beta^*\}$ diverges almost everywhere as $n \to \infty$.

Proof: The proof is divided into several parts:

(i) **Blackwell** and **Dubius**, [1]). We can and do assume that each f_n takes only on two values 0, $v_n > 0$ satisfying:

(a) $0 < P[f_n = v_n] < 1$

(b) At every point ω exactly one of $f_n(\omega)$ is positive.

(ii) We can assume that v_n, are distinct, for if not we can change some of v_n, in an obvious way.

To the sequence $f_1, f_2, \ldots$ there correspond two sequences $f_1^*, f_2^*, \ldots$ and $Z_1, Z_2, \ldots$ of random variables defined on some probability space, satisfying:

$f_1^*, f_2^*, \ldots \sim f_1, f_2, \ldots$, and $E\{f_n^* \mid \beta^*\}$ diverges almost everywhere as $n \to \infty$; where β^* is the sub -σ-field generated by $Z_1, Z_2, \ldots$ We will actually show that there exists a σ-field $\beta \subset \mathfrak{P}$ such that $E\{f_n \mid \beta\}$ diverges almost everywhere as $n \to \infty$. To this end let $g^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*$ then obviously $g^* \sim g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. By ($i$) g is countable valued; so using Lemma (3.1) and a method essentially due to **Levy**, we construct a sequence $Z_1', Z_2', \ldots$ of random variables defined on Ω such that $(g^*, Z_1, Z_2, \ldots) \sim (g, Z_1', Z_2', \ldots)$. Using ($ii$) that is since v_1, $v_2, \ldots$ are distinct it follows that:

$$f_n = g \cdot I_{\{v_n\}}(g) = \psi_n(g) \quad \text{and} \quad f_n^* = g_n^* \cdot I_{\{v_n\}}(g^*) = \psi_n(g^*)$$

Now since $(g^*, Z_1', Z_2', \ldots) \sim (g, Z_1', Z_2', \ldots)$ it follows that $(\psi_1(g), \psi_2(g), \ldots, Z_1', Z_2', \ldots) \sim \psi_1(g^*), \psi_2(g^*), \ldots, Z_1, Z_2, \ldots)$. That is:

$$(f_1, f_2, \ldots; Z_1', Z_2', \ldots) \sim (f_1^*, f_2^*, \ldots; Z_{,1}, Z_2, \ldots)$$

and consequently $E\{f_n|P\}$ diverges almost everywhere as $n \to \infty$, where β is the sub-σ-field generated by $Z_1', Z_2'; \ldots$

We now proceed to construct the example we have promised. Let Ω be the set of integers and μ be the counting measure. Define U as follows:

$$Ug(\omega) = g(\omega + 1), \ \omega \in \Omega, \ g \in L_1$$

Thus

$$U^{-1}g(\omega) = g(\omega - 1), \ \omega \in \Omega, \ g \in L_1.$$

Let $S = \left(\dfrac{U^{-1} + U}{2}\right)^2$. It is easily verified that this operator S is positive, positive definite in L_2, and $\|S\|_1 \leqslant 1$, $\|S\|_\infty \leqslant 1$.

Theorem 3.2

There exists $f \varepsilon L_1$ such that $S^n f$ converges to zero as $n \to \infty$, and $\int \sup_n S^n f = \infty$.

Proof: Since $L_1 \subset L_2$, it follows that $S^n f$ converges to Qf as $n \to \infty$ (by theorem 2.1).

Upon noticing remark (2.1) we have

$$\left(\frac{U^{-1} + U}{2}\right)^2 Qf = Qf$$

which says that $Qf(\omega - 2) + Qf(\omega + 2) \text{ t}= 2Qf(\omega)$ that is $Qf = a\omega + b$ for even integers ω. But Qf is integrable, thus $a = b = 0$. By similar argument for odd ω' s we conclude that $Qf = 0$.

Let f be any non-negative function, $\int f > 0$, then $\int \sup_n S^n f = \infty$ if not, then by the Lebesgue dominated convergence theorem and definition of S we have:

$$0 < \int f = \int S^n f \to \int 0 = 0$$

a contradiction.

The following theorem shows the existence of T_1, T_2 as defined in section (1) which for some $f \varepsilon L_1(\Omega, \mathfrak{P}, u)$ is such that $\lim_{n_1, n_2 \to \infty} T_2^{n_2} T_1^{n_1} f = \infty$ a.e.

Theorem 3.3

There exist two linear operators T_1, T_2 in L_1 of the Lebesgue unit interval, such that both are positive, positive definite in L_2, and $\|T_i\|_1 \leqslant 1$, $\|T_i\|_\infty \leqslant 1$ $i = 1, 2$, for which $T_2^{n_2} T_1^{n_1} f$ diverges everywhere for some $f \varepsilon L_1$, as $n_1, n_2 \to \infty$.

Proof: By theorem (3.2), for each positive integer k there exists an $n_k \times n_k$ symmetric, positive definite, sub-stochastic matrix A_k satisfying

$$\int_{\Omega_k} \sup_n A_k^n f_k > 2^k$$

for some f_k. Where $\Omega_k = \{1, \ldots, n_k\}$ and the integration is with respect to the uniform probability on Ω_k.

Now divide the unit interval into subintervals I_r, $(r = 1, 2, \ldots)$ in such a way that $I_1 = [0, \frac{1}{2})$, $I_2 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $I_3 = [\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$, ... Divide each I_r into n_r equal subintervals I_{rs} $(s = 1, \ldots, n_r)$. With the A_r we associate the set $I_r \times I_r = \bigcup_{s,t=1}^{n_r} I_{rs} \times I_{rt}$

If

$$A_r = \begin{pmatrix} a^r_{11} & \ldots & a^r_{1n_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a^r_{n_r1} & \ldots & a^r_{n_rn_r} \end{pmatrix}$$

we define $t_r(x, y) = a^r_{st}$ when $(x, y) \varepsilon I_{rs} \times I_{rt}$ $(s, t = 1, 2 \ldots n_r)$.

$$= 0 \text{ otherwise:}$$

Let $t(x\ y) = \sum_{r=1}^{\infty} t_r(x, y)$, $(x, y) \varepsilon [0, 1) \times [0, 1)$,

then $Tf(x) = \int_0^1 t(x, y) f(y)\, d\mu$, $f \varepsilon L_1$, and μ is the Lebesgue measure; is positive and positive definite, with $\|T\|_1 \leqslant 1$, $\|T\|_\infty \leqslant 1$.

Let $f_1, f_2, \ldots$ as in the beginning of the proof, $g_r(x) = f_r(i)$ $i = 1, \ldots n_r$, $x \in I_{r_i}$

$$= \text{otherwise}$$

Set $f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} g_r(x)$ then we see that $\int_0^1 \sup_n T^n f(x)\, d\mu = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{I_r} \sup_n T^n f(x)\, d\mu$

$$> \sum_{\infty}^{r=1} \frac{2^r}{2^r} = \infty$$

where μ is the Lebesgue on the unit interval. Let $T_1 = T$, T_2 be the conditional expectation of Theorem 3.1. Apply theorem 3.1, the proof is complete.

4 — On A Maximal Inequality:

Here we give a different proof of (1.1), which was required in section (2). We first prove the result for a simple case, using ideas of Rota [6] and others. The general case is then obtained by approximation.

Theorem 4.1

Let $\Omega_0 = \{1, 2, \ldots, r\}$, P_0 be a uniform probability measure on Ω_0, $Tf(j) = \sum_{k=1}^{r} P_{jk} f(k)$ where (P_{ij}) is symmetric matrix of order r, and $f \varepsilon L_p$ $(p > 1)$.

Then:

$$\int_{\Omega_0} \sup_n (|T^n f|)^p \, dP_0 \leqslant 2 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{\Omega_0} |f|^p \, dP_0$$

Proof: Let X_0, X_1, X_2, ... be the usual corresponding Markov process, having P_0 for its initial distribution, and (P_{ij}) for the transition probabilities. For $f \varepsilon L_p$ $(p > 1)$, let g_n denote the following expectation:

$$g_n = E\{f(X_0) \mid X_n, X_{n+1}, \ldots\}$$

$\{g_n\}$ is martingale, $g_n = f(X_0) \mid X_n t$ since X_0, X_1, X_2, ... is Markov process. By the definition of conditional expectation, and the symmetry of T

$$(T^{2n} f)(X_0) = E\{g \mid X_0\}.$$

Now:

$$\int_{\Omega_0} |\sup_n| \, T^{2n} f \, || \, ^p \, dP_0 = \int_{\Omega} |\sup| \, T^{2n} f(X_0) \, ||^p \, dP$$

where P is the usual probability measure, with respect to which X_0, X_1, X_2, ... is a Markov process. Then

$$\int_{\Omega} \sup_n |T^{2n} f(X_0)|^p \, dP \leqslant \int_{\Omega} |E\{\sup_n| \, g_n \, || \, X_0\}|^p \, dP$$

$$\leqslant \int_{\Omega} |\sup_n| \, g_n \, ||^p \, dP$$

(Since $E\{. | X_0\}$ is an operator in L_p with norm $= 1$). The above is less than or equal to $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{\Omega} |f(X_0) \,|^p \, dP$ by the use of martingale theory, and this is now equal to

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{\Omega_0} |f|^p \, dP_0$$

A similar result is true for $T^{2n+1} f = T^{2n} T f$; the two inequalities imply the desired result for $T^n f$.

We now go to the general case. Let T, $(\Omega, \mathfrak{P}, \mu)$ be as in section (1). We need to show that for $N = 1, 2, \ldots$

$$\int |\sup_{0 \leq n \leq N} |T^n f \, |^p \leqslant 2 \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int |f|^p$$

Let $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \to \Omega$ be a sequence of measurable sets, satisfying $\mu(A_k) < < \infty$ $k = 1, 2, \ldots$, and U_k be the operation of multiplication by the indicator function of A_k. Let us take $T_k = U_k T U_k$, $f_k = U_k f$.

For fixed N we have:

$$\int_{\Omega} (\sup_{0 \leq n \leq N} |T^n f|)^p \leqslant \sup_k \int_{A_k} (\sup_{0 \leq n \leq N} |T^n_k f_k|)^p, \tag{4.1}$$

Since $T^n_k f$ converges to $T^n f$ in the norm of L^p for each fixed n, as $k \to \infty$. On the other hand $\int |f_k|^p \leqslant \int |f|^p$, all k. Thus it suffices to take $\mu(\Omega) = 1$, T, N, f as before (Some ideas of the proof are analogous to those of a similar proof in [2]). Let $B_1, B_2, \ldots$ be a sequence of sets in such that $\{T^n f\}_{n=1}^{N}$, is measurable with respect to the smallest σ-field generated by $B_1, B_2, \ldots$. Let β_k be the smallest σ-field generated by $\{B_1, \ldots B_k\}$. Then we may write:

$$U_k = E\{.|\beta_k\}, \; T_k = U_k T U_k, \; f_k = U_k f.$$

Since $T^n_u f \to T^n f$ in the norm of L_p for each fixed n as $k \to \infty$, we again have (4.1). Thus $\mathfrak{P}$ can be considered finite, and by splitting the measure placed on each point of Ω, and approximating if necessary, we may and do assume that $(\Omega, \mathfrak{P}, \mu)$ is a uniform probability over $\{1, 2, \ldots, r\}$ where r is a positive integer. Let T, f, N be as before. Then:

$$T^n f(j) = \sum_{k=1}^{r} a^{(n)}_{jk} f(k), \quad j = 1, \ldots r, n = 1, 2, \ldots$$

Where $(a^{(n)}_{jk})$ is the n-the power of a matrix (a_{jk}). Let $P_{jk} = |a_{jk}|$, $j \neq k$ and define P_{jj} by $\sum_{k=1}^{r} P_{jk} = 1$. Then P_{jk} is a symmetric stochastic matrix satisfying the relation

$$|T^n f| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |a^{(n)}_{ik}| |f(k)| \leqslant \sum_{k=1}^{r} P^{(n)}_{jk} |f(k)|,$$

which using theorem 4.1 implies that:

$$\int (\sup_n |T^n f|)^k \leqslant 2 \left(\frac{p}{p-1}\right)^k \int |f|^p$$

as was to be proved.

5 — Remarks

(*i*) As a consequence of Lemma 3.1 we have:

Theorem 5.1: *Let $(\Omega, \mathfrak{P}, P)$ be as a non-atomic probability space. Suppose X is an integrable random variable defined as Ω satisfying $E(X^+ \log^+ X) = \infty$. Then there is a sequence $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ of conditional expectations operators such that* $\limsup S_n X = \infty$ *almost everywhere. Where $S_n = T_0 T_1 \ldots T_n \ldots T_1 T_0$*

Proof: Let $Y_1 = [X + 1]$, where $[r]$ denotes the greatest integer less than or equal to r. Thus Y_1 is countable valued, $X \leqslant Y_1 \leqslant X + 1$. The result follows for Lemma (3.1) and Burkholder [3].

(*ii*) Theorem 3.1 is not true in general without assuming non-atomicity.

(*iii*) As in theorem 3.3, there exist T_1, T_2 for which

$$\frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_2=1}^{N_2-N1} \sum_{n_1=1}^{N_1-1} T_2^{n_2} T_1^{m_1} f \to \infty \text{ as } N_1, N_2 \to \infty \text{ for some } f \varepsilon L_1.$$

Acknowledgment: This paper is part of Ph. D. thesis. I should like to thank Professor D. L. Burkholder for his assistance and advice in the course of this work.

Bibliography

[1] Blackwell and Dubius: *A converse to dominated convergence theorem. Illionis Journal of Mathematics.* (1963)

[2] Burkholder: *Maximal inequality as necessary condition for almost everywhere convergence. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie.* (1964)

[3] Burkholder: *Successive conditional expectations of an integrable function. Annals of Mathematical Statistics.* (1962)

[4] Burkholder and Chow: *Iterated of conditional expectation operators. Proc. Amer. Math. Soc.* (1961)

[5] Dunford and Schwartz: *Linear Operators. Interscience* (1958)

[6] Rota, G. C., An *„Alternienerendes Verfahren" for general operators. Bull. Amer. Math. Soc.* (1962)

[7] Stein, E. M. *On the maximal ergodic theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA* (1961)

Author's address: Department of Mathematics, College of Science, University of Baghdad, Iraq

The Editor's office received: On the 5-th February 1968

Niekoľko viet o konvergencii pozitívnych operátorov

ATA AL-HUSSAINI

Zhrnutie

V práci sa dokazuje konvergencia postupnosti $T^n f$, $f \in L_p (1 < p < \infty)$. kde T je lineárny pozitívne definitívny operátor definovaný na $L_1 \wedge L \infty$, spĺňajúci $\|T\|_1 \leqq 1$, $\|T\|_\infty \leqq 1$. Tento výsledok sa ďalej zobecňuje na prípad $T_2^{n2} T_1^{n1}$, kde T_1, T_2 nie sú nutne komutatívne.

Несколько теорем о конвергенции положительно определенных операторов

АТА АЛЬ-ХУССАИНИ

Резюме

В работе доказана сходимость последовательности $T^n f$, $f \in L_p$ $(1 < p < \infty)$, где T-линейный положительно определенный оператор определенный на $L_1 \wedge L_\infty$ удовлетворяющий условиям $\|T\|_1 \leqslant 1$, $\|T\|_\infty \leqslant 1$.

Этот результат обобщен на случай $T_2^{n_2} T_1^{n_1}$, где T_1, T_2 не обьязательно коммутативны.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XX — 1969

A Criterion for Oscillation and Nonoscillation

Š. BELOHOREC

Consider a differential equation

$$y''(x) + f(x, y(x)) = 0, \tag{r}$$

where the function $f(x, v)$ is continuous in the domain D: $x \geqq 0$, $-\infty < v < \infty$, nondecreasing in v for fixed x and such that $f(x, v)v > 0$. Under the additional conditions about $f(x, v)$ we shall prove a criterion for existence at least one nontrivial oscillatory solution of the equation (r) and a criterion for nonoscillation of all solutions of the equation (r).

A solution $y(x)$ will be called oscillatory if it has at least one zero in the interval (x, ∞) for every x. In the opposite case this solution will be called nonoscillatory. These criteria generalize theorems 5 and 6 in [2].

Theorem 1. *Let function $x^{3/2}|f(x, x^{1/2}v)|$ be continuously differentiable and nonincreasing in x for arbitrary fixed v. Let further be*

$$\liminf_{\substack{x\to\infty \\ v\to 0}} \frac{x^{3/2}f(x, x^{1/2}v)}{v} > 1/4. \tag{1}$$

Then the equation (r) *has at least one nontrivial oscillatory solution.*

If in addition the function $f(x, v)$ is such that

$$f(x, x^{1/2}v) \leqq Lv^n f(x, x^{1/2}) \tag{2}$$

for every x, all sufficiently large $v > 0$, where $0 \leqq n < 1$ and L is suitable constant, then the equation (r) *has a positive nonoscillatory solution too.*

Proof. 1. We shall first prove the existence of an oscillatory solution. We transform (r) by the change of variables $\lg x = t$, $y = x^{1/2}u$ into the form

$$\ddot{u}(t) - u(t)/4 + x^{3/2}f(x, x^{1/2}u(t)) = 0 \tag{3}$$

$$\left(\dot{u} = \frac{du}{dt},\quad t = \lg x\right).$$

Multyplying (3) by $2\dot{u}(t)$ and integrating from a to t (a is a suitable positive number that will be determined below), we obtain

$$\dot{u}^2(t) - u^2(t)/4 + 2\int_a^t e^{3s/2}f(e^s, e^{s/2}u(s))\dot{u}(s)\,\mathrm{d}s = \dot{u}^2(a) - u^2(a)/4. \tag{4}$$

Let us denote

$$F(s, w) = 2e^{3s/2}\int_0^w f(e^s, e^{s/2}z)\,\mathrm{d}z, \tag{5}$$

we have

$$\mathrm{d}F(s, w) = \frac{\partial F}{\partial s}\,\mathrm{d}s + 2e^{3s/2}f(e^s, e^{s/2}w)\,\mathrm{d}w.$$

Integrating the last equality in the interval $[a, t]$ we obtain

$$F(t, u(t)) - F(a, u(a)) = \int_a^t \frac{\partial F}{\partial s}\,\mathrm{d}s + 2\int_a^t e^{3s/2}f(e^s, e^{s/2}u(s))\dot{u}(s)\,\mathrm{d}s.$$

By using this equality, (4) and the fact that $\dfrac{\partial F}{\partial s} \leqq 0$ we have

$$\begin{aligned}\dot{u}^2(t) - u^2(t)/4 + F(t, u(t)) = \int_a^t \frac{\partial F}{\partial s} + \dot{u}^2(a) + F(a, u(a)) - \\ - u^2(a)/4 \leqq \dot{u}^2(a) + F(a, u(a)).\end{aligned} \tag{6}$$

It follows from (1) and (5) the existence of numbers $T > 0$, $w_0 > 0$ that for every t and w, $t \leqq T$, $|w| \leqq w_0$, $w \neq 0$ the inequality $F(t, w) > w^2/4$ is satisfied. Let c be a suitable number $0 < c \leqq w_0$. By denoting $F_c = \min\,[\lim_{t\to\infty} F(t, c), \lim_{t\to\infty} F(t, -c)]$ it is evident that $F_c > c^2/4$.

Let us choose $a > T$ and consider a solution $u(t)$ of (3), which satisfies the following conditions $u(a) = 0$, $0 < \dot{u}^2(a) < F_c - c^2/4$. It will be proved that this solution is oscillatory. First of all this solution is such that $|u(t)| < c$ for every $t \geqq a$, for which it exists. In the opposite case the point $t_0 > a$ would exist such, that $u(t_0) = c$ (the case $u(t_0) = -c$ is considered similarly). But from (6) we have

$$\dot{u}^2(t_0) \leqq \dot{u}^2(a) + u^2(t_0)/4 - F(t_0, u(t_0)) \leqq \dot{u}^2(a) + c^2/4 - F_c < 0,$$

which is a contradiction. It follows from (6) that $\dot{u}(t)$ is also bounded and thus the solution $u(t)$ exists for all $t \geqq a$. We shall show further that this solution has no last zero.

Let the point $\bar{t} > a$ be the last zero of $u(t)$ and for $t > \bar{t}$ $u(t) > 0$ (the case $u(t) < 0$ is considered similarly). Then it follows from (1), (3) and from the fact that $|u(t)| < c \leqq w_0$ that $\ddot{u}(t) < 0$ for $t > \bar{t}$. It is also evident that $\dot{u}(t) \geqslant 0$ for $t > \bar{t}$ and $\limsup_{t\to\infty} \ddot{u}(t) = 0$. From (3) by using (1) we have

$$0 = -\limsup_{t\to\infty} \frac{\ddot{u}(t)}{u(t)} = -1/4 + \limsup_{t\to\infty} \frac{e^{3t/2} f(e^t, e^{t/2}u(t))}{u(t)} > 0,$$

but this is a contradiction. Thus it is proved that every solution of (3) with mentioned initial conditions is oscillatory and so the corresponding solution of (r) is also oscillatory.

2. We shall prove the existence of nonoscillatory solution. Let us consider a solution $y(x)$ of the equation (r) which satisfies the initial conditions $y(b) = 0/$ $\acute{y}(b) = \beta$, where the numbers b and β are such that

$$2KLb^{(n-1)/2}/(1-n) < \beta^{1-n}/2 \quad \text{where} \quad K = \sup_{x \leqq \beta} x^{3/2} f(x, x^{1/2}).$$

From the equation (r) and the hypothesis (2) for $0 \leqq y(x)$ we have the following inequality

$$\beta = \acute{y}(x) + \int_b^x f(t, y(t))\,dt \leqq \acute{y}(x) + \int_b^x f(t, t^{1/2}\beta t^{1/2})\,dt \leqq \acute{y}(x) +$$

$$+ L\beta^n \int_b^x t^{n/2} f(t, t^{1/2})\,dt \leqq \acute{y}(x) + L\beta^n K \int_b^\infty t^{(n-3)/2}\,dt = \acute{y}(x) +$$

$$+ 2KLb^{(n-1)/2}\beta^n/(1-n) < \acute{y}(x) + \beta/2.$$

From the last inequality it is evident that $\acute{y}(x)$ is positive for all $x \geqslant b$ and so $y(x) > 0$ for all $x > b$, i. e. $y(x)$ is the nonoscillatory solution of (r). Thus the theorem is completely proved.

It is obvious from the proof of the theorem that in both cases there exists an infinit number of such solutions. If for all sufficiently large $v < 0$ instead of (2) the inequality $f(x, x^{1/2}v) \geqslant L|v|^n f(x, x^{1/2}) \operatorname{sgn} v$ is fulfilled, where L and n are the same as in (2), we can easily prove the existence of the negative nonoscillatory solutions too.

Theorem 2. *Let the number δ be such that $0 < \delta < 1/2$. Let the function $x^{2-\delta}|f(x, x^\delta v)|$ be continuously differentiable, nondecreasing with respect to the variable x for arbitrary fixed v. Let further be*

$$\limsup_{\substack{x\to\infty \\ |v|\to\infty}} \frac{x^{2-\delta} f(x, x^\delta v)}{v} < \delta(1-\delta).$$

Then all solutions of the equation (r), *besides the trivial one, are nonoscillatory.*

Proof. Let us denote $\lg x = t$, $y(x) = x^{\delta}u(t)$. This change of variables transforms (r) into the form

$$\ddot{u}(t) + (2\delta - 1)\dot{u}(t) + \delta(\delta - 1)u(t) + x^{2-\delta}f(x, x^{\delta}u(t)) = 0 \tag{8}$$

$$\left(\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad t = \lg x\right),$$

where $2\delta - 1 < 0$, $\delta(\delta - 1) < 0$. If we multiply (8) by $2\dot{u}(t)$ and integrate in the interval $[t_0, t]$ we obtain

$$\dot{u}^2(t) + 2(2\delta - 1)\int_{t_0}^{t} \dot{u}^2(s)\, ds + \delta(\delta - 1)u^2(t) + \tag{9}$$

$$+ 2\int_{t_0}^{t} e^{(2-\delta)s}f(e^s, e^{\delta s}u(s))\dot{u}(s)\, ds = \dot{u}^2(t_0) + \delta(\delta - 1)u^2(t_0).$$

By denoting

$$F(s, w) = 2e^{(2-\delta)s}\int_{0}^{w} f(e^s, e^{\delta s}z)\, dz,$$

then using the hypotheres from (9) we obtain as in the proof of the theorem 1 the following inequality

$$\dot{u}^2(t) + \delta(\delta - 1)u^2(t) + F(t, u(t)) \geqq \dot{u}^2(t_0) + \delta(\delta - 1)u^2(t_0). \tag{10}$$

Let us suppose now that the equation (8) has an oscillatory nontrivial solution $u(t)$ and denote by $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ the sequence of its zeros, $\{t'_n\}_{n=1}^{\infty}$ the sequence of zeros of $\dot{u}(t)$. It will be evident from further considerations, that these points have no finite cluster point. One can see from (10) that $\{|\dot{u}(t_n)|\}_{n=1}^{\infty}$ is nondecreasing. Besides the solution $u(t)$ is bounded, which is evident from (10) and (7). Thus either $\lim_{n\to\infty} |\dot{u}(t_n)| = \infty$, or $\lim_{n\to\infty} |\dot{u}(t_n)| = k \geqq |\dot{u}(t_1)| > 0$. If we put $t_0 = t_n$ and $t = t'_n$ so that $|\dot{u}(t_n)|$ is sufficiently large we obtain in the first case from (10) and the fact that $|u(t)| \leqq c$ the following inequality

$$F(t'_n, c) \geqq \delta(\delta - 1)u^2(t'_n) + F(t'_n, u(t'_n)) \geqq \dot{u}^2(t_n).$$

But this contradits the assumption (7) because the function $x^{2-\delta}|f(x, x^{\delta}v)|$ is bounded from above with respect to x for fixed v. In the second case $\dot{u}(t)$ is bounded, which can be seen from (10). Using (7) one can see from (8) that $\ddot{u}(t)$ is also bounded. Because it follows from (9) that $\int_{t_0}^{\infty} \dot{u}^2(s)\, ds < \infty$ then $\lim_{t\to\infty} \dot{u}(t) = 0$ (cf. [1] p. 185), but this is a contradiction. Thus $u(t)$ is the nonoscillatory solution of the equation (8) and then every nontrivial solution of (r) is nonoscillatory. This proves the theorem.

References

[1] Беллман Р., *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, Москва 1954.*

[2] Belohorec Š., *On some properties of the equation* $y''(x) + f(x)y^\alpha(x) = 0$, $0 < \alpha < 1$, *Mat. časop. 17 (1967), 10–19.*

[3] Изюмова Д. В., *Од условиях колеболемсти и неколедлемости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, Дифференциальные унавнения, 2, № 12, 1572—1586, 1966.*

Adresa autora: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej, Bratislava

Do redakcie došlo 15. marca 1968

Kritérium oscilácie a neoscilácie

Š. BELOHOREC

Zhrnutie

V práci sú uvedené dve vety. V prvej sa dokazuje existencia aspoň jedného oscilatorického riešenia rovnice (r). V druhej je vyslovená postačujúca podmienka, aby všetky riešenia tejto rovnice boli neoscilatorické.

Критерий колеблемости и неколеблемости

Ш. БЕЛОГОРЕЦ

Выводы

В этой работе рассмотрены вде теоремы. В первой теореме доказывается существование хотя бы одного колеблющевося решения уравнения (r). Во второй теореме доказано достаточное условие чтобы все решения этого уравнения были неколеблющимися.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XX, 1969)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

MATHEMATICA XX — 1969

Remarks on the theory of real functions

P. KOSTYRKO, J. SMÍTAL and T. ŠALÁT

In this paper we prove some results concerning various regions of the theory of real functions. The results are achieved in the seminary of the real functions of the department of mathematics of the Faculty of Natural Sciences of the University Komensky.

1. On the power of the set of all measures defined on the σ-field of Borel' s subsets of $\langle 0, 1\rangle$.

Let S denote the σ-field of all Borelian subsets of the interval $\langle 0, 1\rangle$. There arises the question about the power of the set of all measures on S. It is easy to prove the following simple result.

Theorem 1,1. *The power of the system of all measures defined on S is 2^c, where c denotes the power of the continuum.*

Proof. Let us suppose that $M \subset \langle 0, 1\rangle$. We define a measure μ_M in the following way: $\mu_M(A) = +\infty$ if $A \cap M \neq \emptyset$ and $\mu_M(A) = 0$ if $A \cap M = \emptyset$. Evidently $M, M' \subset \langle 0, 1\rangle$, $M \neq M'$ implies $\mu_M \neq \mu_{M'}$, ~~and this~~ concludes our proof.

Remark. Let us note that the system of all σ-finite measures on S is of the power of the continuum. This follows from the fact that to every finite measure μ on S can be in a unique way associated a monotone function f on $\langle 0, 1\rangle$ $(\mu(< 0, a)) = f(a)$ for each $a \in \langle 0, 1\rangle)$ such that $\mu = \mu_f$ (i. e. μ is the Lebesgue-Stieltjes measure generated by f) and from the fact that the system of all monotone functions on $\langle 0, 1\rangle$ has the power of the continuum

2. On the functional equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ where x, y are real

It is well-known that there exist infinitely many continuous and also infinitely many discontinuous solutions of this equation (see [2] p. 441—442,

[3] p. 44—47). The set F of all real functions on $(-\infty, +\infty)$ is easily seen to be a metric space with the metric $\varrho(f, g) = \min\,(1, \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x) - g(x)|)$. We prove the following result concerning the system of all solutions of the above-mentioned functional equation.

Theorem 2,1. *Let F^* denote the set of all $f \varepsilon F$ which are solutions of the functional equation*

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Then

i) $\overline{\overline{F^*}} = 2^c$*),

ii) *F^* is a closed isolated set in the space F.*

Proof. i) Let H be a Hamelian basis of real numbers, let $A \subset H$. We define a function f_A as follows: $f_A(b) = 0$ if $b \varepsilon A$ or $b = 0$ and $f_A(b) = 1$ whenewer $b \varepsilon H - A$. Now if x is a non-zero real number, $x = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i$ (r_i are rational numbers, $b_i \varepsilon H$, $i = 1, 2, \ldots n$), then we put $f_A(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i f_A(b_i)$. f_A is easily seen to be a solution of the functional equation (1) and obviously $f_A \neq f_{A'}$, whenever $A \neq A'$; $A, A' \subset H$. We conclude the proof of i) by remarking that since $\overline{\overline{H}} = c$ (see [2], p. 125, 146), we have $\overline{\overline{F^*}} = \overline{\overline{2^H}} = 2^c$.

ii) Let $f_1, f_2 \varepsilon F^*$, $f_1 \neq f_2$. There are two possible cases:

1. $f_1 - f_2$ is continuous. Then there exists a non-zero real number a such that $f_1(x) - f_2(x) = ax$ ([3], p. 44—46), hence $\lim_{x \to \infty} |f_1(x) - f_2(x)| + = \infty$ i. e. $\varrho(f_1, f_2) = 1$.

2. $f_1 - f_2$ is an unbounded function on every interval ([3], p. 44—46). In this case evidently $\sup_{-\infty < x < +\infty} |f_1(x) - f_2(x)| = +\infty$ and we have again $\varrho(f_1, f_2) = 1$. Finally, F^* is easily seen to be closed.

Remark: Since the set of all continuous real functions on $(-\infty, +\infty)$ has the power of the continuum and $2^c - c = 2^c$ (see [2], p. 168—170), it follows from the theorem 2.1 (i) that the functional equation (3) has 2^c discontinuous solution on $(-\infty, +\infty)$ (see [5], p. 49). So we get from the foregoing theorem a new proof for this known fact.

---

*) $\overline{\overline{M}}$ denotes the cardinal number of the set M.

3. On the Cartesian product of fields of sets

In monograph [1] is defined the Cartesian product of fields of sets and σ-additive product of σ-additive fields of sets (see [1], p. 321—323, 332—336). Let us note that we can define the σ-additive product also for fields of sets, which fails to be σ-additive fields of sets. If M is a field of subsets of the space X and N is a field of subsets of the space Y, then $M \times_\sigma N$ denotes the smallest σ-additive field of subsets of $X \times Y$, which contains each set of the form $A \times B$, $A \in M$, $B \in N$. We denote by M_1 (N_1) the smallest σ-additive field of subsets of $X(Y)$ which contains $M(N)$. There arises a question about the relation between $M \times_\sigma N$ and $M_1 \times_\sigma N_1$ (with respect to the conclusion). The following theorem gives an answer for this question.

Theorem 3,1. *Let M, N, M_1, N_1 have the previous meaning. Then* $M \times_\sigma N = M_1 \times_\sigma N_1$.

Proof. Evidently $M \times_\sigma N \subset M_1 \times_\sigma N_1$. It suffices to prove that $M_1 \times_\sigma N_1 \subset M \times_\sigma N$. This will be proved if we prove that $M_1 \times N_1 \subset M \times_\sigma N$. To prove this last relation it suffices to verify that each set of the form $X \times B$, $B \in N_1$ and also $A \times Y$, $A \in M_1$ is in $M \times_\sigma N$. We prove that $B \in N_1$ implies $X \times B \in M \times_\sigma N$ (for $A \in M_1$ the proof is similar).

We denote by N' the set of all $B \subset Y$ such that $X \times B \in M \times_\sigma N$. We can easily see that N' is a σ-additive field of subsets of Y and evidently $N \subset N'$. Since N_1 is the smallest σ-additive field of sets, which contains N, we conclude that $N_1 \subset N'$, i. e. for every $B \in N_1$ we have $X \times B \in M \times_\sigma N$. Our theorem is proved.

Remark. An analogous result holds for a Cartesian product of countable number of factors, the proof is almost the same as in theorem 3,1.

4. On mesurable functions which are integrable with respect to an arbitrary measure

Let X be a set, M a σ-field of subsets of X. Let f be a real function on X, which is measurable with respect to M. In a special case, if $X = \langle 0, 1\rangle$ and M is the field of Borelian subsets of $\langle 0, 1\rangle$ it is known that each function which is integrable with respect to an arbitrary measure on M must be bounded (see [1], p. 293). We now generalize and strengthen the mentioned result.

Theorem 4,1. *Let X beaset, M a σ-field of subsets of the set X. Assume f to be a M — measurable real function on X, which is integrable with respect to an arbitrary normed measure on M. Then f is bounded on X.*

We begin by proving the following

Lemma 4,1. *Let X be a set, M a σ-field of subsets of X and $S = \{X_1, X_2. \dots X_k, \dots\}$ a decomposition of the set X such that $X_k \in M$ $(k = 1, 2, \dots)$.* If ν *is a non-negative real function on S, then there exists a measure μ on M such that $\mu(X_k) = \nu(X_k)$ $(k = 1, 2, \dots)$.*

Proof. Let us choose an element, say x_k from each set X_k $(k = 1, 2, \dots)$. We denote $\nu(X_k)$ by a_k $(k = 1, 2, \dots)$. Then $a_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \dots)$. Now, if $A \in M$, then we define $\mu(A) = \sum_{k,\, x_k \in A} a_k$. Evidently μ is a measure on M and $\mu(X_k) = a_k = \nu(X_k)$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Proof of theorem 4,1. We assume in the contrary, that f fails to be bounded on X. Then each of the sets $A_n = \{x \in X;\ |f(x)| \geq n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ is non-empty, $A_n \in M$ $(n = 1, 2, \dots)$ and $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$.

Let us consider the following cases:

1. A positive interger n_0 can be taken such that $A_{n_0} = A_{n_0+1} = \dots = A_{n_{0+k}} = \dots$

2. The case 1. does not occur.

If 1. holds, then evidently $|f(x)| = +\infty$ whenever $x \in A_{n_0}$. We take some $x_0 \in A_{n_0}$ and we define a mesure μ on M as follows: for $A \in M$ we put $\mu(A) = 0$ if $x_0 \notin A$ and $\mu(A) = 1$ if $x_0 \in A$. μ is easily seen to be a normed measure on M and $\int_X |f| d\mu \geq \int_{A_{n_0}} |f| d\mu = +\infty$. This contradicts the assumption of the theorem.

If 2. holds, then there exists such a sequence of positive integers $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ that $A_{n_1} \neq X$ and $A_{n_k} - A_{n_{k+1}} \neq \emptyset$ $(k = 1, 2, \dots)$. Writing $X_1 = X - A_{n_1}$, $X_i = A_{n_{i-1}} - A_{n_i}$ $(i = 2, 3, \dots)$, we obtain a decomposition $S = \{X_1, X_2, ,,,\}$ of X where $X_k \in M$ $(k = 1, 2, \dots)$. We put $\nu(X_k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Following the lemma 4,1 there exists a measure μ on M such that $\mu(X_k) = \nu(X_k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Obviously

$$\mu(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1,$$

hence μ is a normed measure on M. Moreover

$$\int_X |f| d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} |f| d\mu \geq \sum_{k=2}^{\infty} \int_{X_k} n_{k-1} d\mu \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k(k+1)} = +\infty$$

and this contradiction to the assumption of the theorem ends the proof.

5. On equivalence of some types of convergence of real functions

In the paper [4] the following result has been proved:

Let (X, S, μ) be a measure space, $\mu(X) > 0$. Let $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of real S-measurable functions on X. Then these two propositions:

(P) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges in measure,
(Q) $\{f\}_{n=1}^{\infty}$ converges almost everywhere on X,
are equivalent if and only if μ is a purely atomic measure.

In connection with this result the following problem arises. Let X be a set and (T), (T') be two types of convergence of sequences of real functions defined on X. We shall say that (T) and (T') are equivalent [(T) is equivalent to (T') or (T') is equivalent to (T)] if for every sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ of real functions on X this proposition is true: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges in the sense of (T) to a function f if and only if $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to f in the sense of (T'). Our problem is to find such properties of the set X, which are the sufficient and necessary conditions for the equivalence of types of convergence (T) and (T'). We shall solve this problem for (T), (T') be one of this types:

(T_1) — pointwise convergence,
(T_2) — locally uniform convergence,
(T_3) — quasi-uniform convergence,
(T_4) — continuous convergence,
(T_5) — uniform convergence.

We note that in the case of types (T_2) and (T_4) we assume X to be a metric space.

Theorem 5,1. i) *(T_1) is equivalent to (T_5) if and only if X is a finite set.*

ii) *(T_1) is equivalent to (T_4) if and only if $X^d = \emptyset$.* *)
iii) *(T_1) is equivalent to (T_3) if and only if X is a finite set.*
iv) *(T_1) is equivalent to (T_2) if and only if $X^d = \emptyset$.*
v) *(T_2) is equivalent to (T_5) if and only if X is a compact.*
vi) *(T_2) is equivalent to (T_4) if and only if $X^d = \emptyset$.*
vii) *(T_2) is equivalent to (T_3) if and only if X is a finite set.*
viii) *(T_3) is equivalent to (T_5) if and only if X is a finite set.*
vj) *(T_3) is equivalent to (T_4) if and only if X is a finite set.*
vjj) *(T_4) is equivalent to (T_5) if and only if X is a finite set.*

*) *X^d denotes the set of all limit points of the space X.*

Proof.

i) The condition is evidently sufficient. If X is infinite, then there exists an infinite countable set $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ such that $A \subset X$. We define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ as follows: $f_n(x_k) = 0$ if $k \leqq n - 1$, $f_n(x_k) = 1$ if $k \geqq n$ and $f_n(x) = 0$ if $x \in X - A$. The sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges pointwise to the function $f \equiv 0$, but it fails to converge uniformly to $f \equiv 0$ since $\sup_{x \in X} |f_n(x)| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

ii) Let $X^d = \emptyset$. We recall that the continuous convergence implies the pointwise convergence. So it suffices to show that the pointwise convergence of an arbitrary sequence of real functions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ on X (if $X^d = \emptyset$) implies the continuous covergence.

Let $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge pointwise to a function f. Let $x_n \to x_0$. Since $X^d = \emptyset$, there exists a positive integer n_0 such that $x_n = x_0$ whenever $n \geq n_0$. So for $n \geqq n_0$ $f_n(x_n) = f_n(x_0) \to f(x_0)$ holds and $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges continuously to f.

Let $X^d \neq \emptyset$ and $x_0 \in X^d$. Then there exists an infinite sequence of different elements $x_k \in X$ such that $x_k \to x_0$. Let us define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ by $f_n(x_n) = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$ and $f_n(x) = 0$ if $x \in X$, $x \neq x_n$. Evidently the sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges pointwise to the function $f \equiv 0$ but $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fails to converəg continuously on X since $x_n \to 0$ and $\{f_n(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = 0, 1, 0, 1, \ldots$

iii) The condition is evidently sufficient. Let X be infinite. Then there exists an infinite countable set $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ such that $A \subset X$. Let us define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ by $f_n(x_i) = 1$ if $i > n$ and $f_n(x) = 0$ otherwise. Evidently $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges pointwise to the function $f \equiv 0$ but $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fails to converge quasi-uniformly to the function $f \equiv 0$. In fact, if $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges quasi-uniformly to $f \equiv 0$, then the following proposition is true (see [1], p. 143):

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{m}{\forall} \; \underset{p > m}{\exists} \; \underset{x \in X}{\forall} \min(|f_{m+1}(x)|, \ldots, |f_p(x)|) < \varepsilon .$$

But for $m = 1$ and every p

$$|f_{1+1}(x_{p+1})| = \ldots = |f(x_{p+1})| = 1$$

holds and from this it follows that our proposition is false.

iv) If $X^d = \emptyset$ then every compact subspace of X is finite and we can easily verify that (T_1) is equivalent to (T_2).

If $X^d \neq \emptyset$ holds, then there exists $x_0 \in X$ and an infinite sequence $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ of different elements $x_k \in X$ such that $x_k \to x_0$. The set $K = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ is a compact one. Let us define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ on X as follows: $f_n(x_n) = 1$

and $f_n(x) = 0$ otherwise. Evidently $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges pointwise to the function $f \equiv 0$, but it fails to converge uniformly on K.

v) The condition is evidently sufficient. If X is not a compact, then there exists an infinite countable set $A = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ such that there does not exist the convergent subsequence of $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ (we assume $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ to be a sequence of different terms). We define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ on X by $f_n(x_n) = 1$ and $f_n(x) = 0$ otherwise. We shall show that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly to the function $f \equiv 0$ on every compact $K \subset X$. Let $\emptyset \neq K \subset X$, K be a compact. Then K contains only a finite number of points of A. Therefore there exists such a positive integer m that $x_n \notin K$ whenever $n > m$. Let $n > m$. Then $f_n(x) = 0$ for every $x \in K$. From this follows that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly on K to the function $f \equiv 0$. But $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ evidently fails to converge uniformly on X to $f \equiv 0$.

vi) If $X^d = \emptyset$ then, as we have seen, (T_1) is equivalent to (T_4) (see the proof of the part ii)). In the same way we can prove that (T_2) is equivalent to (T_4).

Now let $X^d \neq \emptyset$ and $K = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ be the same set as in the proof of the part **iv**). Let us define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ as follows: $f_n\ (x_{2i}) = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, $f_n(x_{2i+1}) = 1 + \dfrac{1}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ and $f_n(x) = 0$ if $x \in X - K$.

Then the sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ evidently converges uniformly on X to the function f which is defined on X by $f(x_{2i}) = 0$, $f(x_{2i+1}) = 1$ $(i = 0, 1, \ldots)$ and $f(x) = 0$ othervise. So $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to f locally uniformly on X. But $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fails to converge to f continously since $x_n \to x_0$ and $\{f_n(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = 1 + \dfrac{1}{1}, 0, 1 + \dfrac{1}{3}, 0, \ldots$.

vii) The condition is evidently sufficient. Now let (T_2) be equivalent to (T_3). First we show that this equivalence implies $X^d = \emptyset$. We assume that, in contrary $X^d \neq \emptyset$. Let $K = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ be the same set as in the proof of part iv). We define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ on X by $f_n(x_n) = 1$ and $f_n(x) = 0$ otherwise. Then $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ evidently converges quasi-uniformly on X to $f \equiv 0$, but it fails to converge locally uniformly to $f \equiv 0$, since $\sup_{x \in K} |f_n(x)| = 1$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

So $X^d = \emptyset$ holds. If X is infinite, then there exists an infinite countable set $A = \{y_1, y_2, \ldots\}$ such that $A \subset X$. Let us define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ as follows: $f_n(y_i) = 1$ if $i > n$, $f_n(y_i) = 0$ if $i \leq n$ and $f_n(x) = 0$ if $x \in X - A$. We can easily verify that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fails to converge on X quasi-uniformly to $f \equiv 0$, since for every p, $\min\left(|f_2(x_{p+1})|, \ldots, |f_p(x_{p+1})|\right) = 1$. On the other hand, from the fact that $X^d = \emptyset$ it follows, that every compact $K \subset X$ is a finite set, hence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges locally uniformly on X to $f \equiv 0$.

viii) The condition is evidently sufficient. If X is infinite, then there exists an infinite countable $A = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$. We define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ on X by $f_n(x_n) = 1$ and $f_n(x) = 0$ otherwise. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges quasiuniformly on X to the function $f \equiv 0$ because for an arbitrary positive integer m and $x \in X$

$$\min\left(|f_{m+1}(x)|, |f_{m+2}(x)|\right) = 0$$

holds. But the same sequence fails to converge uniformly to $f \equiv 0$ because

$$\sup_{x \in X} |f_n(x)| = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

vj) The condition is evidently sufficient. Let (T_3) be equivalent to (T_4). First we show that $X^d = \emptyset$. Let us assume that $X^d \neq \emptyset$ and let $x_0 \in X^d$, $x_k \to x_0$ ($\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a sequence of different terms). We define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ on X by $f_n(x_n) = (-1)^n$ and $f_n(x) = 0$ otherwise. Then $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fails to converge continuously on X to $f \equiv 0$, but, on the other hand, it converges quasi-uniformly to $f \equiv 0$ because for an arbitrary positive integer m and $x \in X$

$$\min\left(|f_{m+1}(x)|, |f_{m+2}(x)|\right) = 0$$

holds. So $X^d = \emptyset$ and if X is infinite, then there exists an infinite countable $A = \{y_1, y_2, \ldots\} \subset X$. We define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ on X as follows: $f_n(y_i) = 1$ whenever $i > n$ and $f_n(x) = 0$ otherwise. We shall show that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges continuously to $f \equiv 0$ on X. Let $z_k \to z$, z_k, $z \in X$. Since $X^d = \emptyset$, an index k_0 can be chosen such that $z_k = z$ and $f_k(z_k) = f_k(z)$ whenever $k > k_0$. If $z \in X - A$, then $f_k(z) = 0$ for every $k > k_0$. If $z = y_j$ for some j then $f_k(y_j) = 0$ whenever $k > \max(k_0, j)$. So we always have $f_k(z_k) \to 0$. On the other hand, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ evidently fails to converge quasi-uniformly to $f \equiv 0$.

vjj) The condition is evidently sufficient. We shall show that it is also necessary. Let us assume (T_4) to be equivalent to (T_5). As a first step we shall show that X must be a compact. Let us assume, in the contrary, that X fails to be a compact. Then there exists an infinite sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ of different terms $x_k \in X$ which has no subsequence convergent in X. We define f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ on X by $f_n(x_n) = 1$ and $f_n(x) = 0$ otherwise. We show that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges continuously on X to $f \equiv 0$.

Let y_n, $y \in X$, $y_n \to y$. There are the following two possible cases:

1. $y = x_j$ for some j, hence a positive integer m can be found such that $y_n \neq x_i$ $(i \neq j)$ whenever $n > m$, so $f_n(y_n) \to 0$.

2. $y \neq x_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$. In this case there exists a positive integer m' such that $y_n \neq x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ whenever $n > m'$, hence $f_n(y_n) \to 0$. Thus in both cases $\{f_n(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converges to 0. But on the other hand, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fails to converge uniformly on X to $f \equiv 0$. This contradiction shows that X must be a compact.

Since (T_2) is equivalent to (T_5) on a compact the equivalence vi) implies that $X^d = \emptyset$. So X must be a compact with the property $X^d = \emptyset$, this means that X must be a finite set. Our theorem is proved.

References

[1] R. Sikorski: *Funkcje rzeczywiste I, Warszawa, 1958*

[2] W. Sierpiński: *Cardinal and ordinal numbers, Warszawa, 1958*

[3] J. Aczél: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Berlin, 1961*

[4] Ю. И. Грибанов: *Замечание о сходимости почти всюду и по мере, Comm. Math. Univ. Carolinae 7, 3 (1966), 297—300*

[5] E. Hewitt, K. Stromberg: *Real and abstract analysis, Berlin 1965*

Adresa autorov: Katedra algebry a teórie čísel PFUK, Šmeralova 2/b, Bratislava

Do redakcie došlo 15. mája 1968

Poznámky k teórii reálnych funkcií

P. KOSTYRKO, J. SMÍTAL a T. ŠALÁT

Zhrnutie

V práci sa vyšetrujú niektoré vlastnosti mier definovaných na borelovských množinách, vlastnosti funkcionálnej rovnice $f(x + y) = f(x) + f(y)$, vlastnosti kartézskeho súčinu množinových telies, vlastnosti merateľných funkcií integrovateľných vzhľadom na ľubovoľnú mieru a ekvivalencia niektorých typov konvergencie reálnych funkcií.

Заметки к теории вещественных функций

П. КОСТЫРКО, Й. СМИТАЛ и Т. ШАЛАТ

Резюме

В работе рассматриваются некоторые свойства мер определенных на борелевых множествах, свойства функционального уравнения $f(x + y) = f(x) + f(y)$, свойства произведения δ-алгебр, свойства измеримых функций суммируемых в отношении к произвольной мере и равносилность некоторых типов сходимости действительных функций.

[ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XX, 1969]

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XX — 1969

Eine Involution des 5. Grades

J. ČIŽMÁR

1. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener kommutativer Körper von der Charakteristik 0, Ω — ein Universalkörper über K, S_n — ein n-dimensionaler projektiver Raum über Ω ($n \geqq 3$), $(X_0, \dots, X_n)$ — ein System von homogenen Variablen, $(x_0, \dots, x_n)$ — ein Punkt aus S_n mit Koordinaten $x_i \in K$, ξ_i, $\eta_j, \dots$ — über K transzendente Elemente aus Ω.

Die Punktkoordinaten seien stets gelegenweise normiert.

Ein „Unterraum" heißt immer „der lineare Unterraum".

2. In dieser Arbeit wird eine birationale Transformation des Raumes S_n auf sich untersucht, die sich für $n = 3$ in [2] (S. 322) kurz syntetisch beschreibt befindet. Man löst nur Grundfragen: eine algebraische Gestalt der Transformation, Fundamentalvarietäten, irreguläre und invariante Varietäten und das Bild einer Hyperebene.

I. Definition und Gleichungen

1. Es sei ein Quadrikenbüschel

$$\{Q_{n-1}\} : k_0F(X) + k_1G(X) = 0, \tag{1}$$

$$(k_0, k_1) \neq (0, 0); \; k_0, k_1 \in \Omega;$$

gegeben, wo

$$F(X) \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}X_iX_j = 0, \tag{2}$$

$$A = |a_{ij}| \neq 0;$$

$$G(X) \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} b_{ij}X_iX_j = 0, \tag{3}$$

$$B = |b_{ij}| \neq 0;$$

zwei verschiedene reguläre Grundquadriken des Büschels (1) sind.

Die Büschelbasis ist eine (n-2-)dimensionale Varietät der 4. Ordnung:

$$V_{n-2} : F(X) = 0,\ G(X) = 0. \tag{4}$$

2. Es seien zwei disjunkte Unterräume

$$S_r : X_i = 0, \quad i = r + 1, \ldots, n; \quad 1 \leqq r \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]; \tag{5}$$

$$S_{n-r-1} : X_i = 0, \quad i = 0, \ldots, r; \tag{6}$$

gegeben.

Durch einen Punkt $(x) = (x_0, \ldots, x_n)$ $[(x) \notin S_r,\ (x) \notin S_{n-r-1}]$ geht genau eine durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_0 : \ldots : X_r &= x_0 : \ldots : x_r, \\ X_{r+1} : \ldots : X_n &= x_{r+1} : \ldots : x_n \end{aligned} \tag{7}$$

bestimmte Transversale p^x der Unterräume S_r, S_{n-r-1} hindurch.

3. Durch einen Punkt $(x)[(x) \notin V_{n-2}]$ geht genau eine durch die Parameter $(k_0, k_1) = (G(x), -F(x))$ bestimmte Quadrik Q^x_{n-1} des Büschels (1), d. h. die Quadrik von der Gleichung

$$G(x)F(X) - F(x)G(X) = 0 \tag{8}$$

hindurch.

4. Es sei $\bar{F}$ bzw. $\bar{G}$ eine zur quadratischen Form F bzw. G adjungierte Polarform (d. h. die bilineare Form).

Bezeichne man:

$$F(X_0, \ldots, X_r, 0, \ldots, 0) \equiv F({}^rX);$$

$$F(0, \ldots, 0, X_{r+1}, \ldots, X_n) \equiv F({}^{n-r-1}X);$$

$$\bar{F}(X_0, \ldots, X_r, 0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0, X_{r+1}, \ldots, X_n) \equiv \bar{F}({}^rX;\ {}^{n-r-1}X).$$

Analog seien $G({}^rX)$, $G({}^{n-r-1}X)$, $\bar{G}({}^rX;\ {}^{n-r-1}X)$ gebildet.

5. Eine $(n - 2)$-dimensionale durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} G(X)F({}^rX) - F(X)G({}^rX) &= 0, \\ G(X)F({}^{n-r-1}X) - F(X)G({}^{n-r-1}X) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

gegebene Varietät bezeichne man U_{n-2}.

Die folgenden Inklusionen sind offenbar:

$$S_r \subset U_{n-2}, \quad S_{n-r-1} \subset U_{n-2}, \quad V_{n-2} \subset U_{n-2}.$$

Daraus folgt es: Ist $(x) \notin U_{n-2}$, so ist $(x) \notin S_r$, $(x) \notin S_{n-r-1}$, $(x) \notin V_{n-2}$.

6. Eine Transformation T sei folgendermaßen definiert:

Der Transformationsgraph von T ist die Menge aller derjenigen Punkte $(x, y) \in S_n \times S_n$, für welche (x) und (y) gemeinsame Punkte der Transversale p^x mit der Quadrik Q^x_{n-1} sind.

Bemerkungen.

1. Durch jeden Punkt $(x) \in S_n$ geht mindestens eine Quadrik Q^x_{n-1} des Büschels (1) hindurch. Ist $(x) \in V_{n-2}$, so ist Q^x_{n-1} eine beliebige Quadrik des Büschels (1).

2. Durch jeden Punkt $(x) \in S_n$ geht mindestens eine Transversale p^x der Unterräume S_r, S_{n-r-1} hindurch. Ist $(x) \in S_r$ (S_{n-r-1}), so ist die Transversale p^x eine beliebige durch den Punkt (x) hindurchgehende Gerade des Verbindungsraumes $((x), S_{n-r-1})$ $[((x), S_r)]$.

3. Ist $p^x \subset Q^x_{n-1}$, so ist (y) ein beliebiger von (x) verschiedener Punkt der Gerade p^x.

7.

Satz I, 1. *T ist eine irreduzible birationale Korrespondenz.*

Beweis. Durch einen Punkt $(x) \equiv (x_0, \ldots, x_n)$ $[(x) \in S_n - U_{n-2}]$ geht genau eine (durch die Gleichung (8) bestimmte) Quadrik Q^x_{n-1} des Büschels (1) und genau eine (durch die Gleichungen (7) bestimmte) Transversale p^x der Unterräume S_r, S_{n-r-1} hindurch. Die Schnittpunkte der Gerade p^x mit der Quadrik Q^x_{n-1} sind im Parametersystem auf p^x mit Basispunkten $({}^r x) \equiv (x_0, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ und $({}^{n-r-1}x) \equiv (0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ durch Parameterpaare

$$1.\ h_0^{\mathrm{I}} : h_1^{\mathrm{I}} = 1 : 1, \tag{10}$$

$$2.\ h_0^{\mathrm{II}} : h_1^{\mathrm{II}} = [G(x)F({}^{n-r-1}x) - F(x)G({}^{n-r-1}x)] : [G(x)F({}^r x) - F(x)G({}^r x)]$$

bestimmt. Das Paar $(h_0^{\mathrm{I}}, h_1^{\mathrm{I}})$ bestimmt den Punkt (x), durch das Paar $(h_0^{\mathrm{II}}, h_1^{\mathrm{II}})$ ist ein nach der Definition T dem Punkt (x) in der Transformation T entsprechender Punkt (y) bestimmt. Die Koordinaten des Punktes (y) sind:

$$y_i = x_i[G(x)F({}^{n-r-1}x) - F(x)G({}^{n-r-1}x)], \quad i = 0, \ldots, r; \tag{11}$$

$$y_i = x_i[G(x)F({}^r x) - F(x)G^r(x)], \quad i = r + 1, \ldots, n.$$

Die Formeln (11) drücken die Zuordnung $T(x) = (y)$ aus.

Durch die Formeln (11) ist mit einem allgemeinen Punkt $(\xi) \in S_n$ ein anderer allgemeine Punkt $(\eta) \in S_n$ verknüpft und umgekehrt. Es gilt $K(\xi) = K(\xi, \eta) = K(\eta)$, (ξ, η) ist ein allgemeiner Punkt der Korrespondenz T, also ist die Transformation birational und irreduzibel.

Aus der Definition (T) und den Formeln (11) folgt der

Satz I, 2. *T ist eine Involution des 5. Grades.*

Weiter wird die Transformation T auch durch I_5 oder kurz I bezeichnet werden.

II. Fundamentalvarietäten und irreguläre Varietäten

1. Fundamentalvarietäten

Satz II, 1. *Die Menge aller fundamentalen Punkte ist die Varietät U_{n-2}.*

Beweis. Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit die Formeln (11) für y_i $(i = 0, \dots, n)$ samt Null geben, ist die gleichzeitige Erfüllung beider Gleichungen (9) für den Punkt (x). Die Gleichungen (9) definieren doch U_{n-2}.

Satz II, 2. *Die Varietät U_{n-2} enthält:*

1. *Den Unterraum S_r;*
2. *Den Unterraum S_{n-r-1};*
3. *Die Varietät V_{n-2};*
4. *Eine Varietät B_{n-3}, die aus allen denjenigen Bisekanten der Varietät V_{n-2} besteht, welche Transversalen der Unterräume S_r, S_{n-r-1} sind.*

Lemma II, 1.

a) *Ist die Gerade p eine Bisekante der Varietät V_{n-2}, so liegt sie auf einer Quadrik des Büschels* (1).

b) *Liegt die Gerade p auf einer Quadrik des Büschels* (1), *so ist sie eine Bisekante der Varietät V_{n-2} oder liegt sie auf V_{n-2}.*

Beweis befindet sich z. B. in [1].

Lemma II, 2. *Die Menge aller derjenigen Bisekanten der Varietät V_{n-2}, die Transversalen der Unterräume S_r, S_{n-r-1} sind, ist eine durch die Gleichungen*

$$G(X)F({}^rX) - F(X)G({}^rX) = 0, \tag{12}$$

$$G(X)F({}^{n-r-1}X) - F(X)G({}^{n-r-1}X) = 0,$$

$$G(X)\bar{F}({}^rX;\, {}^{n-r-1}X) - F(X)\bar{G}({}^rX;\, {}^{n-r-1}X) = 0,$$

$$F(X)G(X) \neq 0,\ F({}^rX)F({}^{n-r-1}X)\bar{F}({}^rX;\, {}^{n-r-1}X) \neq 0,$$

bestimmte Varietät B_{n-3}.

Beweis. a) Ist für einen Punkt $(x)[(x) \notin V_{n-2}, (x) \notin S_r, (x) \notin S_{n-r-1}]$ die Transversale p^x eine Bisekante der Varietät V_{n-2}, so liegt p^x auf der Quadrik Q^x_{n-1} des Büschels (1) und im Parametersystem auf p^x mit Basispunkten $({}^rx)$, $({}^{n-r-1}x)$ ist jeder durch das Parameterpaar $(k_0, k_1) \neq (0, 0)$ bestimmte Punkt $(y) \in p^x$ ein Punkt der Quadrik Q^x_{n-1}. Nach einer Beschränkung $(y) \notin V_{n-2}$, $(y) \notin S_r$, $(y) \notin S_{n-r-1}$ ist es $({}^ry) \equiv ({}^rx)$, $({}^{n-r-1}y) \equiv ({}^{n-r-1}x)$, $Q^y_{n-1} \equiv Q^x_{n-1}$ und es gilt

$$G(y)[k_0^2F\,{}^ry) + k_0k_1\bar{F}({}^ry;\, {}^{n-r-1}y) + k_1^2F({}^{n-r-1}y)] - \tag{13}$$

$$- F(y)[k_0^2G({}^ry) + k_0k_1\bar{G}({}^ry;\, {}^{n-r-1}y) + k_1^2G({}^{n-r-1}y)] = 0$$

mit der Ausnahme einer endlichen Anzahl für alle Paare (k_0, k_1). Das verlangt die Erfüllung der Beziehungen

$$G(y)F({}^ry) - F(y)G({}^ry) = 0, \tag{12'}$$

$$G(y)F({}^{n-r-1}y) - F(y)G({}^{n-r-1}y) = 0,$$

$$G(y)\bar{F}({}^ry;\, {}^{n-r-1}y) - F(y)\bar{G}({}^ry;\, {}^{n-r-1}y) = 0.$$

b) Sind für einen Punkt $(y) \in p^y$ $[(y) \notin V_{n-2}, (y) \notin S^r, (y) \notin S_{n-r-1}]$ die Bedingungen (12′) erfüllt, so gilt es (13) für alle Paare (k_0, k_1), d. h. $p^y \subset Q^y_{n-1}$ und nach dem Lemma II, 1 ist die Gerade p^y eine Bisekante der Varietät V_{n-2}.

Beweis des Satzes II, 2 ist nun offenbar.

2. Irreguläre Varietäten

Satz II, 3. *Die irreguläre Varietät der Involution I ist eine Hyperfläche*

$$\begin{gathered} {}^iP_{n-1} : [G(X)F({}^rX) - F(X)G({}^rX)][G(X)F({}^{n-r-1}X) - \\ F(X)G({}^{n-r-1}X)]\,.\,\{[F({}^rX)G({}^{n-r-1}X) - G({}^rX)F({}^{n-r-1}X)]^2 + \\ + [F({}^rX)\bar{G}({}^rX;\, {}^{n-r-1}X) - G({}^rX)\bar{F}({}^rX;\, {}^{n-r-1}X)][F({}^{n-r-1}X)\bar{G}({}^rX;\, {}^{n-r-1}X) - \\ - G({}^{n-r-1}X)\bar{F}({}^rX;\, {}^{n-r-1}X)]\} = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

die diese Komponenten besitzt:

1. *Eine Hyperfläche*

$$ {}^tP^{S_r}_{n-1} : G(X)F({}^rX) - F(X)G({}^rX) = 0, \tag{15} $$

die durch T auf den Unterraum S_r abgebildet wird.

2. *Eine Hyperfläche*

$$ {}^tP^{S_{n-r-1}}_{n-1} : G(X)F({}^{n-r-1}X) - F(X)G({}^{n-r-1}X) = 0, \tag{16} $$

die durch T auf S_{n-r-1} abgebildet wird.

3. *Eine Hyperfläche*

$$ \begin{aligned} {}^tP^{V_{n-2}}_{n-1} : [F({}^rX)G({}^{n-r-1}X) - G({}^rX)F({}^{n-r-1}X)]^2 + [F({}^rX)\bar{G}({}^rX;\, {}^{n-r-1}X) - \\ - G({}^rX)\bar{F}({}^rX;\, {}^{n-r-1}X)][F({}^{n-r-1}X)\bar{G}({}^rX;\, {}^{n-r-1}X) - \\ - G({}^{n-r-1}X)\bar{F}({}^rX;\, {}^{n-r-1}X] = 0, \end{aligned} \tag{17} $$

die durch T auf V_{n-2} abgebildet wird.

Beweis. Bei den Hyperflächen ${}^tP^{S_r}_{n-1}$ und ${}^tP^{S_{n-r-1}}_{n-1}$ ist die Behauptung offenbar.

Die irreguläre zur Varietät V_{n-2} gehörende Varietät besteht aus allen denjenigen Transversalen der Unterräume S_r; S_{n-r-1}, welche Sekanten der Varietät V_{n-2} sind. Alle Punkte dieser Varietät erhält man durch die Elimination von $x_0, \ldots, x_n$ aus den Gleichungen

$$ \begin{gathered} F(x) = 0, \\ G(x) = 0, \\ x_0 : \ldots : x_r = X_0 : \ldots : X_r, \\ x_{r+1} : \ldots : x_n = X_{r+1} : \ldots : X_n. \end{gathered} \tag{18} $$

Das Resultat dieser Elimination gibt eben die Hyperfläche ${}^tP^{V_{n-2}}_{n-1}$.

Satz II, 4. *Die Fundamentalvarietät B_{n-3} ist als Ganzes invariant.*

Beweis. Das auf die Gleichungen (12) in der Verbindung mit den Gleichungen (7) angewandte Eliminationsverfahren führt wieder zu den Gleichungen (12).

Der Satz ist auch aus geometrischen Betrachtungen offenbar. Nach der Definition der Transformation T bilden alle Punkte (y) der Bisekante aus B_{n-3} mit einem beliebigen Punkt dieser Bisekante die Punkte (x, y) der Korrespondenz. Keine andere Punkte können auf (x) durch T abgebildet werden.

3. Inzidenzbeziehungen zwischen Fundamentalvarietäten und irregulären Varietäten

Die im folgenden Satz angeführten Resultate sind offenbar.

Satz II, 5.

1. ${}^{i}P_{n-1}^{S_r} \supset S_r$, ${}^{i}P_{n-1}^{S_r} \supset S_{n-r-1}$, ${}^{i}P_{n-1}^{S_r} \supset V_{n-2}$, ${}^{i}P_{n-1}^{S_r} \supset B_{n-3}$.

2. ${}^{i}P_{n-1}^{S_{n-r-1}} \supset S_r$, ${}^{i}P_{n-1}^{S_{n-r-1}} \supset S_{n-r-1}$, ${}^{i}P_{n-1}^{S_{n-r-1}} \supset V_{n-2}$, ${}^{i}P_{n-1}^{S_{n-r-1}} \supset B_{n-3}$.

3. ${}^{i}P_{n-1}^{V_{n-2}} \supset S_r$, ${}^{i}P_{n-1}^{V_{n-2}} \supset S_{n-r-1}$, ${}^{i}P_{n-1}^{V_{n-2}} \supset V_{n-2}$, ${}^{i}P_{n-1}^{V_{n-2}} \supset B_{n-3}$.

4. Die Arten der Fundamentalpunkte

1. Durch einen Punkt $(x) \in S_r - (S_r \cap V_{n-2})$ geht genau eine Quadrik Q_{n-1}^x des Büschels (1) hindurch. Alle durch den Punkt (x) gehenden und den Unterraum S_{n-r-1} schneidenden Geraden bilden einen Unterraum

$$S_{n-r}^x : X_{r+1} : \ldots : X_n = x_{r+1} : \ldots : x_n .$$

${}^{i}Q_{n-r-1}^x \equiv Q_{n-1}^x \cap S_{n-r}^x$ ist eine $(n - r - 1)$-dimensionale irreguläre quadratische Varietät, die auf den Punkt (x) abgebildet wird.

Analogische Betrachtungen kann man auch über die Punkte des Unterraumes S_{n-r-1} durchführen.

2. Ist $(x) \in S_r \cap V_{n-2}$ (falls der Durchschnitt nichtleer ist), so ist $(n - r)$-dimensionaler Unterraum

$${}^{i}S_{n-r}^x : X_{r+1} : \ldots : X_n = x_{r+1} : \ldots : x_n$$

die irreguläre Varietät, die auf den Punkt (x) abgebildet wird.

3. Ist $(x) \in V_{n-2} - (S_r \cap V_{n-2}) - (S_{n-r-1} \cap V_{n-2})$, so ist die einzige durch den Punkt (x) gehende Transversale p^x der Unterräume S_r, S_{n-r-1} die irreguläre Varietät, die zu (x) gehört. Solche Transversalen sind von zwei Arten:

a) Sie liegen auf V_{n-2}, also ist jeder ihr Punkt fundamental.

b) Sie haben nur endlich viele fundamentale Punkte.

4. Zu einem Punkt $(x) \in B_{n-3} - (B_{n-3} \cap S_r) - (B_{n-3} \cap S_{n-r-1})$ gehört als ein irreguläres Gebilde eine Gerade der fundamentalen Punkte.

Also gibt es drei Arten der Fundamentalpunkte. Eine zum Punkt gehörende irreguläre Varietät ist

1. eine quadratische Varietät;
2. ein $(n - r)$- bzw. $(r + 1)$-dimensionaler Unterraum;
3. eine Gerade.

5. Invariante Varietäten

Satz II, 6. *Die Varietät aller invarianten unfundamentalen Punkte ist eine durch die Gleichung*

$$G(X)[F({}^rX) - F({}^{n-r-1}X)] - F(X)[G({}^rX) - G({}^{n-r-1}X)] = 0 \tag{19}$$

gegebene Varietät.

Beweis. Die Erfüllung der Bedingungen (19) durch Koordinaten eines unfundamentalen Punktes ist notwendig und hinreichend, damit dieser Punkt invariant sei. Das ist aus den Gleichungen (11) und (19) offenbar.

III. Das Bild einer Hyperebene

Satz III, 1. *Eine den Fundamentalunterraum S_r oder S_{n-r-1} nichtenthaltende Hyperebene wird durch die Involution I auf eine Hyperfläche der 5. Ordnung abgebildet. Diese Hyperfläche enthält Unterräume S_r, S_{n-r-1} als zweifache, die Varietäten V_{n-1} B_{n-3} als zweifache, die Varietäten V_{n-2}, B_{n-3} als einfache Gebilde.*

Beweis. Es sei

$${}^aS_{n-1} : \sum_{i=0}^{n} a_i X_i = 0 \tag{20}$$

eine den Voraussetzungen des Satzes genügende Hyperebene. (Es ist offenbar, daß keine Hyperebene die Varietät V_{n-2} oder B_{n-3} enthalten kann.) Dafür ist es notwendig und hinreichend, damit $a_i \neq 0$ mindestens für eine i aus $0, \ldots, r$ und mindestens für eine i aus $r+1, \ldots, n$ sei.

Durch die Transformation (11) entspricht es der Hyperebene (20) eine Hyperfläche

$$F_{n-1}^{{}^aS_{n-1}} : \sum_{i=0}^{r} a_i X_i [G(X)F({}^{n-r-1}X) - F(X)G({}^{n-r-1}X)] + \tag{21}$$

$$+ \sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i [G(X)F({}^rX) - F(X)G({}^rX)] = 0$$

Die Behauptung über die Ordnung der Hyperfläche $F_{n-1}^{{}^aS_{n-1}}$ und über ihre Inzidenz mit der Fundamentalvarietät U_{n-2} ist offenbar. Die Behauptung über die Zweifachheit der Punkte aus den Unterräumen S_r, S_{n-r-1} auf $F_{n-1}^{{}^aS_{n-1}}$ erhält man, indem man die Werte der ersten partiellen Ableitunge n der Form $F_{n-1}^{{}^aS_{n-1}}$ in den Punkten der genannten Unterräume berechnet.

Beispiel. Eine den Unterraum S_r enthaltende Hyperebene ${}^bS_{n-1}$ ist durch eine Gleichung

$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i = 0 \tag{22}$$

bestimmt. Durch die Transformation (11) entspricht es ihr eine reduzible Hyperfläche

$$F_{n-1}^{bS_{n-1}} : \sum_{i=r+1}^{n} b_i X_i [G(X)F({}^rX) - F(X)G({}^rX)] = 0, \tag{23}$$

die aus der Hyperebene ${}^bS_{n-1}$ und der zum Fundamentalunterraum S_r gehörenden irregulären Hyperfläche ${}^iP_{n-1}^{S_r}$ (die Gleichung (15)) besteht. Von der zugehörigen irregulären Varietät abgesehen ist also die Hyperebene ${}^bS_{n-1}$ in der Involution I invariant.

Analogisch gilt es auch über eine den Fundamentalunterraum S_{n-r-1} enthaltende Hyperebene.

Literatur

[1] E. Bertini: *Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume, Wien, 1924*

[2] H. P. Hudson: *Cremona transformations, Cambridge, 1927*

Adresa autora: Katedra geometrie PFUK, Šmeralova 2/b, Bratislava

Do redakcie došlo: 27. septembra 1967.

Involúcia 5. stupňa

J. ČIŽMÁR

Resumé

V práci sa skúma involúcia priestoru S_n, ktorú na nadkvadrikách zväzku vytínajú priečky disjunktných podpriestorov S_r, S_{n-r-1}.

Инволюция 5. степени

Я. ЧИЖМАР

Резюме

В этой работе рассмотрена инволюция пространства S_n, которую на квадриках пучка образуют прямые, пересекающие независимые подпространства S_r, S_{n-r-1}.

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XX — 1969

Über einige Eigenschaften der Lösungen der quasilinearen Differentialgleichung 4. Ordnung

A. FILLOVÁ

Einleitung. Die Arbeit ist in zwei Teile geteilt. Im ersten Teil werden einige grundlegende Eigenschaften der Lösungen der Gleichungen

$$(ry''')' + qy = 0 \tag{a$_1$}$$

$$(rz')''' + qz = 0 \tag{b$_1$}$$

untersucht, wobei über die Koeffizienten vorausgesetzt wird, dass $r(x) > 0$, $q(x)$ stetige Funktionen für $x \in (-\infty, \infty)$ sind.

Im zweiten Teil sind hinreichende Bedingungen für die Koeffizienten der Differentialgleichung (a_1) bzw. (b_1) angeführt, nach deren Lösung $y(x)$ bzw. $z(x)$ im Intervall $(-\infty, \infty)$ keine Nullstellen oder höchstens nur eine Nullstelle hat.

In der Arbeit wurden einige Ergebnisse, welche den Ergebnissen [1], [2], [3] analogisch sind, formuliert.

I.

Die Differentialgleichung (a_1) kann als Differentialsystem 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ ry_3' &= y_4 \\ y_4' &= -qy_1 \end{aligned}$$

geschrieben werden, woraus folgt, dass zu den beliebigen fünf Zahlen (a, y_0, y_0', y_0'', y_0''') gerade eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a_1) im Intervall $(-\infty, \infty)$ existiert, welche die Bedingung $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_0'$, $y''(a) = y_0''$, $y'''(a) = y_0'''$ erfüllt.

Die Lösungen y_1, y_2, y_3, y_4 der Differentialgleichung (a_1) bilden ein Fundamentalsystem, wenn dessen Determinante (Wronskian)

$$W(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''' \end{vmatrix}$$

wenigstens in einem Punkte des Intervalles $(-\infty, \infty)$ verschieden von Null ist. Der Wronskian des Fundamentalsystems der Lösungen der Differentialgleichung (a_1) ist $W = \frac{k}{r(x)}$, wo k eine Konstante ist.

Es ist ersichtlich, dass wenn y_1, y_2, y_3, y_4 ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (a_1) ist, dann z_1, z_2, z_3, z_4, wo

$$z_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}; \quad z_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_4'' \end{vmatrix}; \quad z_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_3'' & y_4'' \end{vmatrix}; \quad z_4 = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2' & y_3' & y_4' \\ y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{vmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (b_1) ist. Ähnlich steht dem beliebigen Fundamentalsystem der Lösungen z_1, z_2, z_3, z_4 der Gleichung (b_1) ein entsprechendes Fundamentalsystem von Lösungen y_1, y_2, y_3, y_4 der Gleichung (a_1) zu, wo

$$y_1 = r\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_1' & z_2' & z_3' \\ (rz_1')' & (rz_2')' & (rz_3')' \end{vmatrix}, \quad y_2 = r\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_4 \\ z_1' & z_2' & z_4' \\ (rz_1')' & (rz_2')' & (rz_4')' \end{vmatrix},$$

$$y_3 = r\begin{vmatrix} z_1 & z_3 & z_4 \\ z_1' & z_3' & z_4' \\ (rz_1')' & (rz_3')' & (rz_4')' \end{vmatrix}, \quad y_4 = r\begin{vmatrix} z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2' & z_3' & z_4' \\ (rz_2')' & (rz_3')' & (rz_4')' \end{vmatrix}$$

ist.

Für die Lösungen der Gleichung (a_1) gelten folgende Integralidentitäten

I. $y''(ry''') - \int_a^x [ry'''^2 - qyy''] \, dt = \text{Konst}$

II. $ry''' + \int_a^x qy \, dt = \text{Konst}$

III. $y'ry''' - \int_a^x [y''ry''' - qyy'] \, dt = \text{Konst}$

Die Integralidentität I., bzw. III. erhielten wir durch Multiplizieren der Differentialgleichung (a_1) mit der Funktion y'', bzw. y' und durch Integration

Glied um Glied von a bis x. Ähnlich erhalten wir durch Integration der Gleichung (a_1) Glied um Glied die Integralidentität II.

Für die Lösungen der Differentialgleichung (b_1) gehen die Integralidentitäten I., II., III. in die Form

$$\text{IV.}\quad (rz')'\,(rz')'' - \int_a^x [(rz')''^2 - (rz')'qz]\,dt = \text{Konst}$$

$$\text{V.}\quad (rz')'' + \int_a^x qzdt = \text{Konst}$$

$$\text{VI.}\quad rz'(rz')'' - \int_a^x [(rz')'\,(rz')'' - (rz')qz]\,dt = \text{Konst}$$

über.

Es sei y_1, y_2, y_3, y_4 ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (a_1), welches im Punkte $a \in (-\infty, \infty)$ folgende Anfangsbedingungen erfüllt:

$$(1)\quad y_1(a) = y_1'(a) = y_1''(a) = 0,\ y_1'''(a) \neq 0;\ \ y_2(a) = y_2'(a) = y_2'''(a) = 0,$$
$$y_2''(a) \neq 0;\ y_3(a) = y_3''(a) = y_3'''(a) = 0,\ y_3'(a) \neq 0;\ \ y_4'(a) = y_4''(a) =$$
$$= y_4'''(a) = 0,\ y_4(a) \neq 0.$$

Dann gilt:

a) Jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a_1) mit der Eigenschaft $y(a) = 0$, bzw. $y'(a) = 0$, bzw. $y''(a) = 0$, bzw. $y'''(a) = 0$ kann in der Form $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$, bzw. $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_4$ bzw. $y = c_1y_1 + c_2y_3 + c_3y_4$ bzw. $y = c_1y_2 + c_2y_3 + c_3y_4$, wo c_1, c_2, c_3 entsprechende Konstanten sind, geschrieben werden.

b) Jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a_1) mit der Eigenschaft $y(a) = y'(a) = 0$, bzw. $y(a) = y''(a) = 0$, bzw. $y(a) = y'''(a) = 0$, bzw. $y'(a) = y''(a) = 0$, bzw. $y'(a) = y'''(a) = 0$, bzw. $y''(a) = y'''(a) = 0$ kann in der Form $y = c_1y_1 + c_2y_2$, bzw. $y = c_1y_1 + c_2y_3$, bzw. $y = c_1y_2 + c_2y_3$, bzw. $y = c_1y_1 + c_2y_4$ bzw. $y = c_1y_2 + c_2y_4$, bzw. $y = c_1y_3 + c_2y_4$ geschrieben werden, wo c_1, c_2 entsprechende Konstanten sind.

c) Alle Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung (a_1) mit einer der Eigenschaften (1) sind linear abhängig.

Satz 1. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung* (a_1) *mit der Eigenschaft $y(x_1) = y'(x_1) = y''(x_1) = 0$, $y'''(x_1) \neq 0$ im Punkte $x_2 \neq x_1 \in (-\infty, \infty)$ eine Nullstelle habe ist, dass x_1 eine Nullstelle der Lösung $z(x)$ der Differentialgleichung* (b_1) *mit der Eigenschaft $z(x_2) = z'(x_2) = (rz')'(x_2) = 0$, $(rz')''(x_2) \neq 0$ sei.*

Beweis. Notwendige Bedingung. Es sei $y(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (a_1) mit der Eigenschaft $y(x_1) = y'(x_1) = y''(x_1) = 0$, $y'''(x_1) \neq 0$, $y(x_2) = 0$, wo $x_1 \neq x_2 \in (-\infty, \infty)$ ist. Dann können wir gemäss a) $y(x)$ in der Form $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ schreiben, wobei y_1, y_2, y_3 im Punkte x_2 die Eigenschaft (1) haben. Die Konstanten c_1, c_2, c_3 müssen das System

$$c_1y_1(x_1) + c_2y_2(x_1) + c_3y_3(x_1) = 0$$

$$c_1y_1'(x_1) + c_2y_2'(x_1) + c_3y_3'(x_1) = 0$$

$$c_1y_1''(x_1) + c_2y_2''(x_1) + c_3y_3''(x_1) = 0$$

erfüllen, wobei c_1, c_2, c_3 gleichzeitig nicht gleich Null sein dürfen. Dies ist nur so möglich, wenn die Determinante $\Delta(x_1)$ des Systems gleich Null ist. $z(x) = \Delta(x)$ ist jedoch die Lösung der Differentialgleichung (b_1) mit der Eigenschaft $z(x_2) = z'(x_2) = (rz')'(x_2) = 0$, $(rz')''(x_2) \neq 0$.

Hinreichende Bedingung. Es sei $z(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (b_1) mit der Eigenschaft $z(x_2) = z'(x_2) = (rz')'(x_2) = 0, (rz')''(x_2) \neq 0, z(x_1) = 0$. Es sei $y(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (a_1) mit der Eigenschaft $y(x_1) = y'(x_1) = y''(x_1) = 0$, $y'''(x_1) \neq 0$. Es ist notwendig zu zeigen, dass $y(x_2) = 0$.

Es sei y_1, y_2, y_3, y_4 ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (a_1) mit der Eigenschaft (1) im Punkte x_2. Dann kann man $y(x)$ in der Form $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4$ schreiben, wo c_1, c_2, c_3, c_4 die Gleichungen

$$c_1y_1(x_1) + c_2y_2(x_1) + c_3y_3(x_1) + c_4y_4(x_1) = 0$$

$$c_1y_1'(x_1) + c_2y_2'(x_1) + c_3y_3'(x_1) + c_4y_4'(x_1) = 0$$

$$c_1y_1''(x_1) + c_2y_2''(x_1) + c_3y_3''(x_1) + c_4y_4''(x_1) = 0$$

$$c_1y_1'''(x_1) + c_2y_2'''(x_1) + c_3y_3'''(x_1) + c_4y_4'''(x_1) = k \neq 0$$

erfüllen. Daraus erhalten wir für c_4

$$c_4 = \frac{k}{W(x_1)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} (x_1) = \frac{k}{W(x_1)} z(x_1) = 0,$$

wo k eine entsprechende Konstante ist. Dann ist $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ und also $y(x_2) = 0$.

Ähnlich wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 2. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung* (a_1) *mit der Eigenschaft* $y(x_1) = y'(x_1) = y'''(x_1) = 0$, $y''(x_1) \neq 0$, *bezw.* $y(x_1) = y''(x_1) = y'''(x_1) = 0$, $y'(x_1) \neq 0$, *bezw.* $y'(x_1) =$

$= y''(x_1) = y'''(x_1) = 0$, $y(x_1) \neq 0$ *im Punkte* $x_2 \neq x_1 \in (-\infty, \infty)$ *eine Nullstelle habe ist, dass* x_1 *die Nullstelle der Funktion* $z'(x)$, *bzw.* $(rz')'(x)$, *bzw.* $(rz')''(x)$ *sei, wo* $z(x)$ *die Lösung der Gleichung* (b_1) *mit der Eigenschaft* $z(x_2) = z'(x_2) = (rz')'(x_2) = 0$, $(rz')''(x_2) \neq 0$.

Satz 3. *Es sollen* y_1, y_2, y_3, y_4 *ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung* (a_1) *mit der Eigenschaft* (1) *bilden. Dann entspricht die Lösung* $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$, *bzw.* $= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_4$, *bzw.* $y = c_1y_1 + c_2y_3 + c_3y_4$, *bzw.* $y = c_1y_2 + c_2y_3 + c_3y_4$ *der Differentialgleichung dritter Ordnung*:

$$\omega(ry''') - r\omega'y'' + (r\omega')'y' - (r\omega')''y = 0 \tag{2}$$

wo $\omega = \omega(x)$ *die Lösung der Differentialgleichung* (b_1) *der Form*

$$\omega = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad bzw.\ \omega = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_4'' \end{vmatrix},$$

$$bzw.\ \omega = \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_3'' & y_4'' \end{vmatrix}, \quad bzw.\ \omega = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2' & y_3' & y_4' \\ y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{vmatrix}$$

ist.

Beweis. Den Satz beweisen wir nur für die Lösung der Form $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$, für die anderen Typen von Lösungen ist der Beweis analogisch.

Durch das Ausschliessen der Konstanten aus dem System

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ y' &= c_1y_1' + c_2y_2' + c_3y_3' \\ y'' &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_3y_3'' \\ y''' &= c_1y_1''' + c_2y_2''' + c_3y_3''' \end{aligned}$$

erhalten wir die Gleichung

$$y''' = \frac{\begin{vmatrix} y & y_2 & y_3 \\ y' & y_2' & y_3' \\ y'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}{\omega} y_1''' + \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y & y_3 \\ y_1' & y' & y_3' \\ y_2'' & y'' & y_3'' \end{vmatrix}}{\omega} y_2''' + \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix}}{\omega} y_3'''$$

wo

$$\omega = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

ist.

Daraus erhalten wir nach Multiplizieren $r(x)$ die Gleichung (2).

Satz 4. *Es seien y_1, y_2, y_3 unabhängige Lösungen der Differentialgleichung* (a_1) *mit der Eigenschaft*

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{für } x \in I \subset (-\infty, \infty).$$

Dann ist auch die Funktion

$$y_4(x) = \int_a^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \end{vmatrix}}{r(t)\omega(t)}\, dt, \quad a \in I$$

eine Lösung der Differentialgleichung (a_1) *und bildet zusammen mit y_1, y_2, y_3 in I ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung* (a_1).

Beweis. Die Menge der Lösungen der Form $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ entspricht in $I \subset (-\infty, \infty)$ der Differentialgleichung (2), wo $\omega = z$ die Lösung der Differentialgleichung (b_1) ist. Nach Differenzieren der Gleichung (2) Glied nach Glied erhalten wir die Gleichung (a_1). Wenn wir auf die rechte Seite der Gleichung (2) eine Konstante, welche z. B. gleich eins ist, setzen, erhalten wir die nichthomogene Differentialgleichung, deren partikuläre Lösung wir mit y_4 bezeichnen. Die Koeffizienten $c_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ der Lösung $y_4 = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + c_3(x)y_3$, welche wir mit der Variationsmethode der Konstanten errechnen, haben die Form

$$c_1 = \int_a^x \frac{\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix}(t)}{r(t)\omega(t)}\, dt, \quad c_2 = -\int_a^x \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1' & y_3' \end{vmatrix}(t)}{r(t)\omega(t)}\, dt, \quad c_3 = \int_a^x \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}(t)}{r(t)\omega(t)}\, dt$$

wo $a, x \in I$ ist.

Nach dem Einsetzen in y_4 erhalten wir

$$y_4 = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + c_3(x_3y_3 = \int_a^x \frac{1}{r(t)\omega(t)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \end{vmatrix} dt.$$

Es ist nicht nötig zu beweisen, dass y_1, y_2, y_3, y_4 ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden. Das kommt ersichtlich daher, dass $y_4(x)$ im Punkte a eine dreifache Nullstelle $y_4(a) = y_4'(a) = y_4''(a) = 0$, $y_4'''(a) \neq 0$ hat, während y_1, y_2, y_3 diese Eigenschaft entbehren.

II.

In diesem Abschnitt sind einige die nichtoscillatorischen Lösungen der Gleichung (a_1) bzw. (b_1) betreffende Ergebnisse angeführt.

Satz 5. *Es seien $r(x) > 0$, $q(x) \leqslant 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ stetige Funktionen, wobei $q(x)$ in beliebiger Umgebung U_a des Punktes a nicht identisch gleich Null ist. Dann hat die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung* (a_1), *welche die Anfangsbedingungen $y(a) = y'(a) = y''(a) = 0$, $y'''(a) \neq 0$, bzw. $y(a) = y'(a) = y'''(a) = 0$, $y''(a) \neq 0$, bzw. $y(a) = y''(a) = y'''(a) = 0$, $y'(a) \neq 0$ erfüllt, zusammen mit $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$ für $x \neq a$ keine Nullstellen.*

Beweis. a) $y(a) = y'(a) = y''(a) = 0$, $y'''(a) \neq 0$. Wenn $y'''(\bar{x}) = 0$ z. B. für $\bar{x} > a$, dann ist $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y'(x) = \operatorname{sgn} y''(x)$ $(= \operatorname{sgn} y'''(x))$ für $x \in (a, \bar{x})$. Aus der Integralidentität I.

$$[y''(ry''')]_a^{\bar{x}} - \int_a^{\bar{x}} [ry'''^2 - qyy''] \, dx = 0$$

erhalten wir einen Widerspruch, da die linke Seite verschieden von Null ist. Aus dem Satz über monotone Funktionen folgt, dass auch $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ keine Nullstellen für $x > a$ haben.

b) $y(a) = y'(a) = y'''(a) = 0$, $y''(a) \neq 0$. Analogisch wie in a) sehen wir, dass der Satz für $y''(x)$ gilt und daher ersichtlich auch für $y(x)$, $y'(x)$ und $y'''(x)$.

c) $y(a) = y''(a) = y'''(a) = 0$, $y'(a) \neq 0$. Es sei $\bar{x} > a$ die erste Nullstelle von $y'''(x)$, welche nach dem Punkte a folgt. Dann ist $\operatorname{sgn} y'''(x) = \operatorname{sgn} y''(x)$ für $x \in (a, \bar{x})$:

Es können zwei Fälle vorkommen.

1. $y'(x)$ wechselt in $(a, \bar{x})$ das Zeichen nicht. Dann ist $\operatorname{sgn} y'(x) = \operatorname{sgn} y(x)$ für $x \in (a, \bar{x})$. Aus der Integralidentität III. erhalten wir einen Widerspruch, da

$$[y'ry''']_a^{\bar{x}} - \int_a^{\bar{x}} [y''ry''' - qyy'] \, dx = 0$$

und der Ausdruck auf der linken Seite von Null verschieden ist.

2. $y'(x)$ wechselt in $(a, \bar{x})$ das Zeichen. Dann existiert die erste Nullstelle $x_1 \in (a, \bar{x})$ der Funktion $y'(x)$ und für $x \in (a, x_1)$ ist $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y'(x)$. Aus der Integralidentität III. durch Integration von a bis x_1 erhalten wir

wider einen Widerspruch. Damit ist bewiesen, dass $y'''(x)$ keine Nullstelle für $x > a$ hat. Es ist ersichtlich, dass auch $y''(x)$ keine Nullstellen für $x > a$ hat. Es ist noch nötig eine ähnliche Behauptung über $y'(x)$ zu beweisen.

Es sei $\bar{x} > a$ die erste Nullstelle $y'(x)$. Dann ist $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y'(x)$ für $x \in (a, \bar{x})$ und nach dem Vorhergegangenem ist $\operatorname{sgn} y''(x) = \operatorname{sgn} y'''(x)$ für $x \in (a, \bar{x})$. Analogisch, wie im vorhergegangenem Falle folgt aus der Integralidentität III., dass $y'(x)$ und also auch $y(x)$ keine Nullstellen für $x > a$ haben.

Ähnlich kann bewiesen werden, dass y, y', y'', y''' keine Nullstellen für $x < a$ haben.

Bemerkung 1. Es seien die Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllt. Dann hat die Lösung $z(x)$ der Differentialgleichung (b_1), welche die Anfangsbedingungen $z(a) = z'(a) = (rz')'(a) = 0$, $(rz')''(a) \neq 0$, bzw. $z(a) = z'(a) = (rz')''(a) = 0$, $(rz')'(a) \neq 0$, bzw. $z(a) = (rz')'(a) = (rz')''(a) = 0$, $z'(a) \neq 0$ erfüllt, zusammen mit den Funktionen $z'(x)$, $(rz')'(x)$, $(rz')''(x)$ für $x \neq a$ keine Nullstellen.

Satz. 6. *Es sollen die Koeffizienten der Differentialgleichung* (a_1) *die Voraussetzungen des Satzes* 5 *erfüllen. Dann hat die Lösung* $y(x)$ *der Differentialgleichung* (a_1), *welche die Anfangsbedingungen* $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$, $y'''(a) > 0$, *bzw.* $y(a) = 0$, $y'(a) > 0$, $y''(a) > 0$, $y'''(a) > 0$, *bzw.* $y(a) > 0$, $y'(a) > 0$, $y''(a) > 0$, $y'''(a) > 0$, *bzw.* $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) < 0$, $y'''(a) < 0$, *bzw.* $y(a) = 0$, $y'(a) < 0$, $y''(a) < 0$, $y'''(a) < 0$, *bzw.* $y(a) < 0$, $y'(a) < 0$, $y''(a) < 0$, $y'''(a) < 0$ *erfüllt, zusammen mit* $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$ *für* $x > a$ *keine Nullstellen.*

Beweis. Den Satz beweisen wir für die Lösung mit den ersten Anfangsbedingungen, für die weiteren wird die Behauptung analogisch bewiesen. $\bar{x} > a$ sei die Nullstelle der Lösung $y(x)$. Dann haben auch $y'(x)$ und $y''(x)$ im Intervall $(a, \bar{x})$ Nullstellen. Da $y'''(a) > 0$, ist $y''(x)$ in der Umgebung rechts des Punktes a eine positive wachsende Funktion, aber nach Erreichen des Maximum fällt diese zum Nullpunkt herab. Also hat auch $y'''(x)$ in $(a, \bar{x})$ eine Nullstelle, welche wir mit x_1 bezeichnen wollen. Dann erhalten wir aus der Identität I.

$$[y''ry''']_a^{x_1} - \int_a^{x_1} [ry'''^2 - qyy''] \, dx = 0$$

einen Widerspruch, da beide Glieder auf der linken Seite negativ sind.

Der Beweis der übrigen Behauptungen wird analogisch durchgeführt.

Bemerkung 2. Es seien die Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllt. Dann hat die die Anfangsbedingungen $z(a) = z'(a) = 0$, $(rz')'(a) > 0$, $(rz')''(a) > 0$, bzw. $z(a) = 0$, $z'(a) > 0$, $(rz')'(a) > 0$, $(rz')''(a) > 0$, bzw. $z(a) > 0$, $z'(a) > 0$, $(rz')'(a) > 0$, $(rz')''(a) > 0$, bzw. $z(a) = z'(a) = 0$, $(rz')'(a) < 0$, $(rz')''(a) < 0$, bzw. $z(a) = 0$, $z'(a) < 0$, $(rz')'(a) < 0$, $(rz')''(a) < 0$, bzw.

$z(a) < 0$, $z'(a) < 0$, $(rz')'(a) < 0$, $(rz')''(a) < 0$ erfüllende Lösung $z(x)$ der Differentialgleichung (b_1) zusammen mit den Funktionen $z'(x)$, $(rz')'(x)$, $(rz')''(x)$ für $x > a$ keine Nullstellen.

Bemerkung 3. Es kann leicht gezeigt werden, dass wenn die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a_1) die Anfangsbedingungen $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$, $y'''(a) < 0$, bzw. $y(a) = 0$, $y'(a) > 0$, $y''(a) < 0$, $y'''(a) > 0$, bzw. $y(a) > 0$, $y'(a) < 0$, $y''(a) > 0$, $y'''(a) < 0$, bzw. $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) < 0$, $y'''(a) > 0$, bzw. $y(a) = 0$, $y'(a) < 0$, $y''(a) > 0$, $y'''(a) < 0$, bzw. $y(a) < 0$, $y'(a) > 0$, $y''(a) < 0$, $y'''(a) > 0$ erfüllt, dann hat diese zusammen mit $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$ für $x < a$ keine Nullstellen.

Bemerkung. 4 Es seien die Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllt. Dann hat die Lösung $z(x)$ der Differentialgleichung (b_1) welche die Anfangsbedingungen $z(a) = z'(a) = 0$, $(rz')'(a) > 0$, $(rz')''(a) < 0$, bzw. $z(a) = 0$, $z'(a) > 0$, $(rz')'(a) < 0$, $(rz')''(a) > 0$, bzw. $z(a) > 0$, $z'(a) < 0$, $(rz')'(a) > 0$, $(rz')''(a) < 0$, bzw. $z(a) = z'(a) = 0$, $(rz')'(a) < 0$, $(rz')''(a) > 0$, bzw. $z(a) = 0$, $z'(a) < 0$, $(rz')'(a) > 0$, $(rz')''(a) < 0$, bzw. $z(a) < 0$, $z'(a) > 0$, $(rz')'(a) < 0$, $(rz')''(a) > 0$ erfüllt, zusammen mit den Funktionen $z'(x)$, $(rz')'(x)$, $(rz')''(x)$ keine Nullstellen für $x < a$.

Satz. 7. *Es seien $r(x) > 0$, $q(x) \leqslant 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ stetige Funktionen, wobei $q(x)$ in beliebiger Umgebung U_a des Punktes a nicht identisch gleich Null ist. Dann hat die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a_1), welche die Anfangsbedingungen $y'(a) = y''(a) = y'''(a) = 0$, $y(a) \neq 0$ erfüllt, zusammen mit $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$ keine Nullstellen für $x \neq a$.*

Beweis. Es sei z. B. $y(a) > 0$. Zeigen wir, dass z. B. für $x > a$ $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$, $y''(x) > 0$, $y'''(x) > 0$ ist.

Setzen wir voraus, dass $y(x)$ rechts von a die Nullstelle x_1 hat. Im Intervall (a_1, x_1) ist $(ry''')'(x) \geqslant 0$ und daher ist auch $y'''(x) \geqslant 0$, $y''(x) \geqslant 0$, $y'(x) \geqslant 0$, $y(x) > 0$, wo die Gleichheit in keinem Intervall (a, b) gilt.

Aus der Integralidentität II. erhalten wir nach Integration von a bis x

$$\text{(h)} \qquad y'' = -\int_a^x \left[\frac{1}{r(t)}\int_a^t qy\,ds\right] dt.$$

Für die Lösung $y(x)$ gilt

$$\text{(k)} \qquad (yy')' = yy'' + y'^2.$$

Nach Einsetzen von (h) in (k) und nach Integration von a bis x_1 erhalten wir einen Widerspruch, da in der Gleichheit

$$[yy']_a^{x_1} = -\int_a^{x_1}\left[y\int_a^{x}\left(\frac{1}{r(t)}\int_a^{t} qy\,ds\right)dt\right]dx + \int_a^{x_1} y'^2 dx$$

der Ausdruck auf der linken Seite gleich Null und auf der rechten positiv ist.

Ähnlich sehen wir, dass auch $y'(x) > 0$ für $x > a$ ist, und aus den Identitäten (h) und II. ist ersichtlich, dass $y''(x) > 0$, $y'''(x) > 0$ ist.

Analogisch wird die Behauptung für $x < a$ bewiesen.

Folgerung 1. *Es seien* $0 < r(x) \leqslant M$, $q(x) \leqslant 0$ *stetige Funktionen für* $x \in (-\infty, \infty)$. *Es sei* $y_1(x)$ *die die Anfangsbedingungen* $y_1(a) = y_1'(a) = y_1''(a) = 0$, $y_1'''(a) > 0$ *erfüllende Lösung der Differentialgleichung* (a₁). *Dann gilt*

$$\lim_{x\to\infty} y_1(x) = \lim_{x\to\infty} y_1'(x) = \lim_{x\to\infty} y_1''(x) = +\infty.$$

Es existiert auch $\lim ry_1'''(x)$, *der endlich, oder* $+\infty$ *ist.*

Beweis. Wir haben für die Lösung $y_1(x)$ bewiesen, dass diese zusammen mit $y_1'(x)$, $y_1''(x)$, $y_1'''(x)$ für $x > a$ keine Nullstellen hat; es ist also ersichtlich, dass $y_1(x) > 0$, $y_1'(x) > 0$, $y_1''(y) > 0$ ist, und aus der Integralidentität II. folgt für $x > a$

(l) $$y_1'''(x) \geqslant \frac{(ry_1''')(a)}{M}$$

Nach Integration (l) von a bis x erhalten wir

$$y_1''(x) \geqslant \frac{(ry_1''')(a)}{M}(x-a),\; y_1'(x) \geqslant \frac{(ry_1''')(a)}{2M}(x-a)^2,\, y_1(x) \geqslant \frac{(ry_1''')(a)}{6M}(x-a)^3$$

Aus den letzten Ungleichungen ist ersichtlich, dass $y_1(x) \to \infty$, $y_1'(x) \to \infty$, $y_1''(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ ist. Aus der Differentialgleichung (a₁) folgt $(ry_1''')'(x) \geqslant 0$ für $x > a$. Es ist also $(ry_1''')(x)$ eine nichtfallende Funktion und es existiert $\lim (ry_1''')(x)$.

Bemerkung 5. Ähnliche Eigenschaften wie $y_1(x)$ haben auch die Lösungen $y_2(x)$ und $y_3(x)$ der Differentialgleichung (a₁), welche die Anfangsbedingungen $y_2(a) = y_2'(a) = y_2'''(a) = 0$, $y_2''(a) > 0$; $y_3(a) = y_3''(a) = y_3'''(a) = 0$, $y_3'(a) > 0$ erfüllen.

Folgerung 2. *Es seien* $0 < r(x) \leqslant M$, $q(x) \leqslant 0$ *stetige Funktionen für* $x \in (-\infty, \infty)$, *wobei* $q(x)$ *in beliebiger Umgebung* U_a^+ *rechts vom Punkt* a *nicht* *identisch gleich Null ist. Es sei $y_4(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (a_1) *mit den Anfangsbedingungen* $y_4'(a) = y_4''(a) = y_4'''(a) = 0$, $y_4(a) > 0$. *Dann ist*

$$\lim_{x\to\infty} y_4(x) = \lim_{x\to\infty} y_4'(x) = \lim_{x\to\infty} y_4''(x) = +\infty.$$

Es existiert auch $\lim\,(ry_4''')(x)$, *der endlich, oder* $+\infty$ *ist.*

Beweis. Aus dem Satz 7 folgt, dass $y_4(x)$, $y_4'(x)$, $y_4''(x)$, $y_4'''(x)$ keine Nullstellen rechts von Punkt a haben und es gilt $y_4(x) > 0$ $y_4'(x) > 0$, $y_2''(x) > 0$, $y_4'''(x) > 0$ für $x > a$. Dann zeigen wir ähnlich wie in der Folgerung 1, dass $y_4(x) \to \infty$, $y_4'(x) \to +\infty$, $y_4''(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $\lim\,(ry_4''')(x)$ ist endlich, oder $+\infty$.

Literatur

[1] M. Greguš: *Über die lineare homogene Differentialhleicgung dritter Ordnung, Wiss. Z. Univ. Halle, Math.-Nat. XII/3 1963, 265—286.*

[2] M. Greguš: *Über einige Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung, Czechoslovak. math. Journal 11/86, 1961, 106—114.*

[3] M. Greguš: *Über die Eigenschaften der Lösungen einiger quasilinearer Gleichungen 3. Ordnung, Acta FRN UC X, 3, Matematika 12, 1965, 11—22.*

Adresa autorky: Katedra numerickej matematiky PFUK Bratislava, Šmeralova 2/b

Do redakcie došlo: 15. apríla 1968

O niektorých vlastnostiach riešení kvazilineárnej diferenciálnej rovnice 4. rádu

A. FILLOVÁ

Resumé

V práci sa vyšetrujú niektoré základné vlastnosti riešení kvazilineárnej diferenciálnej rovnice (a_1) resp. (b_1). Ďalej sa uvádzajú postačujúce podmienky pre koeficienty rovnice (a_1) resp. (b_1), za ktorých riešenie nemá nulové body, nanajvýš jeden.

О некоторых свойствах решений квазилинейного дифференциального уравнения 4 порядка

А. ФИЛЛОВА

Выводы

В этой работе рассматриваются некоторые основные свойства квазилинейного дифференциального уравнения a_1) соотв. $б_1$). Далее приведены достаточные условия, накладываюшиеся на коэффициенты уравнения a_1) соотв. $б_1$), при которых решение не обращается в нуль кроме одной точки.

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. — MATHEMATICA XX, 1969)

ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XX — 1969

Remarks on two results in the elementary theory of numbers

H. HATALOVÁ and T. ŠALÁT,

Bratislava

I

In the paper [1] is given for the Euler's function the following estimation:

$$\frac{1}{\varphi(n)} = 0\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

From this follows

Theorem 1. *There exists such a $c_1 > 0$ that for every $n > 1$ we have*

$$\varphi(n) > c_1 \frac{n}{\log n}. \tag{1}$$

The proof is based on the theorem 329 of the monograph [2] (see [2], p. 267) by which there exists such $A > 0$, that for every n

$$A < \frac{\sigma(n)\varphi(n)}{n^2} < 1.$$

We shall give two another proofs of the theorem 1.

In the first place we shall show that the theorem 1 follows easily also from the prime number theorem.

Let be $n \geqq 3$. Then every prime number p with $\left[\frac{n}{2}\right] < p < n$ is obviously prime to n. Hence we have $\varphi(n) \geqq \pi(n) - \pi\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) - 1$. On account of the prime number theorem for each ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, there exists n_0 such that for $n > n_0$

$$\varphi(n) > (1-\varepsilon)\frac{n}{\log n} - (1+\varepsilon)\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{\log\left[\frac{n}{2}\right]} - 1 \tag{2}$$

From (2) we get

$$\frac{\varphi(n)}{\left(\frac{n}{\log n}\right)} > (1-\varepsilon) - (1+\varepsilon)\frac{\log n}{\log\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n} - \frac{\log n}{n}. \tag{3}$$

For $n \to \infty$ the limit of the second term of the sum on the right side is equal to $-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)$, further $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$. The limit of the right side is therefore $(1-\varepsilon) - \frac{1}{2}(1+\varepsilon) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon > 0$. So we get from (3)

$\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi(n)}{\left(\frac{n}{\log n}\right)} > 0$. From this (1) follows immediately.

It is possible to prove the foregoing theorem also in a more elementary way as follows:

Theorem 2. *For every* $n > 1$ *we have* $\frac{\varphi(n)}{\left(\frac{n}{\log n}\right)} \geqslant \frac{\log 2}{2}$.

Proof. Let be $n > 1$, $n = p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ (the standard form of the number n). Then

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right). \tag{4}$$

Obviously we have $p_i \geqq i+1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ and so we obtain from (4)

$$\varphi(n) \geqq n\left(1-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{n}{k+1} \geqq \frac{n}{2k} \tag{5}$$

It is plain that $n \geqq 2^k$, and from this we get

$$k \leqq \frac{\log n}{\log 2}. \tag{6}$$

From (5) and (6) it follows

$$\varphi(n) \geqq \left(\frac{1}{2} \log 2\right) \frac{n}{\log n}.$$

Note. The monograph [2] (p. 267) gives the result (theorem 328) by which

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(n) \frac{\log \log n}{n} = e^{-\gamma} > 0,$$

where γ is the Euler's constant.
It follows from this result directly

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\dfrac{n}{\log n}} = +\infty. \tag{7}$$

(7) follows also from the following a little weaker theorem than is the quoted theorem 328 of [2].

Theorem 3. *Let φ denote the Euler's function. Then*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\left(\dfrac{n}{\log \log n}\right)} > 0.$$

Proof. We have for $n > 1$

$$\varphi(n) = n \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{n \prod\limits_{p/n} \left(1 - \dfrac{1}{p^2}\right)}{\prod\limits_{p/n} \left(1 + \dfrac{1}{p}\right)}.$$

Following (2) we have

$$\prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \geqq \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)} = c_0 > 0, \tag{8}$$

ζ being the Riemann's function.

It is easy to prove that

$$\prod_{p/n}\left(1+\frac{1}{p}\right) = 0\,(\log\log n) \text{ (see [3]).} \tag{9}$$

Then from (8) and (9) we obtain $\varphi(n) > \dfrac{c_0 n}{c_1 \log\log n}$.

From this the assertion of the theorem follows already immediately.

In the monograph [4] (p. 326—327) is given the following result: Let $p_1 < < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$ be the increasing sequence of all the prime numbers. Let us put for $n > 1$ $P_n = p_1 \cdot p_2 \ldots p_{\pi(n)}$. Then $P_n > n$ for $n > 2$.

The proof is based on the inequality $p_{\pi(n)+1} \leqq p_1 \cdot p_2 \ldots p_{\pi(n)} - 1$. We shall show now that the assertion of the foregoing theorem can be proved easily also with the help of the Bertrand's postulate.

Since $P_3 = 6 > 3$, we can assume that $n \geqq 4$.

We put $k = \left[\dfrac{n}{2}\right] \geqq 2$, then $2k \leqq 2\left[\dfrac{n}{2}\right] \leqq n$.

From the Bertrand's postulate it follows that there exists a prime number p such that

$$2 \leqq \left[\frac{n}{2}\right] < p < n. \tag{10}$$

It is plain that p is an odd prime number and

$$P_n \geqq 2p. \tag{11}$$

But from (10) it follows that

$$p \geqq \left[\frac{n}{2}\right] + 1 > \frac{n}{2} - 1 + 1 = \frac{n}{2} \tag{12}$$

and so we have from (11) and (12)

$$P_n \geqq 2p > n. \tag{13}$$

Note. The estimation of (13) for P_n is very rough. From the well-known properties of the function $\vartheta\,(n) = \sum_{p \leqq n} \log p = \log P_n$ $(n > 1)$, (see [2] p. 345) it follows that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log P_n}{n} = 1.$$

References

[1] E. Cohen: *A theorem in elementary number theory, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 782—783.*

[2] Hardy—Wright: *An introduction to the theory of numbers, Oxford, 1954.*

[3] R. L. Duncan: *Some estimates for $\sigma(n)$, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 713—715*

[4] W. Sierpiński: *Teoria liczb II, Warszawa 1959.*

Adresa autorov: Katedra algebry a teórie čísel PFUK, Šmeralova 2/b, Bratislava

Do redakcie došlo 15. mája 1968

Poznámky k dvom výsledkom v elementárnej teórii čísel

H. HATALOVÁ a T. ŠALÁT

Zhrnutie

Prvá časť práce obsahuje dva nové dôkazy známej vety o Eulerovej funkcii a ďalšie príspevky k odhadu tejto funkcie.

V druhej časti práce je uvedený nový dôkaz výsledku o dolnom odhade súčinu všetkých prvočísel menších ako n.

Заметки к двум результатам элементарной теории чисел

Х. ХАТАЛОВА и Т. ШАЛАТ

Резюме

Первая часть работы содержит два новых доказательства известной теоремы о функции Эйлера и некоторые другие дополнения к оценке этой функции.

Во второй части работы приведено новое доказательство результата о нижней оценке произведения всех простых чисел меньших n.

ACTA FACULTATIS

R. N. U. C

MATHEMATICA XX

Vydalo Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava. — Náklad 1052. — Rukopis zadaný 12. novembra 1968. — Vytlačené v júli 1970. — Papier 2 131 4, 70 g. — Tlačila Kníhtlačiareň Svornosť, n. p., Bratislava. — Tlačené zo sadzby monotypovej, z písma Extended. — Technický redaktor Adam Hanák. — 03/2 — AH 6,635 — VH 7,197 — 67 — 597 — 70

Celý náklad prevzala Ústredná knižnica PFUK, Bratislava, ul. 29. augusta (Medická záhrada)